

一类时间分数阶电报方程解的初始奇异性

王序然, 孔 旺*

南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

收稿日期: 2025年12月27日; 录用日期: 2026年1月21日; 发布日期: 2026年1月29日

摘 要

时间分数阶电报方程在描述具有遗传与记忆特性的反常扩散过程中具有重要作用。然而, 此类方程的解在初始时刻附近往往存在奇异性, 这源于分数阶微分算子的非局部性质, 并且会显著影响传统数值方法的精度。本文主要研究一类时间分数阶电报方程的解在初始时刻的奇异性, 通过运用Laplace变换法, 将方程的解进行分解, 构造出关键的积分算子, 通过分析这些积分算子及其各阶时间导数在 $t \rightarrow 0^+$ 时的渐近行为, 最终严格证明了解本身及其直至三阶时间导数在初始时刻的奇异性质, 并给出了其奇异强度的精确估计。该正则性分析为后续设计能够有效处理此类奇异性、基于非均匀时间网格的高效数值格式提供了理论依据。

关键词

时间分数阶电报方程, 初始奇异性, Laplace变换

The Initial Singularity of Solutions to a Class of Time-Fractional Telegraph Equations

Xuran Wang, Wang Kong*

School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: December 27, 2025; accepted: January 21, 2026; published: January 29, 2026

Abstract

The time-fractional telegraph equations play a crucial role in describing anomalous diffusion processes with hereditary and memory properties. However, the solutions of such equations often exhibit singularities near the initial time, which stems from the non-local nature of fractional differential operators and can significantly affect the accuracy of traditional numerical methods. This paper focuses on studying the singularity of solutions to a class of time-fractional telegraph equations

*通讯作者。

at the initial moment. By employing the Laplace transform method, the solution of the equation is decomposed, and key integral operators are constructed. Through analyzing the asymptotic behavior of these integral operators and their time derivatives of various orders as $t \rightarrow 0^+$, it is rigorously proven that the solution itself and its time derivatives up to the third order possess singular properties at the initial time, with precise estimates of the singularity strength provided. This regularity analysis offers a theoretical foundation for the subsequent design of efficient numerical schemes based on non-uniform temporal grids that can effectively handle such singularities.

Keywords

Time-Fractional Telegraph Equation, Initial Singularity, Laplace Transform

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

热传导是一类经典的自然过程, 对物质扩散与热传导的建模一直是研究的热点领域。自 Cattaneo 对 Fick 定律提出修正模型以来, 近年来引入的分数阶导数进一步拓展了 Cattaneo 方程的应用范围。分数阶 Cattaneo 方程适用于描述许多具有遗传与记忆特性的过程与材料, 能够捕捉相关的反常现象[1]-[6]。相较于传统的整数阶微分方程, 其在描述实际过程方面更具优势, 因此已成为解决科学与工程中一些应用问题的关键工具。

本文考虑如下在有限区域 $\Omega_T = [-1, 1] \times (0, T]$ 上的时间分数阶电报方程的数值解[3]:

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^{1+\alpha} u(x, t) + u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t), (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in [-1, 1], \\ u(\pm 1, t) = 0, t \in (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

其中 ${}^C_0 D_t^{1+\alpha} w(t)$ 表示阶数为 $1+\alpha$ 的 Caputo 分数阶导数, 定义为且 $0 < \alpha < 1$ 。

分数阶电报方程在描述反常扩散现象方面展现出巨大潜力, 因此其求解备受关注。尽管已有同伦分析法[7]、分离变量法[8]、Laplace 变换法及 Fourier 变换分析[6] [9] [10]等方法被应用于时间分数阶方程的解析求解, 但所得解析解往往过于复杂, 难以投入实际应用。因此, 通常需要借助数值算法对时间分数阶电报方程进行数值求解[6] [11]-[22]。

在数值求解之前, 需要考虑到方程的解在初始时刻附近可能存在的奇异性。这种奇异性源于分数阶微分算子的非局部性质, 它使得解在 $t = 0$ 附近的光滑性降低, 从而影响传统数值格式的精度与收敛阶。若依旧使用均匀时间网格, 即使采用高阶格式, 也可能无法获得理想的收敛速率。

针对这一问题, 非均匀时间网格的引入被证明是一种有效的策略[23] [24]。通过在初始时刻附近加密网格, 可以更好地捕捉解的奇异行为, 从而恢复数值格式的预期收敛阶。对于时间分数阶电报方程, 其解在初始时刻的奇异性分析是设计高效稳健数值格式的重要理论基础。

因此, 本文的核心工作是深入分析时间分数阶电报方程的解在初始时刻的奇异性。我们将运用 Laplace 变换工具, 对方程的解进行分解, 并通过分析解算子的渐近性质, 严格证明解及其时间导数在 $t \rightarrow 0^+$ 时的奇异性, 为后续构造非均匀时间网格的 L1 有限元格式提供了理论依据。

2. 时间分数阶电报方程解的正则性

本章深入研究了时间分数阶电报方程的解在初始时刻的奇异性。首先, 通过基函数展开和 Laplace 变换法将原方程分解, 并利用 Laplace 逆变换得到了解的显式表达式。另外, 通过对核函数 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$ 的高阶导数进行严格估计, 揭示了解在 $t=0$ 附近存在弱奇异性的本质特征。理论分析表明, 即使初值和源项光滑, 解的高阶时间导数在初始时刻仍可能无界, 这一结论为后续设计非均匀时间网格提供了理论依据。

2.1. 方程的分解转化

2.1.1. 基函数展开法

设 $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个标准正交基, 则对于任意一个函数 $w(x) \in L^2(\Omega)$, 存在唯一的数列 $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 使得函数 $w(x)$ 可以展开为

$$w(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \phi_k(x),$$

函数 $w(x)$ 范数的平方表示为

$$\|w(x)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2.$$

由于 $\phi(x), \psi(x) \in H^2([-1, 1]) \cap H_0^1([-1, 1])$, 并且 $f(x, t) \in C^3([0, T], H_0^1([-1, 1]))$, 于是方程中的 $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$ 、 $f(x, t)$ 可按上述方法展开

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \phi_k(x), \quad (2)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \phi_k(x), \quad (3)$$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \phi_k(x). \quad (4)$$

此外, 假设解 $u(x, t)$ 可以展开为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \phi_k(x), \quad (5)$$

将(2)~(5)式代入方程(1), 对于每个 k , 都能得到一个方程

$$D_t^{1+\alpha} u_k(t) \phi_k(x) + D_t u_k(t) \phi_k(x) = u_k(t) \phi_k''(x) + f_k(t) \phi_k(x), \quad k=1, 2, \dots, +\infty. \quad (6)$$

2.1.2. 分解方程

由分离变量法, 展开后的第 k 个方程可以拆分成只含时间变量 t 和只含空间变量 x 的两个方程

$$\begin{aligned} D_t^{1+\alpha} u_k(t) + D_t u_k(t) + \lambda_k u_k(t) &= f_k(t), \\ \phi_k''(x) &= -\lambda_k \phi_k(x). \end{aligned}$$

把(2)~(5)代入方程(1)的边界条件, 得到相应第 k 个方程的边界条件

$$\begin{aligned} u_k(0) &= a_k, \\ D_t u_k(0) &= b_k, \end{aligned}$$

于是可以得到分解方程

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{1+\alpha} u_k(t) + D_t u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), & t \in (0, T], \quad k = 1, 2, \dots, +\infty, \\ u_k(0) = a_k, \quad D_t u_k(0) = b_k. \end{cases} \quad (7)$$

2.2. Laplace 变换求解过程

2.2.1. 解的拆分与方程齐次化

注意到方程(7)的初始条件都是非齐次的, 直接进行 Laplace 变换较为复杂, 可以把解 $u_k(t)$ 拆分成

$$u_k(t) = v_k(t) + a_k + tb_k, \quad (8)$$

其中 $v_k(t)$ 是使初始条件为 0 的解。将(8)式代入方程(7), 并令 $F_k(t) = f_k(t) - t\lambda_k b_k$, 方程转化为

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{1+\alpha} v_k(t) + D_t v_k(t) + \lambda_k v_k(t) = F_k(t) - (b_k + \lambda_k a_k), & t \in (0, T], \\ v_k(0) = 0, \quad D_t v_k(0) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

这样就得到了可用于 Laplace 变换的方程。

2.2.2. 方程的 Laplace 变换和逆变换

对整个方程进行 Laplace 变换, 由变换的线性性质和导数的变换公式

$$s^{1+\alpha} \tilde{v}_k(s) + s \tilde{v}_k(s) + \lambda_k \tilde{v}_k(s) = \tilde{F}_k(s) - s^{-1}(\lambda_k a_k + b_k), \quad (10)$$

其中

$$\tilde{w}(s) = \mathcal{L}[w(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} w(t) dt.$$

整理得到

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(s) &= (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} [\tilde{F}_k(s) - s^{-1}(\lambda_k a_k + b_k)] \\ &= (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} \tilde{F}_k(s) - (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} s^{-1}(\lambda_k a_k + b_k). \end{aligned} \quad (11)$$

先对(11)式的第一部分进行 Laplace 逆变换, 若设

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}_k(t)] = (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1},$$

则有

$$\mathcal{L}^{-1}[(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} \tilde{F}_k(s)] = \int_0^t \mathcal{G}(t-s) F_k(s) ds.$$

再对第二部分进行 Laplace 逆变换, 设

$$\mathcal{L}[\mathcal{E}_k(t)] = (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} s^{-1},$$

由于常数 $(\lambda_k a_k + b_k)$ 不改变 Laplace 逆变换的值, 即

$$\mathcal{L}^{-1}[(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} s^{-1} \cdot (\lambda_k a_k + b_k)] = \mathcal{E}_k(t)(\lambda_k a_k + b_k),$$

于是得到解 $v_k(t)$ 的表达式

$$v_k(t) = (-\lambda_k a_k - b_k) \mathcal{E}_k(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) F_k(s) ds.$$

解 $u_k(t)$ 只需在解 $v_k(t)$ 前面加上初值条件, 即

$$u_k(t) = a_k + tb_k + (-\lambda_k a_k - b_k) \mathcal{E}_k(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) F_k(s) ds. \quad (12)$$

将(12)式代入(5)式, 可以得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x) + t \sum_{k=1}^{\infty} b_k \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k a_k + b_k) \mathcal{E}_k(t) \phi_k(x) \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k(t-s) F_k(s) \phi_k(x) ds, \end{aligned}$$

再代入(2)~(4)式, 即可得到解 $u(x, t)$ 的一个表达式

$$u(x, t) = \phi(x) + t\psi(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k a_k \mathcal{E}_k(t) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \mathcal{E}_k(t) \phi_k(x) + \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(t-s) F_k(s) \phi_k(x) ds, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k \right)^{-1} s^{-1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta, \delta}} e^{st} \left(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k \right)^{-1} s^{-1} ds, \\ \mathcal{G}_k(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta, \delta}} e^{st} \left(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k \right)^{-1} ds, \end{aligned}$$

积分区域为

$$\Gamma_{\theta, \delta} = \{s \in \mathbb{C} : |s| = \delta, |\arg s| \leq \theta\} \cup \{s \in \mathbb{C} : s = \rho e^{\pm i\theta}, \rho \geq \delta\}, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{1+\alpha} \right), \delta > 0.$$

2.3. 奇异性定量估计

2.3.1. 核函数上界的估计

(13)式中较难处理的是 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$ 这两项, 所以需要先对这两项值的上界进行估计。

引理 2.1: 对于 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$, 下面的估计对所有的 $t \in (0, T], m \geq 0$ 成立

$$\left| \frac{d^m \mathcal{E}_k(t)}{dt^m} \right| \leq C t^{1+\alpha-m}, \quad (14)$$

$$\left| \frac{d^m \mathcal{G}_k(t)}{dt^m} \right| \leq C t^{\alpha-m}, \quad (15)$$

其中 C 是与 t 和 k 均无关的正常数。

证明: 先处理 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$ 共有的部分, 通过因式分解可以得到

$$\left| \left(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k \right)^{-1} \right| = |s|^{-(1+\alpha)} \left| 1 + s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)} \right|^{-1}, \quad (16)$$

根据积分区域 θ 的值, 复数 s 主幅角的绝对值为

$$|\arg(s)| \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{1+\alpha} \right).$$

由复数主幅角的运算法则

$$\begin{aligned} \left| \arg(s^{-\alpha}) \right| &= |-\alpha \arg(s)| = \alpha |\arg(s)| = \alpha \theta \in \left(\alpha \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha \pi}{1+\alpha} \right), \\ \left| \arg(s^{-(1+\alpha)}) \right| &= (1+\alpha) |\arg(s)| = (1+\alpha) \theta \in \left((1+\alpha) \frac{\pi}{2}, \pi \right). \end{aligned}$$

复数的加减与向量类似, 角度介于二者的最大最小值之间

$$\min \left\{ \left| \arg(s^{-\alpha}) \right|, \left| \arg(s^{-(1+\alpha)}) \right| \right\} \leq \left| \arg(s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)}) \right| \leq \max \left\{ \left| \arg(s^{-\alpha}) \right|, \left| \arg(s^{-(1+\alpha)}) \right| \right\},$$

代入二者主幅角的范围可以得到

$$\alpha \frac{\pi}{2} < \alpha \theta \leq \left| \arg(s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)}) \right| \leq (1+\alpha) \theta < \pi.$$

令 $1 + s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)} = 1 + z$, 其中复数 $z = re^{i\phi} = r \cos \phi + ir \sin \phi$, 求 $1 + z$ 模长的平方, 并令结果为 $f(r)$, 即

$$|1 + z|^2 = (1 + r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2 = 1 + 2r \cos \phi + r^2 = f(r),$$

对 $f(r)$ 求导, 令其导数为 0, 找到使模长最小的 r

$$f'(r) = 2 \cos \phi + 2r = 0,$$

求得 $r = -\cos \phi$, 带回 $f(r)$ 可得

$$f(-\cos \phi) = 1 - 2 \cos^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = \sin^2 \phi = |1 + z|_{\min}^2,$$

即最小模长为 $|1 + z|_{\min} = \sin \phi$ 。复数 z 的主幅角为 ϕ , 它的范围为

$$|\arg(z)| = \left| \arg(s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)}) \right| = \phi \in \left(\alpha \frac{\pi}{2}, \pi \right) \subseteq (0, \pi).$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 无论 α 取何值, 只要给定 α 的值, 一定能取到 $\sin \phi$ 的最小值, 令其为 $(\sin \phi)_{\min} = C_\theta$, 则有

$$\begin{aligned} |1 + z|_{\min} &= |1 + s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)}|_{\min} \geq (\sin \phi)_{\min} = C_\theta, \\ |1 + s^{-\alpha} + \lambda_k s^{-(1+\alpha)}|^{-1} &\leq \frac{1}{C_\theta} = C, \end{aligned}$$

于是得到(16)式的上限估计

$$\left| (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} \right| \leq C |s|^{-(1+\alpha)}. \quad (17)$$

接下来估计 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$ 导数的值, 由 Laplace 变换的导数公式

$$\frac{d^m \mathcal{E}_k(t)}{dt^m} = \mathcal{L}^{-1} \left[s^m \cdot (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} \dots^{-1} \right],$$

再由 Laplace 逆变换公式

$$\left| \frac{d^m \mathcal{E}_k(t)}{dt^m} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta, \delta}} e^{st} (s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} s^{m-1} ds \right|, \quad (18)$$

令 $s = x + yi$, 则 $e^{st} = e^{(x+yi)t} = e^{xt} \cdot e^{iyt}$, 其模长为

$$|e^{st}| = |e^{xt} \cdot e^{iyt}| = |e^{xt}| \cdot |e^{iyt}| = |e^{xt}| = e^{Re(s)t},$$

由三角不等式

$$\left| \frac{d^m \mathcal{E}_k(t)}{dt^m} \right| \leq C \int_{\Gamma_{\theta, \delta}} e^{Re(s)t} |s|^{-(1+\alpha)} s^{m-1} |ds| = C \int_{\Gamma_{\theta, \delta}} e^{Re(s)t} |s|^{m-\alpha-2} |ds|,$$

积分路径 $\Gamma_{\theta,\delta}$ 要避开 $(s^{1+\alpha} + s + \lambda_k)^{-1} s^{m-1}$ 的奇点, 可以分为圆弧和射线两部分来计算。其中圆弧部分角度 $|\arg(s)| \leq \theta$, 令 $s = \frac{1}{t} e^{iz} = \frac{1}{t} (\cos z + i \sin z)$, s 的模长固定为 $|s| = \delta = \frac{1}{t}$, 则该部分的积分为

$$\begin{aligned} C \int_{\Gamma_{\theta,\delta}} e^{Re(s)t} |s|^{m-\alpha-2} |ds| &= C \int_{-\theta}^{\theta} e^{\frac{1}{t} \cos z} \left| \frac{1}{t} \right|^{m-\alpha-2} \frac{1}{t} |\cos z + i \sin z| dz \\ &= C t^{\alpha+1-m} \int_{-\theta}^{\theta} e^{\cos z} dz \\ &= C t^{\alpha+1-m}, \end{aligned} \quad (19)$$

射线部分取 $s = \rho e^{\pm i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin(\pm \theta))$, 其中 $\rho \geq s = \frac{1}{t}$, 则该部分积分为

$$C \int_{\Gamma_{\theta,\delta}} e^{Re(s)t} |s|^{m-\alpha-2} |ds| = C \int_{1/t}^{+\infty} e^{\rho t \cos \theta} \rho^{m-\alpha-2} d\rho, \quad (20)$$

在(20)式中令 $x = \rho t \in (1, +\infty)$, 积分转化为

$$\begin{aligned} C \int_{1/t}^{+\infty} e^{\rho t \cos \theta} \rho^{m-\alpha-2} d\rho &= \int_1^{+\infty} e^{x \cos \theta} \left(\frac{x}{t} \right)^{m-\alpha-2} \frac{1}{t} dx \\ &= t^{\alpha+1-m} \int_1^{+\infty} e^{x \cos \theta} x^{m-\alpha-2} dx \\ &= C t^{\alpha+1-m}, \end{aligned} \quad (21)$$

综合(19)和(21)两式积分的上限估算结果, 可以得到 $\mathcal{E}_k(t)$ 导数的上限估计

$$\left| \frac{d^m \mathcal{E}_k(t)}{dt^m} \right| \leq C t^{1+\alpha-m},$$

再由 $\mathcal{E}_k(t)$ 和 $\mathcal{G}_k(t)$ 的特殊关系

$$\left| \frac{d^m \mathcal{G}_k(t)}{dt^m} \right| = \left| \frac{d^{m+1} \mathcal{E}_k(t)}{dt^{m+1}} \right| \leq C t^{\alpha-m},$$

其中 C 是与 t 和 k 无关的正常数。

2.3.2. 解的时间导数估计

根据引理 2.1 的证明结果, 可以证明解 $u(x, t)$ 在初始时刻的奇异性。

定理 2.1 设 $\phi(x), \psi(x) \in H^2([-1, 1]) \cap H_0^1([-1, 1])$, 且 $f(x, t) \in C^3([0, T], H_0^1([-1, 1]))$, 则存在一个正的常数 C , 使得

$$\left\| \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} \right\|_2 \leq C (1 + t^{1+\alpha-m}), \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad t \in (0, T]. \quad (22)$$

证明: 根据三角不等式, 当 $m = 0$ 时, (13)式的范数估计为

$$\|u\|_2 \leq \|\phi\|_2 + t\|\psi\|_2 + |\mathcal{E}(t)| \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2} + |\mathcal{E}(t)| \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) F_k(s) ds \right)^2},$$

前两项可由简单的估计得到

$$\begin{aligned} \|\phi\|_2 &\leq \|\phi\|_{H^2}, \\ t\|\psi\|_2 &\leq t\|\psi\|_{H^2} \leq (1 + t^{1+\alpha})\|\psi\|_{H^2}, \end{aligned}$$

第三和第四项可由展开式和分离变量法计算得到, 由引理 2.1 可得

$$|\mathcal{E}_k(t)| \leq Ct^{1+\alpha},$$

再由分离变量法和(2)式

$$\begin{aligned}\phi_k''(x) &= -\lambda_k \phi_k(x), \\ \phi''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \phi_k(x),\end{aligned}$$

得到第三项的估计

$$|\mathcal{E}(t)| \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2} \leq Ct^{1+\alpha} \|\phi''(x)\|_2 \leq Ct^{1+\alpha} \|\phi''(x)\|_{H^2},$$

同理, 第四项的估计为

$$|\mathcal{E}(t)| \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2} \leq Ct^{1+\alpha} \|\psi(x)\|_2 \leq Ct^{1+\alpha} \|\psi(x)\|_{H^2}.$$

第五项可由三角不等式拆成两部分来计算

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) F_k(s) ds \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) s ds \right)^2 \lambda_k^2 b_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) f_k(s) ds \right)^2},$$

其中, 第一部分由引理 2.1 可知 $\mathcal{G}_k(t-s) \leq C(t-s)^\alpha$, 再令 $t-s=x$, 对积分使用区间再现公式

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) s ds \right)^2 \lambda_k^2 b_k^2} &\leq C \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t (t-s)^\alpha s ds \right)^2 \lambda_k^2 b_k^2} \\ &= C \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t x^\alpha (t-x) dx \right)^2 \lambda_k^2 b_k^2} \\ &= Ct^{\alpha+2} \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^2},\end{aligned}\tag{23}$$

由(3)式和分离变量法

$$\psi''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k \psi_k(x),$$

代入(23)式可得

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) s ds \right)^2 \lambda_k^2 b_k^2} \leq Ct^{\alpha+2} \|\psi(x)\|_{H^2}.$$

第二部分可由 Holder 不等式得到

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k(t-s) f_k(s) ds \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k^2(t-s) ds \int_0^t f_k^2(s) ds \right)},$$

由引理 2.1 和(4)式

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathcal{G}_k^2(t-s) ds \int_0^t f_k^2(s) ds \right)} &\leq C \sqrt{\int_0^t (t-s)^{2\alpha} ds \left(\int_0^t \|f(x,s)\|_2^2 ds \right)} \\ &\leq Ct^{\alpha+\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^t \|f(x,s)\|_2^2 ds} \\ &\leq Ct^{\alpha+1} \|f(x,s)\|_{C((0,T], H_0^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

最终得到 $m=0$ 时的估计值

$$\|u\|_2 \leq C(1+t^{1+\alpha}) \left[\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{C^1((0,T],H_0^1(\Omega))} \right]. \quad (24)$$

接下来再证明 $m=1$ 时的情况, 对 $u(x,t)$ 求导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) &= \psi(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k a_k \mathcal{E}'_k(t) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \mathcal{E}'_k(t) \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(t) f_k(0) \phi_k(x) \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(s) f'_k(t-s) \phi_k(x) ds - \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k \mathcal{G}_k(s) \phi_k(x) ds, \end{aligned}$$

与 $m=0$ 时同理, 前几项可由引理 2.1 和(2) (3)式得到

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \lambda_k \mathcal{E}'_k(t) \phi_k(x) \right\|_2 &\leq C t^\alpha \|\phi_{xx}\|_2, \\ \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \mathcal{E}'_k(t) \phi_k(x) \right\|_2 &\leq C t^\alpha \|\psi\|_2, \\ \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(t) f_k(0) \phi_k(x) \right\|_2 &\leq C t^\alpha \|f(x,0)\|_2. \end{aligned}$$

另外, 最后两项由范数相关不等式可得

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(s) f'_k(t-s) \phi_k(x) ds \right\|_2 &\leq C t^{\alpha+1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} f(x,s) \right\|_{C^1((0,T],H_0^1(\Omega))}, \\ \left\| \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k \mathcal{G}_k(s) \phi_k(x) ds \right\|_2 &\leq C \int_0^t s^\alpha ds \|\phi_{xx}\|_2 \leq C t^{1+\alpha} \|\psi_{xx}\|_2. \end{aligned}$$

最终得到 $m=1$ 时的估计值

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right\|_2 \leq C(1+t^\alpha) \left[\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{C^1((0,T],H_0^1(\Omega))} \right]. \quad (25)$$

类似地, 可以求得 $m=2$ 和 $m=3$ 时 $u(x,t)$ 导数的表达式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}'_k(t) f_k(0) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k a_k \mathcal{E}''_k(t) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \mathcal{E}''_k(t) \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(t) f'_k(0) \phi_k(x) \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(s) f''_k(t-s) \phi_k(x) ds - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k \mathcal{G}_k(y) \phi_k(x), \\ \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}''_k(t) f_k(0) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k a_k \mathcal{E}^{(3)}_k(t) \phi_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \mathcal{E}^{(3)}_k(t) \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}'_k(t) f'_k(0) \phi_k(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(t) f''_k(0) \phi_k(x) + t \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k(s) f^{(3)}_k(t-s) \phi_k(x) ds - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k \mathcal{G}'_k(y) \phi_k(x). \end{aligned}$$

并且可以仿照以上方法分别估算出二者范数的上界

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \right\|_2 \leq C(1+t^{\alpha-1}) \left[\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{C^3((0,T],H_0^1(\Omega))} \right], \quad (26)$$

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x,t) \right\|_2 \leq C(1+t^{\alpha-2}) \left[\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{C^3((0,T],H_0^1(\Omega))} \right], \quad (27)$$

综合(24)~(27)式, 可以得到定理 2.1 的结论, 即

$$\left\| \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} \right\|_2 \leq C(1+t^{1+\alpha-m}), \quad m=0, 1, 2, 3, \quad t \in (0, T].$$

2.4. 解在初始时刻的奇异性对数值格式的影响

由定理 2.1 可以看出, 解 $u(x, t)$ 的时间导数被不等号的右端项控制。

当 $m=2$ 时, 有 $\|\partial_{tt} u\|_2 \leq Ct^{\alpha-1}$, 又因为 $0 < \alpha < 1$, 右端项在 $t \rightarrow 0$ 时发散; 当 $m=3$ 时, 有 $\|\partial_{ttt} u\|_2 \leq Ct^{\alpha-2}$, 右端项发散速度更快。

即使初值 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 和源项 $f(x, t)$ 光滑, 解的高阶时间导数仍在 $t=0$ 处无界, 这是由分数阶导数的非局部性和记忆效应导致的结果, 所以需要调整初始时刻的时间网格, 以提高数值格式的稳定性。

3. 结论

本文运用 Laplace 变换法, 深入研究了时间分数阶电报方程的解在初始时刻附近的奇异性。

首先对方程进行分解和变换求解, 将解的表达式表示为一系列积分算子 $\mathcal{E}_k(t)$ 与 $\mathcal{G}_k(t)$ 的组合形式。然后分析这些算子及其各阶时间导数的渐近性质, 严格证明了解 $u(x, t)$ 及其时间导数在 $t \rightarrow 0^+$ 时的奇异性。此外, 本文研究的时间分数阶电报方程在时间方向上包含分数阶导数算子 $D_t^{1+\alpha}$ 与一阶导数项, 这区别于经典的时间分数阶扩散方程。在初始奇异性方面, 时间分数阶扩散方程解的奇异性阶次已被证明为 $t^{\alpha-m}$, 而本文定理 2.1 证明电报方程解的奇异性阶次为 $t^{1+\alpha-m}$ 。这一对比表明, 方程解的初始奇异性主要由最高阶时间分数阶导数主导, 低阶导数项并不改变奇异性的主导阶次。同时, 所获得的精确奇异性估计为时间网格的划分提供了依据, 即通过加密初始时刻附近的时间网格, 提升数值格式的收敛速率。

基金项目

本工作由国家自然科学基金项目(编号: 12201299)和江苏省自然科学基金项目(编号: BK20220870)资助。

参考文献

- [1] Aoki, Y., Sen, M. and Paolucci, S. (2007) Approximation of Transient Temperatures in Complex Geometries Using Fractional Derivatives. *Heat and Mass Transfer*, **44**, 771-777. <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0305-0>
- [2] Compte, A. and Metzler, R. (1997) The Generalized Cattaneo Equation for the Description of Anomalous Transport Processes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **30**, 7277-7289. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/21/006>
- [3] Madhukar, A., Park, Y., Kim, W., Sunaryanto, H.J., Berlin, R., Chamorro, L.P., et al. (2019) Heat Conduction in Porcine Muscle and Blood: Experiments and Time-Fractional Telegraph Equation Model. *Journal of The Royal Society Interface*, **16**, Article ID: 20190726. <https://doi.org/10.1098/rsif.2019.0726>
- [4] Schneider, W.R. and Wyss, W. (1989) Fractional Diffusion and Wave Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **30**, 134-144. <https://doi.org/10.1063/1.528578>
- [5] Torii, S. and Yang, W. (2005) Heat Transfer Mechanisms in Thin Film with Laser Heat Source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **48**, 537-544. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.09.011>
- [6] Zorica, D. and Cveticanin, S. (2018) Fractional Telegrapher's Equation as a Consequence of Cattaneo's Heat Conduction Law Generalization. *Theoretical and Applied Mechanics*, **45**, 35-51. <https://doi.org/10.2298/tam171211003z>
- [7] Das, S., Vishal, K., Gupta, P.K. and Yildirim, A. (2011) An Approximate Analytical Solution of Time-Fractional Telegraph Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 7405-7411. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.030>
- [8] Chen, J., Liu, F. and Anh, V. (2008) Analytical Solution for the Time-Fractional Telegraph Equation by the Method of Separating Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 1364-1377. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.023>

- [9] Ou, C., Wang, Z. and Vong, S. (2024) A Second-Order Fitted Scheme Combined with Time Two-Grid Technique for Two-Dimensional Nonlinear Time Fractional Telegraph Equations Involving Initial Singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **448**, Article ID: 115936. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.115936>
- [10] Qi, H. and Jiang, X. (2011) Solutions of the Space-Time Fractional Cattaneo Diffusion Equation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **390**, 1876-1883. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.02.010>
- [11] Akram, T., Abbas, M., Ismail, A.I., Ali, N.H.M. and Baleanu, D. (2019) Extended Cubic B-Splines in the Numerical Solution of Time Fractional Telegraph Equation. *Advances in Difference Equations*, **2019**, Article No. 365. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2296-9>
- [12] Alikhanov, A.A., Asl, M.S., Huang, C. and Apekov, A.M. (2024) Temporal Second-Order Difference Schemes for the Nonlinear Time-Fractional Mixed Sub-Diffusion and Diffusion-Wave Equation with Delay. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **464**, Article ID: 134194. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134194>
- [13] Chen, Y., Gu, Q., Li, Q. and Huang, Y. (2022) A Two-Grid Finite Element Approximation for Nonlinear Time Fractional Two-Term Mixed Sub-Diffusion and Diffusion Wave Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **40**, 936-954. <https://doi.org/10.4208/jcm.2104-m2021-0332>
- [14] Du, R. and Sun, Z. (2021) Temporal Second-Order Difference Methods for Solving Multi-Term Time Fractional Mixed Diffusion and Wave Equations. *Numerical Algorithms*, **88**, 191-226. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-01037-x>
- [15] Kong, W. and Huang, Z. (2022) Artificial Boundary Conditions for Time-Fractional Telegraph Equation. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, **15**, 360-386. <https://doi.org/10.4208/nmtma.0a-2021-0067>
- [16] Kumar, K., Pandey, R.K. and Yadav, S. (2019) Finite Difference Scheme for a Fractional Telegraph Equation with Generalized Fractional Derivative Terms. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **535**, Article ID: 122271. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122271>
- [17] Liang, Y., Yao, Z. and Wang, Z. (2019) Fast High Order Difference Schemes for the Time Fractional Telegraph Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **36**, 154-172. <https://doi.org/10.1002/num.22423>
- [18] Ou, C., Cen, D., Wang, Z. and Vong, S. (2024) A Second-Order Fitted Scheme for Time Fractional Telegraph Equations Involving Weak Singularity. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **27**, 3527-3551. <https://doi.org/10.1007/s13540-024-00355-4>
- [19] Shi, Y., Zhao, Y., Wang, F. and Liu, F. (2021) Novel Superconvergence Analysis of Anisotropic Triangular FEM for a Multi-Term Time-Fractional Mixed Sub-diffusion and Diffusion-Wave Equation with Variable Coefficients. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **38**, 1345-1366. <https://doi.org/10.1002/num.22838>
- [20] Vong, S.W., Pang, H.K. and Jin, X.Q. (2012) A High-Order Difference Scheme for the Generalized Cattaneo Equation. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, **2**, 170-184. <https://doi.org/10.4208/eajam.110312.240412a>
- [21] Yang, X., Qiu, W., Zhang, H. and Tang, L. (2021) An Efficient Alternating Direction Implicit Finite Difference Scheme for the Three-Dimensional Time-Fractional Telegraph Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **102**, 233-247. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.10.021>
- [22] Zhao, X. and Sun, Z. (2014) Compact Crank-Nicolson Schemes for a Class of Fractional Cattaneo Equation in Inhomogeneous Medium. *Journal of Scientific Computing*, **62**, 747-771. <https://doi.org/10.1007/s10915-014-9874-5>
- [23] Sun, H., Chen, Y. and Zhao, X. (2023) Error Estimate of the Nonuniform L1 Type Formula for the Time Fractional Diffusion-Wave Equation. *Communications in Mathematical Sciences*, **21**, 1707-1725. <https://doi.org/10.4310/cms.2023.v21.n6.a12>
- [24] Xu, X., Chen, Y. and Huang, J. (2024) L1-Type Finite Element Method for Time-Fractional Diffusion-Wave Equations on Nonuniform Grids. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **40**, e23150. <https://doi.org/10.1002/num.23150>