Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(2), 141-148**
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.152056

Hans汉斯

基于预不变凸区间值优化问题的最优性条件

徐　宁

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年1月3日；录用日期：2026年1月28日；发布日期：2026年2月4日

摘　要

现有模糊优化相关研究中，最优性条件多围绕伪不变凸函数展开，而预不变凸场景下的区间值优化最优性条件尚未得到充分探讨，存在研究空白。基于此，本文引入预不变凸区间值函数，明确其与可微性的关联，构建预不变凸环境下的区间值优化模型，推导可微条件下的最优性充分与必要条件，既完善区间值优化的理论体系，也为模糊优化问题的求解提供间接的理论支撑。

关键词

E*-*α*-**预不变凸，最优性条件，E*-**可微

Optimality Conditions for Preinvex Interval-Valued Optimization Problems

Ning Xu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: January 3, 2026; accepted: January 28, 2026; published: February 4, 2026

Abstract

In existing research on fuzzy optimization, optimality conditions are mostly centered on pseudoinvex functions, while the optimality conditions for interval-valued optimization under the preinvex scenario have not been fully explored, leaving a research gap. Based on this, this paper introduces the preinvex interval-valued function, clarifies its connection with differentiability, establishes an interval-valued optimization model under the preinvex framework, and derives the sufficient and necessary optimality conditions under differentiable conditions. This not only improves the theoretical system of interval-valued optimization but also provides indirect theoretical support for solving fuzzy optimization problems.

文章引用: 徐宁. 基于预不变凸区间值优化问题的最优性条件[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 141-148.
DOI: 10.12677/aam.2026.152056

Keywords

***E*-*α*-Preinvex, Optimality Conditions, *E*-Differentiable**

1. 引言

模糊优化能更好解决不确定性问题，通过模糊数截集可将其转化为区间值优化问题，为复杂问题求解提供有效路径。而现有模糊优化相关研究中，最优性条件多围绕伪不变凸函数展开，如文献[1]，但预不变凸场景下的区间值优化最优性条件尚未得到充分探讨，存在研究空白。本文围绕预不变凸区间值优化问题的最优性条件展开研究。首先梳理了区间的表示方法、运算规则以及序关系，明确了 gH 差等关键概念；其次定义了 E-α-预不变凸区间值函数，建立了与 E-可微性的等价判定定理；最后构建了 E-α-预不变凸环境下的区间值优化问题(IVOPE)，说明了可行集、可行方向与有效解的概念，通过理论推导给出了该问题在 E-可微条件下满足 KKT 假设时的最优性充分条件与必要条件，为相关优化问题的求解提供了思路。

2 预备知识

实数集 R 上所有有界闭区间族记为 $K_C=\left\{\left[\underline{a},\overline{a}\right] \mid \underline{a},\overline{a}\in R \text{ 且 } \underline{a}\le\overline{a}\right\}$，给定 $A=\left[\underline{a},\overline{a}\right],B=\left[\underline{b},\overline{b}\right]\in K_C$，$\lambda\in R$，定义其标准加法和数乘运算：

$$A+B=\left[\underline{a},\overline{a}\right]+\left[\underline{b},\overline{b}\right]=\left[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\right],$$

$$\lambda A=\left\{\lambda a: a\in A\right\}=\begin{cases}\left[\lambda\underline{a},\lambda\overline{a}\right], & \lambda\ge 0,\\ \left[\lambda\overline{a},\lambda\underline{a}\right], & \lambda<0.\end{cases}$$

显然，$-A=\left[-\overline{a},-\underline{a}\right],B-A=B+\left(-A\right)=\left[\underline{b}-\overline{a},\overline{b}-\underline{a}\right]$ (Minkowski 差)。

下面定义给出了区间的 LU-序关系。

定义 1 [2]令 $A=\left[\underline{a},\overline{a}\right],B=\left[\underline{b},\overline{b}\right]\in K_C$，则

(1) $A\preceq_{LU} B\Leftrightarrow \underline{a}\le\underline{b}$ 且 $\overline{a}\le\overline{b}$；

(2) $A\preceq_{LU} B\Leftrightarrow A\preceq_{LU} B$，且 $A\ne B$，即 $\underline{a}\le\underline{b},\overline{a}\le\overline{b}$ 中至少有一个不等式严格成立；

(3) $A\prec_{LU} B\Leftrightarrow \underline{a}<\underline{b}$ 且 $\overline{a}<\overline{b}$ 。

定义 2 [2] (gH 差)对于 $A=\left[\underline{a},\overline{a}\right],B=\left[\underline{b},\overline{b}\right]\in K_C$，存在 C，使得：

$$A\ominus_{gH} B=C\Leftrightarrow\begin{cases}A=B+C,\\ \text{或 } B=A+\left(-1\right)C.\end{cases}$$

$$A\ominus_{gH} B=\left[\min\left\{\underline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\right\},\max\left\{\underline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\right\}\right]\subset A-B.$$

3. 凸模糊映射与可微性

定义 3 [3]设 K 为 R^n 的一个非空子集，如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in\left[0,1\right]$，存在向量值函数 $\eta:K\times K\to R^n$ 使得

$y+\lambda\eta(x,y)\in K$，则称 K 为关于 η 的不变凸集。

定义 4 [3]设 K 为关于 η 的不变凸集，如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，存在实值函数 $f:R^n\to R$，有，$f(y+\lambda\eta(x,y))\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 为关于 η 的预不变凸实值函数。

定义 5 [3]设 K 为 R^n 的一个非空子集，如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，存在向量值函数 $\eta:K\times K\to R^n$ 与 $E:R^n\to R^n$，使得 $E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y))\in K$，则称 K 为关于 η 的 E-不变凸集。

定义 6 [4]设 K 为关于 η 的 E-不变凸集，如果存在实值函数 $f:R^n\to R$，对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 有 $f(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\le\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y))$，则称 f 为关于 η 的 E-预不变凸实值函数。

定义 7 [5] (E-α-预不变凸区间值函数)设 K 为关于 η 与 α 的 E-α-不变凸集，如果存在区间值函数 $f:R^n\to R$，对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有

$$f\left(E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y))\right)\preceq_{LU}\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)),$$

则称 f 为关于 η 与 α 的 E-α-预不变凸区间值函数。f 为 K 上关于 η 与 α 的 E-α-预不变凸区间值函数，当且仅当 $\underline{f}$ 与 $\overline{f}$ 是 K 上关于 η 与 α 的 E-α-预不变凸区间值函数。

定理 1 [5]设 K 是关于 η 与 α 的 E-α-不变凸集，F 是 K 上的 E-α-预不变凸 E-可微实值函数，则对 $\forall x_1,x_2\in K$，有：

$$\alpha(E(x_1),E(x_2))\eta(E(x_1),E(x_2))\nabla F(E(x_2))^{\mathrm{T}}\le F(E(x_1))-F(E(x_2)).$$

定理 2 [5]设 K 是关于 η 与 α 的 E-α-不变凸集，f 是 K 上的 E-α-预不变凸 E-可微区间值函数 $f=[\underline{f},\overline{f}]$，则对任意 $\forall x_1,x_2\in K$，有：

$$\alpha(E(x_1),E(x_2))\eta(E(x_1),E(x_2))\nabla\underline{f}(E(x_2))^{\mathrm{T}}\le\underline{f}(E(x_1))-\underline{f}(E(x_2))$$

$$\alpha(E(x_1),E(x_2))\eta(E(x_1),E(x_2))\nabla\overline{f}(E(x_2))^{\mathrm{T}}\le\overline{f}(E(x_1))-\overline{f}(E(x_2))$$

定义 8 [6]设集合 $X\subseteq R^n$，映射 $E:X\to R^n$，f 是 X 上的区间值函数，$x_0\in X$，如果实值函数 $\overline{f}(E(\bullet))$ 与 $\underline{f}(E(\bullet))$ 是可微的，且有：

$$\underline{f}(E(x))=\underline{f}(E(x_0))+\nabla\underline{f}(E(x_0))(x-x_0)+\underline{\theta}(x_0,x-x_0)\|x-x_0\|,$$

$$\overline{f}(E(x))=\overline{f}(E(x_0))+\nabla\overline{f}(E(x_0))(x-x_0)+\overline{\theta}(x_0,x-x_0)\|x-x_0\|,$$

其中：当 $x\to x_0$ 时，$\underline{\theta}(x,x-x_0)\to0$，$\overline{\theta}(x,x-x_0)\to0$，则称区间值函数 $f(x)$ 在 x_0 处 E-可微。

E-可微的几何意义：区间值函数由上下界曲面围成的带状图像，在该点附近可被上下界各自的切平面所夹的线性带状区域局部近似，实现区间值函数的“局部线性化”，是实值函数切线近似的推广。

定理 3 [6]设 f_1,f_2 是 K 上的 E-α-预不变凸函数，$\lambda_1,\lambda_2\ge0$，则 $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2$ 仍为 K 上的 E-α-预不变凸函数。

证明：由于 f_1,f_2 是 K 上的 E-α-预不变凸区间值函数，由定义 8，对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有：

$$f_1\left(E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y))\right)\preceq_{LU}\lambda f_1(E(x))+(1-\lambda)f_1(E(y)),\tag{1}$$

$$f_2\left(E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y))\right)\preceq_{LU}\lambda f_2(E(x))+(1-\lambda)f_2(E(y)).\tag{2}$$

对 $\lambda_1,\lambda_2\ge0$，将式(1)乘 λ_1、式(2)乘 λ_2 后相加，得：

$$\lambda_1f_1(\cdot)+\lambda_2f_2(\cdot)\preceq_{LU}\lambda_1\left[\lambda f_1(E(x))+(1-\lambda)f_1(E(y))\right]+\lambda_2\left[\lambda f_2(E(x))+(1-\lambda)f_2(E(y))\right].$$

将右侧展开并整理，可得：

$$\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right)\left(E(y)+\lambda\alpha\left(E(x),E(y)\right)\eta\left(E(x),E(y)\right)\right)$$
$$\preceq_{LU}\lambda\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right)\left(E(x)\right)+(1-\lambda)\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right)\left(E(y)\right).$$

上式满足定义 8 中 E-α-预不变凸区间值函数的判定条件，故 $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ 是 K 上的 E-α-预不变凸区间值函数。

4. 最优性条件

K 是关于 η 与 α 的 E-α-不变凸集，在 E-可微情况下可建立如下优化问题(IVOPE)

$$\begin{cases}\min\ f\left(E(x)\right)=\left[\underline{f}\left(E(x)\right),\overline{f}\left(E(x)\right)\right]\\ \text{s.t.}\ \ G_i\left(E(x)\right)\preceq_{LU}[0,0], i=1,\cdots,m,\\ \qquad x\in X_E,\end{cases}$$

其中 f 与 $G_i\left(E(x)\right)$ 均为定义在 K 上的 E-α-预不变凸区间值函数，约束条件 $G_i\left(E(x)\right)\preceq_{LU}[0,0]$，由 LU 序关系可得 $\underline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0$ 且 $\overline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0$ $(i=1,\cdots,m)$。$\underline{G_i}\left(E(x)\right)$ 和 $\overline{G_i}\left(E(x)\right)$ 为 E-α-预不变凸实值函数，则问题(IVOPE)的 E-可行集为

$$X_E=\left\{x\in K:\underline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0,\overline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0,i=1,\cdots,m\right\}$$

其中 X_E 为 K 的 E-α-不变凸子集。

定义 9 [7]设 X_E 是非空可行集，$x^*\in clX_E$。如果存在 $\delta>0$，使得 $E\left(x^*\right)+\beta d\in X_E$，对于 $\forall\beta\in(0,\delta)$ 成立，则称 $d\ne 0$ 为在 x^* 处的可行方向，D 称为可行方向集，记作

$$D=\left\{d\in R^n:d\ne 0,\exists\delta>0,\text{st.}\,E\left(x^*\right)+\beta d\in X_E,\forall\beta\in(0,\delta)\right\}.$$

若 $d\ne 0$ 为在 x^* 处的可行方向且 $\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d<0$，$\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d<0$，则称 d 为在 x^* 处的可行下降方向。易知，若 x^* 是(IVOPE)问题的有效解，则函数 f 在 x^* 处没有可行下降方向。

命题 1 [8]设 X_E 是非空可行集，且 $x^*\in X_E$。若 G_i 在 x^* 处 E-可微 $(i=1,\cdots,m)$，不妨令积极约束指标集为

$$J:=\left\{i:\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0,\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0\right\},$$

则有，

$$D\subseteq\left\{d\in R^n:\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d\le 0,\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d\le 0,\forall i\in J\right\}.$$

定义 10 [9]如果不存在可行点 $\overline{x}\in X_E$，使得 $f\left(E(\overline{x})\right)\prec_{LU}f\left(E\left(x^*\right)\right)$，则称 x^* 是问题(IVOPE)的有效解。

KKT 假设条件：若 $X_E=\left\{x\in K:\underline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0,\overline{G_i}\left(E(x)\right)\le 0,i=1,\cdots,m\right\}$ 为(IVOPE)问题的可行集且点 $x^*\in X_E$。其中 $\underline{G_i},\overline{G_i}$ 是定义在 K 上的 E-α-预不变凸实值函数，并且对每个 $i=1,\cdots,m$ 在 x^* 处连续 E-可微，则称实值函数 $\underline{G_i},\overline{G_i}$ 在 x^* 处满足 KKT 假设条件。

下面，给出(IVOPE)的 KKT 最优性充分条件。

定理 4 设 f 是定义在 K 上的 E-可微 E-α-预不变凸区间值函数，$\underline{G_i},\overline{G_i},i=1,\cdots,m$ 在 x^* 处满足 KKT 假设条件。如果存在拉格朗日乘子 $0<\underline{\lambda},\overline{\lambda}\in R,0\le\underline{\mu_i},\overline{\mu_i}\in R,i=1,\cdots,m$ 有

$$\underline{\lambda}\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\underline{\mu_i}\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, \tag{3}$$

$$\overline{\lambda}\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\overline{\mu_i}\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, \tag{4}$$

$$\underline{\mu_i G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0,i=1,\cdots,m, \tag{5}$$

$$\overline{\mu_i G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0,i=1\cdots,m, \tag{6}$$

则 x^* 是(IVOPE)优化问题的有效解。

证明：假设 x^* 不是问题(IVOPE)的有效解，则存在 $\overline{x}\neq x^*$，使得 $f\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\prec_{LU} f\left(E\left(x^*\right)\right)$，由 $f\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\prec_{LU} f\left(E\left(x^*\right)\right)$ 可知有以下三种情况

(i) $\underline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right),\overline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)$,

(ii) $\underline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\le\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right),\overline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)$,

(iii) $\underline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right),\overline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\le\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)$。

不失一般性，仅考虑(i) $\underline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right),\overline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)<\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)$ 情形。由 f 是 E-α-预不变凸的 E-可微区间值函数，结合预不变凸函数的微分性质，有：

$$\alpha\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^T\le\underline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)-\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)<0 \tag{7}$$

$$\alpha\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\le\overline{f}\left(E\left(\overline{x}\right)\right)-\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)<0 \tag{8}$$

令 $d=\lambda\alpha\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(\overline{x}\right),E\left(x^*\right)\right)$。因为 X_E 是 E-α-不变凸子集，且 $x^*,\overline{x}\in X_E$，则对 $\forall\beta\in[0,1]$ 有 $E\left(x^*\right)+\beta d\in X_E$，即 d 是 x^* 处的可行方向。结合命题 1，可得 $\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d\le0$，$\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}d\le0$，$i\in J$。

对式(5)和(6)两边同乘 $\beta\lambda>0$，整理得：

$\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\beta d<0$，$\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\beta d<0$。记 $x_0=\beta d$，分下界与上界两种情况分析：

情况 1：(下界 $\underline{f}$ 的矛盾推导)令 $A=\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}$，$C=\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax_0<0$，$Cx_0\le0$。由[8]易知，不存在 $\underline{\lambda}>0,\underline{\mu_i}\ge0$ 使得 $\underline{\lambda}A+\sum_{i\in J}\underline{\mu_i}C=0$，结合式(3)的互补松弛条件，$\underline{\mu_i G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0$，当 $i\notin J$ 时 $\underline{\mu_i}=0$，与定理的 KKT 条件假设矛盾。

情况 2：(上界 $\overline{f}$ 的矛盾推导)令 $B=\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}$，$D=\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}$，则 $Bx_0<0$，$Dx_0\le0$。同理，不存在 $\overline{\lambda}>0,\overline{\mu_i}\ge0$ 使得 $\overline{\lambda}B+\sum_{i\in J}\overline{\mu_i}D=0$，结合式(3)的互补松弛条件，$\overline{\mu_i G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0$，当 $i\notin J$ 时 $\overline{\mu_i}=0$，与定理的 KKT 条件假设矛盾。综上，反证的假设不成立，故 x^* 是(IVOPE)优化问题的有效解。

接下来，给出(IVOPE)的 KKT 最优性必要条件。

定理 5 设 f 是定义在 K 上的 E-可微 E-α-预不变凸区间值函数，$\underline{G_i},\overline{G_i},i=1,\cdots,m$ 在 x^* 处满足 KKT 假设条件。如果 x^* 是(IVOPE)优化问题的有效解，则存在拉格朗日乘子 $0<\underline{\lambda},\overline{\lambda}\in R,0\le\underline{\mu_i},\overline{\mu_i}\in R,i=1,\cdots,m$ 有

$$\underline{\lambda}\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\underline{\mu_i}\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, \tag{9}$$

$$\overline{\lambda}\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\overline{\mu_i}\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, \tag{10}$$

$$\underline{\mu_i}\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, i=1,\cdots,m, \tag{11}$$

$$\overline{\mu_i}\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)=0, i=1,\cdots,m. \tag{12}$$

证明：(反证法)，假设存在着一个 $d\in R^n$，使得

$$\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^T d<0, \nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^T d<0$$

$$\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}} d\le 0, \nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}} d\le 0, i\in J.$$

因为 $\underline{G_i},\overline{G_i}, i=1,\cdots,m$ 在 x^* 处满足 KKT 假设条件，且 $i\in J$，则存在 $x\in X_E$，使得

$$\underline{G_i}\left(E\left(x\right)\right)<0=\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right), \ \overline{G_i}\left(E\left(x\right)\right)<0=\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right).$$

又因为 $\underline{G_i},\overline{G_i}$ 是 K 上的 E-α-预不变凸实值函数，所以有

$$\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\alpha\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\le\underline{G_i}\left(E\left(x\right)\right)-\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)<0,$$

$$\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\alpha\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\le\overline{G_i}\left(E\left(x\right)\right)-\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)<0,$$

令 $d^*:=\alpha\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)$，那么由于 $x,x^*\in X_E$，通过 E-α-不变凸性则有 $x^*+\lambda\alpha\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\eta\left(E\left(x\right),E\left(x^*\right)\right)\in X_E$ 所以可得 $x^*+\lambda d^*\in X_E$，因此 d^* 为 x^* 的一个可行方向。设 $\hat{d}=d+\frac{1}{n}d^*$，则有

$$\nabla\underline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}\le 0,$$

$$\nabla\overline{G_i}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}\le 0.$$

因此 $\hat{d}$ 为 x^* 处的一个可行方向。对于足够大的 n，我们有

$$\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}\le 0, \nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}\le 0,$$

即

$$\nabla f\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}\le 0.$$

将上述式子分两种情况来讨论：

(1) 当 $\nabla f\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}=0$ 时，显然存在拉格朗日乘子 $0<\underline{\lambda},\overline{\lambda}\in R$ 和 $0\le\underline{\mu_i},\overline{\mu_i}\in R, i=1,\cdots,m$ 使得其满足(7) (8)。

(2) 当 $\nabla f\left(E\left(x^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\hat{d}<0$ 时，显然 $\hat{d}$ 是可行下降方向，与 x^* 是有效解矛盾。因此，根据文献[8]可知，存在拉格朗日乘子 $0<\underline{\lambda},\overline{\lambda}\in R, 0\le\underline{\mu_i},\overline{\mu_i}\in R, i=1,\cdots,m$ 使得

$$\underline{\lambda}\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i\in J}\underline{\mu_i}\nabla\underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)=0,$$

$$\overline{\lambda}\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)+\sum_{i\in J}\overline{\mu_i}\nabla\overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right)=0.$$

此外，令 $\mu_i = 0, i \in \{1,\cdots,m\} \setminus J$，则

$$\underline{\lambda} \nabla \underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} \underline{\mu_i} \nabla \underline{f}\left(E\left(x^*\right)\right) = 0,$$

$$\overline{\lambda} \nabla \overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu_i} \nabla \overline{f}\left(E\left(x^*\right)\right) = 0.$$

综上所述，若 x^* 是优化问题的有效解，则有(7)、(8)、(9)、(10)均成立。

5. 数值算例

考虑以下区间值目标规划

$$\begin{cases} \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \\ \text{s.t.} \quad g(x) = x - 1 \le 0 \end{cases}.$$

区间值函数 $f: R \to I$ （I 为 R 上闭区间全体)，其上下界函数定义为：

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ -x^2, & x > 0; \end{cases} \quad \overline{f}(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0, \\ -x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

显然 f 为非传统凸函数，其不变凸集为 $K = R$，辅助函数为 $\eta(x,y) = x - y$，$\alpha = 1$。对 $\forall x, y \in R$，不妨取 $\lambda = 1$，则：$f\left(y + 1 \times (x - y)\right) \preceq_{LU} 1^1 f(x) + \left(1 - 1^1\right) f(y)$，由定义 8 可知 f 为 E-α-预不变凸函数。

由于 $\underline{f}(x)$ 在 $x \le 0$ 时单调递减，$x > 0$ 时单调递减；约束 $x \le 1$ 下，$x = 1$ 处 $\underline{f}(1) = -1$ （下界最小)、$\overline{f}(1) = 0$ (上界最小)，故最优解 $x^* = 1$。

先看充分条件，要求存在 $\lambda \ge 0$，满足假设条件：

$$\nabla \underline{f}\left(x^*\right) + \lambda \nabla g\left(x^*\right) = 0 , \nabla \overline{f}\left(x^*\right) + \lambda \nabla g\left(x^*\right) = 0 \tag{13}$$

$$\lambda g\left(x^*\right) = 0 \tag{14}$$

计算得：$\nabla \underline{f}(1) = -2$，$\nabla \overline{f}(1) = -2$，$\nabla g(x) = 1$，$g\left(x^*\right) = 0$，满足(12)。代入(11)得 $-2 + \lambda \times 1 = 0$，解得 $\lambda = 2 \ge 0$，满足假设条件。由定理 4 知 $x^* = 1$ 是最优解。

再看必要条件：若 x^* 是最优解，则必存在 $\lambda \ge 0$ 满足假设条件。已知 $x^* = 1$ 是最优解，易找到 $\lambda = 2 \ge 0$ 满足条件，故必要条件成立。

若假设 $x = 0$ 为最优解，$\nabla \underline{f}(0) = 0$，则有 $0 + \lambda \times 1 = 0$，解得 $\lambda = 0$，但 $\underline{f}(0) = 0 > -1 = \underline{f}(1)$，故 $x = 0$ 非最优解，体现了定理 5 具有筛选作用。

参考文献

[1] 王锐. 基于约束区间算法的模糊优化问题的最优性条件[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2024.

[2] Stefanini, L. and Arana-Jiménez, M. (2019) Karush-Kuhn-Tucker Conditions for Interval and Fuzzy Optimization in Several Variables under Total and Directional Generalized Differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, **362**, 1-34. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.009

[3] 陈雪静, 彭再云, 邵重阳, 等. α-E-半预不变凸型函数的性质与多目标规划的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 91-98.

[4] 彭再云, 周选林, 赵勇. 强 G-预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(4): 12-17.

[5] Peng, Z.Y., Wang, Z.Y., Zhou, Y.C., *et al.* (2018) A Class of E-α-Prequasiinvexity and Mathematical Programming. *Journal of Chongqing Normal University*: *Natural Science*, **35**, 9-16.

[6] 文铭, 彭再云, 谭馨悦, 等. E-半预不变凸区间值函数与区间值规划[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2025,

42(2): 117-126.

[7] Ghosh, D., Chauhan, R.S., Mesiar, R. and Debnath, A.K. (2020) Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet Derivatives of Interval-Valued Functions and Their Application in Optimization with Interval-Valued Functions. *Information Sciences*, **510**, 317-340. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.09.023

[8] Wu, H. (2007) The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions in an Optimization Problem with Interval-Valued Objective Function. *European Journal of Operational Research*, **176**, 46-59. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007

[9] Antczak, T. and Abdulaleem, N. (2017) Optimality Conditions for *E*-Differentiable Vector Optimization Problems with the Multiple Interval-Valued Objective Function. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **13**, 1-19.