

考虑通胀风险下的最优投资组合 - 消费问题

罗佳柔

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年12月27日; 录用日期: 2026年1月21日; 发布日期: 2026年1月29日

摘要

本文研究通胀风险下带有随机收入的最优投资组合与消费问题。在考虑投资者随机寿命、劳动收入以及通货膨胀影响的框架下, 构建包含无风险资产、股票和通胀指数债券的金融市场模型。投资者目标是在生命期内最大化其消费、遗产及最终财富的期望效用, 同时可通过购买人寿保险对冲死亡风险。通过引入等价鞅测度与状态价格密度, 将动态优化问题转化为静态优化问题, 并利用CRRA (常相对风险厌恶) 效用函数的性质, 推导出最优消费、人寿保险保费及投资策略的显式解。结果表明, 最优投资策略由对冲通胀的资产配置、收入风险的调整以及投资者的风险偏好共同决定。本研究为具有随机收入和寿命不确定的投资者在通胀环境下的资产配置与消费规划提供了理论依据与决策参考。

关键词

通胀风险, 随机收入, 最优投资组合, 鞅方法, 人寿保险

Optimal Portfolio-Consumption Problem Considering Inflation Risk

Jiarou Luo

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: December 27, 2025; accepted: January 21, 2026; published: January 29, 2026

Abstract

This paper studies the optimal portfolio and consumption problem with stochastic income under inflation risk. Within a framework that accounts for investors' stochastic lifetime, labor income, and the impact of inflation, a financial market model is constructed, consisting of a risk-free asset, stocks, and inflation-indexed bonds. The investor's objective is to maximize the expected utility of consumption, bequest, and terminal wealth over their lifetime, while also hedging mortality risk through

the purchase of life insurance. By introducing an equivalent martingale measure and a state price density, the dynamic optimization problem is transformed into a static optimization problem. Leveraging the properties of the CRRA (Constant Relative Risk Aversion) utility function, explicit solutions for the optimal consumption, life insurance premium, and investment strategies are derived. The results indicate that the optimal investment strategy is jointly determined by inflation-hedging asset allocation, adjustments for income risk, and the investor's risk preference. This study provides a theoretical foundation and decision-making reference for asset allocation and consumption planning for investors with stochastic income and uncertain lifetime in an inflationary environment.

Keywords

Inflation Risk, Stochastic Income, Optimal Portfolio, Martingale Method, Life Insurance

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着我国经济的快速发展，越来越多的家庭出现了数额较大的家庭资产，这些资产需要进行保值增值。

许多研究者已经用不同的模型探索了最优投资问题。Black 和 Scholes [1]提出经典的 Black-Scholes 模型用于分析期权定价问题。1975 年，Merton [2]将该模型扩展为 Black-Scholes-Merton 模型，并首次提出了在 HARA (双曲绝对对风险厌恶)效用下的投资组合选择问题的显式解决方案。这些模型都是在完备市场的假设下进行的，但一些实证研究表明，实际的金融市场受其不确定因素的影响是不完备的，即市场中不是所有交易资产都可以被标的资产复制。连续的金融市场模型不能解释金融时间序列的某些行为，如跳跃、不对称和重型尾部等，为了解决这个问题，2001 年，Bellamy [3]引入跳扩散过程，研究了不完备市场下的投资组合选择问题。一些研究者用 Lévy 过程对股票价格进行建模，将风险模型推广到更符合实际的金融市场情况。2005 年，Corcuera 等[4]通过添加特殊的功率跳跃资产对 Lévy 市场进行扩展，并证明了扩展后的市场是完备的。

此外，原始的 Black-Scholes-Merton 模型中的参数都是常数，不能适用于现实情况中可能出现经济情况长期不确定或者宏观经济条件发生多次结构性变化的市场。为了模拟这一点，1989 年，Hamilton [5]率先使用了制度转换模型，模型中参数的转换是由 Markov 链来描述，每一组参数都只在相应的经济状态下使用，这意味着参数会随着经济环境的变化而变化。Liu [6]研究了连续时间制度转换模型中具有比例交易成本的最优投资和消费问题。

最优投资问题的另一个关键方面是效用函数的选择。不同的效用函数反映了不同投资者的不同风险规避程度。HARA 效用由于其可以在一定条件下可以分别收敛于指数效用以及对数效用的良好性质而得到了广泛的应用。Grasselli [7]研究了利率遵循 CIR 动态时，HARA 效用下最优投资组合的收敛结果。

通胀风险作为一种基础性风险，会导致资产价值与投资收益的缩水，是投资者必须面对的重要因素。Campbell 和 Viceira [8]指出，通货膨胀会加剧股票投资的风险水平。冯蕾和梁治安[9]也强调，在中长期投资中纳入通胀风险的分析十分必要。因此，不少学者围绕通胀风险背景下的最优资产配置问题展开研究。例如，Fischer [10]探讨了家庭资产配置中对通胀指数债券的需求，并论证了引入该类债券的重要性。Brennan 和 Xia [11]则基于通胀环境，利用鞅方法求解了幂效用函数下的动态投资组合优化显式解。Gong

和 Li [12] 同样针对通胀风险情形探讨了最优投资决策。

本文基于以上的研究, 创新性地将随机工资收入加入模型中, 使随机工资收入遵从随机微分方程, 在考虑投资者随机寿命、劳动收入以及通货膨胀影响的框架下, 构建包含无风险资产、股票和通胀指数债券的金融市场模型。投资者目标是在生命期内最大化其消费、遗产及最终财富的期望效用, 同时可通过购买人寿保险对冲死亡风险。通过引入等价鞅测度与状态价格密度, 将动态优化问题转化为静态优化问题, 并利用 CRRA (常相对风险厌恶) 效用函数的性质, 推导出最优消费、人寿保险保费及投资策略的显式解。结果表明, 最优投资策略由对冲通胀的资产配置、收入风险的调整以及投资者的风险偏好共同决定。文章结构如下, 第二节, 介绍金融市场, 包括无风险资产, 风险资产以及通胀风险债券的随机微分方程。第三节主要为构建最优投资组合问题期望效用最大化模型并求解。第四节通过数值分析讨论不同参数下对最优投资组合的影响。最后第五节, 对文章进行总结性陈述。

2. 金融市场模型

假设在金融市场中共有三类资产可以用于投资, 分别是: 一个无风险资产, 一个为股票, 另一个为通胀指数债券。 $B = B_1(t), B_2(t)$ 为完全概率空间 (Ω, F, P) 上的标准二维布朗运动, 现在假设两个布朗运动满足 $dB_1(t)dB_2(t) = \rho dt$, $\rho \in [-1, 1]$, ρ 代表相关系数。 $B_1(t)$ 驱动股票价格, $B_2(t)$ 驱动通胀指数债券。 $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是由布朗运动生成的过滤。无风险资产的价格过程满足下述随机微分方程

$$\frac{dX_0(t)}{X_0(t)} = r(t)dt. \quad (1)$$

其中 $r(t)$ 表示无风险资产的利率, 且 $X_0(0) = 1$ 。该过程是 $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测过程。股票的价格过程满足:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_1(t)dt + \sigma_1(t)dB_1(t). \quad (2)$$

其中 $\mu_1(t), \sigma_1(t)$ 分别为股票平均收益率和波动率, 均为 $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测过程, $S(0) = s > 0$ 。价格指数过程满足:

$$\frac{dX_1(t)}{X_1(t)} = \mu_2(t)dt + \sigma_2(t)dB_2(t). \quad (3)$$

其中 $\mu_2(t)$, 表示在 t 时刻的预期的通胀率, $\sigma_2(t)$ 大于零表示通货膨胀波动率, 也为 $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测过程。

所以可以得到通胀指数债券满足:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = r_1(t)dt + \frac{dX_1(t)}{X_1(t)} = (r_1(t) + \mu_2(t))dt + \sigma_2(t)dB_2(t). \quad (4)$$

$r_1(t)$ 表示考虑了通货膨胀风险后的实际利率, 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测过程, $r_1(t) + \mu_2(t)$ 为通胀指数债券的预期收益率。

下面建立人寿保险的市场模型假设一个有固定工资收入的投资者, 他的寿命是一个随机变量 τ 。假设投资者的瞬时死亡率 $\lambda(t)$ 由如下定义:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq \tau < t + \Delta t | \tau \geq t)}{\Delta t}. \quad (5)$$

因此可以定义条件概率生存函数 ($s > t$):

$$F(s, t) = P(\tau > s | \tau > t) = \exp \left[- \int_t^s \lambda(u) du \right]. \quad (6)$$

随后我们定义投资者在 s 时刻瞬时死亡的条件概率密度函数 $f(t)$ ：

$$f(t) = \lambda(s) \exp \left[-\int_t^s \lambda(u) du \right]. \quad (7)$$

假设工资收入者在时间 t 时支付费率为 $p(t)$ 的人寿保险保费。一旦此人死亡那么保险公司将支付 $\frac{p(t)}{\Psi(t)}$ 给受益人，其中 $\Psi(t)$ 是保险保费的赔付率。人寿保险的合同在此人死亡或者退休时终止。在他死亡时他留给受益人的总财富为 $D(t) = W(t) + \frac{p(t)}{\Psi(t)}$ ， $W(t)$ 代表时间 t 时金融市场的财富过程。

同时假设投资者在退休或意外死亡时间即 $t \in [0, \tau \wedge T]$ 时获得的收入 $L(t)$ 是随机的，满足如下的几何布朗运动：

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L(t) dt + \sigma_{L_1} dB_1(t) + \sigma_{L_2} dB_2(t). \quad (8)$$

且假设收入的一部分被消费，剩余的部分则按照策略分配到股票和债券中。假设 $c(t) \geq 0$ 是 $t \in [0, \tau \wedge T]$ 时刻的消费率。

假设 $\pi_1(t)$ 是财富过程 $W(t)$ 中用于投资于股票的部分， $\pi_2(t)$ 是投资于通胀指数债券的部分，剩余的部分 $(W(t) - \pi_1(t) - \pi_2(t))$ 投资于无风险资产。且工资收入者在 t 时刻支付保费为 $p(t)$ 。所以可以得到财富过程的随机微分方程：

$$\begin{aligned} dW(t) = & (W(t) - \pi_1(t) - \pi_2(t)) \frac{dX_0(t)}{X_0(t)} + \pi_1(t) \frac{dS(t)}{S(t)} \\ & + \pi_2(t) \frac{dI(t)}{I(t)} + [L(t) - c(t) - p(t)] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

将对应的随机微分方程代入可以得到

$$\begin{aligned} dW(t) = & (W(t) - \pi_1(t) - \pi_2(t)) r(t) dt + \pi_1(t) (\mu_1(t) dt + \sigma_1(t) dB_1(t)) \\ & + \pi_2(t) (\mu_2(t) dt + \sigma_2(t) dB_2(t)) + (L(t) - c(t) - p(t)) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

初始条件为：

$$W(0) = W_0 > 0.$$

下面利用鞅方法来解决最优值的问题，首先引入等价鞅测度，表示 $\mathbb{Q}$ 等价 $\mathbb{P}$ 。

对于本文求解的问题，定义拉东-尼克迪姆导数如下：

$$R(t) = \exp \left[\int_0^t \theta_1(u) dB_1(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_1^2(u) du + \int_0^t \theta_2(u) dB_2(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_2^2(u) du \right]. \quad (11)$$

所以根据吉尔萨诺夫定理，可以得到：

$$\begin{aligned} dB_1^{\mathbb{Q}}(t) &= dB_1^{\mathbb{P}}(t) - \theta_1(t) dt. \\ dB_2^{\mathbb{Q}}(t) &= dB_2^{\mathbb{P}}(t) - \theta_2(t) dt. \end{aligned}$$

因此可以得到新的概率测度 $\mathbb{Q}$ 下的财富过程：

$$\begin{aligned} dW(t) = & [W(t)(r(t)) + L(t) - c(t) - p(t)] dt \\ & + \pi_1(t) \sigma_1(t) dB_1^{\mathbb{Q}}(t) + \pi_2(t) \sigma_2(t) dB_2^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测过程, 满足如下形式:

$$\theta_1(t) = \frac{\mu_1(t) - r_0 t - \rho(t) \sigma_2(t) \sigma_1(t)}{\sigma_1(t)},$$

$$\theta_2(t) = \frac{\mu_2(t) + \mu_1(t) - r(t) - \sigma_2^2(t)}{\sigma_2(t) \sqrt{1 - \rho^2(t)}} - \frac{\rho(t)}{\sqrt{1 - \rho^2(t)}} \sigma_1(t).$$

因为 $W(t)$ 不是自融资过程, 所以设 $\beta(t)$ 为未来工资收入的贴现值

$$\beta(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{\int_t^s -r_0(u) du} L(s) ds \right]. \quad (13)$$

$$\beta(t) + W(t) \geq 0. \quad (14)$$

$$\beta(t) + W(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{\int_t^s -r_0(u) du} [c(s) + p(s)] ds + e^{\int_t^s -r_0(u) du} W(T) \right]. \quad (15)$$

所以可以得到 0 时刻的, 预算约束为:

$$\beta(0) + W_0 = E^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{\int_0^s -r_0(u) du} [c(s) + p(s)] ds + e^{\int_0^s -r_0(u) du} W(T) \right]. \quad (16)$$

引入一辅助过程:

$$Z(t) = \left[W(t) + \beta(t) + \int_0^t c(s) ds + \int_0^t p(s) ds \right]. \quad (17)$$

定义状态价格密度:

$$\begin{aligned} H(t) &:= R(t) e^{\int_0^t -r_0(u) du} \\ &= \exp \left\{ \int_0^t \left[-r_0(u) - \frac{1}{2} \theta_1^2(u) \right] du + \int_0^t \theta_1(u) dB_1(u) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \theta_2(u) dB_2(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_2^2(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

所以可以得到:

$$dH(t) = H(t) \left[-r_0(t) dt - \theta_1(t) dB_1(t) - \theta_2(t) dB_2(t) \right]. \quad (19)$$

那么

$$\frac{H(T)}{H(t)} = \exp \left(- \left(r_0 + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \right) (T-t) - \theta_1 (B_1(T) - B_1(t)) - \theta_2 (B_2(T) - B_2(t)) \right) \quad (20)$$

因此 $\log \left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)$ 服从正态分布, 均值 $M(t)$ 方差 $V^2(t)$ 分别为:

$$M(t) = - \left(r_0 + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \right) (T-t) \quad V(t) = \sqrt{(\theta_1^2 + \theta_2^2) (T-t)} \quad (21)$$

通过计算可以得出 $Z(t)$ 为新概率测度 $\mathbb{Q}$ 下的鞅, 又因为 $Z(t) \geq 0$ 所以也是一个上鞅, 所以可得预算约束:

$$E[Z(T)H(t)] \leq W_0 + \beta(0).$$

3. 最优投资组合问题

本文考虑, 在所有可行策略上最大化期望效用, 最优财富要满足预算约束。因此可得最优投资组合问题公式如下:

$$\begin{aligned} \max_x E[U(W(T))] \\ E[Z(T)H(t)] \leq W_0 + \beta(0) \end{aligned}$$

下面来定义最优的策略

定义 1 称策略集 $\mathcal{A} = (\pi_1(t), \pi_2(t), c(t), p(t))$ 为可容许策略集, 当 $\mathcal{A}$ 满足如下条件时:

- 1) $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。
- 2) $\int_0^T \pi_i(t)^2 dt < \infty, \forall i=1, 2$ 。
- 3) $\int_0^T c(t)dt < \infty, \int_0^T p(t)dt < \infty$ 。

对于最优问题, 要求解出最优的投资组合, 消费以及人寿保险策略, 目标是要期望效用最大化。

对应的值函数如下:

$$\begin{aligned} V(\pi_1^*, \pi_2^*, c^*, p^*) = \sup_{(\pi_1(t), \pi_2(t), c(t), p(t)) \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau \wedge T} e^{-\int_0^s \mu(u) du} U(c(s)) ds \right. \\ \left. + e^{-\int_0^\tau \mu(u) du} \kappa_1 U(p(\tau)) 1_{\{\tau \leq T\}} + e^{-\int_0^T \mu(u) du} \kappa_2 U(W(T)) 1_{\{\tau > T\}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\mathcal{A}$ 表示所有可行策略的集合。 U 是代表投资者风险厌恶程度的效用函数。 $\mu(u)$ 代表的是对于投资者的时间偏好的确定性函数。对于效用函数 U , 本文使用的是常相对风险厌恶型效用函数(简称: CRRA)

$$U(t, w) = e^{-\rho t} \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, w > 0.$$

其中 $\beta > 0, \eta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ 。

通过引入条件生存函数(6)和(7)式, 可以将(22)式重新改写:

$$\begin{aligned} V(\pi_1^*, \pi_2^*, c^*, p^*) \\ = \sup_{(\pi_1(t), \pi_2(t), c(t), p(t)) \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^s \mu(u) du} [F(s)U(c_s) + \kappa_1 f(s)U(p(s))] ds \right. \\ \left. + e^{-\int_0^T \mu(u) du} F(s)\kappa_2 U(W(T)) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

将条件生存函数代入可得:

$$\begin{aligned} V(\pi_1^*, \pi_2^*, c^*, p^*) \\ = \sup_{(\pi_1(t), \pi_2(t), c(t), p(t)) \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^s (\mu(u) + \lambda(u)) du} [U(c_s) + \kappa_1 \lambda(s)U(p(s))] ds \right. \\ \left. + e^{-\int_0^T (\mu(u) + \lambda(u)) du} \kappa_2 U(W(T)) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

定义效用函数 U 导函数的反函数 $I: [0, t] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, t] \times \mathbb{R}_+$, 可以得到 I 的形式如下:

$$I(t, w) = \left(\frac{\partial U(t, w)}{\partial w} \right)^{-1} = e^{\frac{\rho t}{\gamma}} w^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (25)$$

又因为效用函数 U 是一个凹函数, 所以可以得到如下不等式:

$$U(t, w) \leq U(t, I(t, z)) - z(I(t, z) - w), \forall w \geq 0, z > 0. \quad (26)$$

下面, 定义 ξ , 使得

$$\begin{aligned} V(\xi) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\mu(u) + \lambda(u)) du} \left[I(\xi H(t)) + \lambda(t) I(\kappa_1 \xi H(t)) \right] dt + e^{-\int_0^T (\mu(u) + \lambda(u)) du} I(\kappa_2 \xi H(T)) \right] \\ &= W_0 + \beta(0). \end{aligned} \quad (27)$$

由效用函数的凹性(25), 以及约束条件(16)和(26), 可以得到如下不等式:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\mu(u) + \lambda(u)) du} \left[U(c(t)) + \kappa_1 \lambda(t) U(p(t)) \right] dt + e^{-\int_0^T r(u) du} \kappa_2 U(W(T)) \right] \\ & \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\mu(u) + \lambda(u)) du} \left[U(I(\xi H(t))) + \kappa_1 \lambda(t) U(I(\kappa_1 \xi H(t))) \right] dt \right. \\ & \quad \left. + e^{-\int_0^T (\mu(u) + \lambda(u)) du} \kappa_2 U(I(\kappa_2 \xi H(T))) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

因此可以得到最优策略为:

$$c^*(t) = I(\xi H(t)), \quad (29)$$

$$p^*(t) = I(\kappa_1 \xi H(t)), \quad (30)$$

$$W^*(T) = I(\kappa_2 \xi H(T)). \quad (31)$$

将反函数的具体形式(25)代入(27)式中可以得到:

$$\begin{aligned} V(\xi) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\mu(u) + \lambda(u)) du} e^{-\frac{\rho}{\gamma} t} \xi^{-\frac{1}{\gamma}} (H(t))^{-\frac{1}{\gamma}} [1 + \kappa_1 \lambda(t)] dt \right. \\ & \quad \left. + \kappa_2 e^{-\int_0^T (\mu(u) + \lambda(u)) du} e^{-\frac{\rho}{\gamma} T} \xi^{-\frac{1}{\gamma}} (H(T))^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \\ &= \xi^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\mu(u) + \lambda(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} (H(t))^{-\frac{1}{\gamma}} [1 + \kappa_1 \lambda(t)] dt \right. \\ & \quad \left. + \kappa_2 e^{-\int_0^T (\mu(u) + \lambda(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} (H(T))^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \\ &= \xi^{-\frac{1}{\gamma}} f(0). \end{aligned} \quad (32)$$

为了后续表达简洁, 定义函数 $f(t)$ 为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \xi^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^s (r(u) + \Psi(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} \left(\frac{H(s)}{H(t)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} [1 + \kappa_1 \lambda(t)] dt + \kappa_2 e^{-\int_0^T (r(u) + \Psi(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} \left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (\tilde{r}(u) + \Psi(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} [1 + \lambda(s) \kappa_1] ds + \kappa_2 e^{-\int_t^T (\tilde{r}(u) + \Psi(u) + \frac{\rho}{\gamma}) du} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\tilde{r}(t) = -\frac{1-\gamma}{\gamma}r(t) + \frac{1}{\gamma}\mu(t) - \frac{1+\gamma}{2\gamma^2}(\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t)).$$

因为 $V(\xi) = W_0 + \beta(0)$ ，所以可以得出：

$$\xi = \left(\frac{f(0)}{W_0 + \beta(0)} \right)^\gamma.$$

根据后续的计算，可以得出(29)~(31)式的具体形式

$$c^*(t) = \frac{W(t) + \beta(t)}{f(t)} e^{-\frac{\rho t}{\gamma}}, \quad (34)$$

$$p^*(t) = \frac{W(t) + \beta(t)}{f(t)} \kappa_1 e^{-\frac{\rho t}{\gamma}}, \quad (35)$$

$$W^*(T) = \frac{W(t) + \phi(t)}{f(t)} \left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \kappa_2 e^{-\frac{\rho t}{\gamma}}. \quad (36)$$

因为 $Z(t)H(t)$ 是 $\mathbb{P}$ -鞅，所以可以由如下式子推出 $Z(t)$ ，

$$Z(t)H(t) = E[Z(T)H(T) | \mathcal{F}_t] \quad (37)$$

$$Z(t) = e^{-\frac{\rho t}{\gamma}} (\kappa_2 \xi)^{-\frac{1}{\gamma}} H(t)^{-\frac{1}{\gamma}} \exp \left(-\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \int_t^T r(u) du + \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \int_t^T \theta_1^2(u) + \theta_2^2(u) du \right)$$

再根据 $Z(T)$ 的定义(17)可以求得最优财富过程 $W(t)$ ；

$$\begin{aligned} W(t) = (W_0 + \beta(0)) \exp \left(\int_0^t \left[r_0(s) - \frac{\kappa_1 + 1}{f(s)} e^{-\frac{\rho s}{\gamma}} - \frac{\theta_1^2(s) + \theta_2^2(s)}{2\gamma^2} \right] ds \right. \\ \left. - \int_0^t \frac{\theta_1(s)}{\gamma} dB_1(s) - \int_0^t \frac{\theta_2(s)}{\gamma} dB_2(s) \right) - \beta(t) \end{aligned} \quad (38)$$

所以可以得到财富过程的随机微分方程如下：

$$\begin{aligned} dW(t) = \mathcal{O}(t, W(t), \beta(t)) dt + \left(\frac{1}{\gamma} (W(t) + \beta(t)) \theta_1(t) - \sigma_{L_1} L(t) \right) dB_1(t) \\ - \left(\frac{1}{\gamma} (W(t) + \beta(t)) \theta_2(t) + \sigma_{L_2} L(t) \right) dB_2(t). \end{aligned} \quad (39)$$

对比波动项，可以求出最优的策略集 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t), c^*(t), p^*(t))$

$$\pi_1^* = \frac{W(t) + \beta(t)}{\gamma} \left(\frac{\mu_1(t) - r_0 t - \rho(t) \sigma_2(t) \sigma_1(t)}{\sigma_1(t)} \right) - \frac{\sigma_{L_1}}{\sigma_1} L(t), \quad (40)$$

$$\pi_2^* = \frac{W(t) + \beta(t)}{\gamma} \left(\frac{r_1(t) + \mu_2(t) - r(t) - \sigma_2^2(t)}{\sigma_2(t) \sqrt{1 - \rho^2(t)}} - \frac{\rho(t)}{\sqrt{1 - \rho^2(t)}} \sigma_1(t) \right) - \frac{\sigma_{L_2}}{\sigma_2} L(t), \quad (41)$$

$$c^*(t) = \frac{W(t) + \beta(t)}{f(t)} e^{-\frac{\rho t}{\gamma}}, \quad (42)$$

$$p^*(t)=\frac{W(t)+\beta(t)}{f(t)}\kappa_1e^{-\frac{\rho}{\gamma}t}.$$

(43)

4. 数值分析

对本文显示解进行数值分析，若无特殊标明，则参数设置如图 1 所示：

金融市场参数			收入与寿命参数		
参数名称	符号	设定值	参数名称	符号	设定值
无风险利率	$r(t)$	0.03	收入增长率	$\mu_L(t)$	0.05
股票收益率	$\mu_1(t)$	0.08	收入 - 股票相关性	σ_{L1}	0.10
股票波动率	$\sigma_1(t)$	0.20	收入 - 通胀相关性	σ_{L2}	0.05
实际利率	$r_1(t)$	0.02	死亡率	$\lambda(t)$	0.02
相关系数	$\rho(t)$	0.30			
投资者偏好参数			初始条件		
参数名称	符号	设定值	参数名称	符号	设定值
风险厌恶系数	γ	2.0	初始财富	W_0	1.0
时间贴现率	ρ	0.04	初始收入	$L(0)$	0.2
保险权重系数	κ_1	1.0	投资期限	T	20
最终财富权重系数	κ_2	1.0			

Figure 1. Parameter settings used in numerical analysis

图 1. 数值分析中使用的参数设定

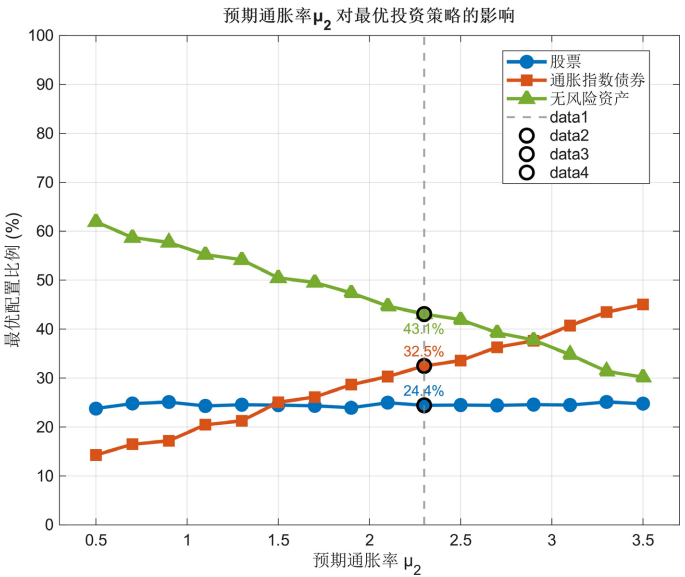


Figure 2. Impact of expected inflation rate on optimal investment strategies

图 2. 预期通胀率对最优投资策略的影响

图 2 是预期通胀率的变动对三类资产的最优配置比例产生了显著而规律性的影响。如图所示，随着预期通胀率 μ_2 从 0.5% 上升至 3.5%，通胀指数债券的配置比例由 15.3% 大幅提升至 45.8%，增幅达 30.5%，表明投资者将其作为对冲通胀风险的核心工具。与此同时，无风险资产的配置比例相应从 62.6% 下降至 29.7%，减少约 32.9%，显示投资者为增持通胀债券而显著减持无风险资产。

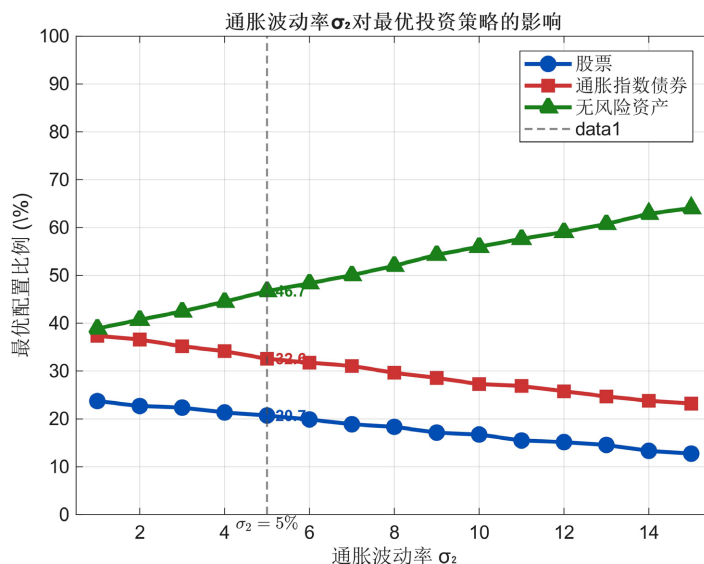


Figure 3. Impact of inflation volatility on optimal investment strategies
图 3. 通胀波动率对最优投资策略的影响

图 3 是根据波动率对最优投资策略的影响，基于数值模拟结果，通胀波动率 σ_2 对三类资产的最优配置具有显著影响。随着 σ_2 从 1% 上升至 15%，通胀指数债券配置比例由 35.0% 大幅降至 5.0%，表明通胀不确定性增加显著削弱了该资产的吸引力。与此同时，无风险资产配置从 40.0% 上升至 74.5%，显示出强烈的避险需求。股票配置相对稳定，仅从 25.0% 微降至 20.5%。这验证了投资者在面对通胀风险加剧时，主要通过减持通胀债券并增持无风险资产来进行风险管理，而股票投资策略保持相对稳健。

5. 结论

本文在随机寿命、收入与通胀风险并存的分析框架下，通过构建包含无风险资产、股票和通胀指数债券的金融市场模型，运用鞅方法及 CRRA 效用函数，将动态优化问题转化为静态问题，最终推导出最优消费、保险与投资策略的显式解析解。研究的主要贡献在于：理论框架综合性更强，将随机收入考虑进来，贴近现实投资者的多维风险环境。但本文基于市场完全、无摩擦及参数确定性等理想条件，忽略了交易成本、随机波动率等现实约束。总体而言，本文在理论建模与解析求解上贡献突出，但在模型现实贴合度与实证深化方面仍有进一步拓展的空间。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Merton, R.C. (1975) Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. In: Ziemba, W.T. and Vickson, R.G., Eds., *Stochastic Optimization Models in Finance*, Elsevier, 621-661. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-780850-5.50052-6>
- [3] Bellamy, N. (2001) Wealth Optimization in an Incomplete Market Driven by a Jump-Diffusion Process. *Journal of Mathematical Economics*, **35**, 259-287. [https://doi.org/10.1016/s0304-4068\(00\)00068-9](https://doi.org/10.1016/s0304-4068(00)00068-9)
- [4] Corcuera, J.M., Nualart, D. and Schoutens, W. (2005) Completion of a Lévy Market by Power-Jump Assets. *Finance and Stochastics*, **9**, 109-127. <https://doi.org/10.1007/s00780-004-0139-2>
- [5] Hamilton, J.D. (1989) A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, **57**, 357-384. <https://doi.org/10.2307/1912559>
- [6] Liu, R. (2013) Optimal Investment and Consumption with Proportional Transaction Costs in Regime-Switching Model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 614-641. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0445-y>

-
- [7] Grasselli, M. (2003) A Stability Result for the HARA Class with Stochastic Interest Rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 611-627. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.09.003>
 - [8] Campbell, J.Y. and Viceira, L.M. (2001) Who Should Buy Long-Term Bonds? *American Economic Review*, **91**, 99-127. <https://doi.org/10.1257/aer.91.1.99>
 - [9] 冯蕾, 梁治安. 通货膨胀风险下家庭住房、消费与投资研究[J]. 现代财经(天津财经大学学报), 2015, 35(6): 93-104.
 - [10] Fischer, S. (1975) The Demand for Index Bonds. *Journal of Political Economy*, **83**, 509-534. <https://doi.org/10.1086/260339>
 - [11] Brennan, M.J. and Xia, Y. (2002) Dynamic Asset Allocation under Inflation. *The Journal of Finance*, **57**, 1201-1238. <https://doi.org/10.1111/1540-6261.00459>
 - [12] Gong, N. and Li, T. (2006) Role of Index Bonds in an Optimal Dynamic Asset Allocation Model with Real Subsistence Consumption. *Applied Mathematics and Computation*, **174**, 710-731. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.089>