

一种新的求解拟单调变分不等式的惯性投影算法

魏京晶, 叶明露*

西华师范大学数学科学学院, 四川 南充

收稿日期: 2026年1月3日; 录用日期: 2026年1月28日; 发布日期: 2026年2月4日

摘 要

2023年, 叶和邓[运筹学学报, 2023, 27(01): 127-137]提出了一种新的求解拟单调变分不等式的压缩投影算法(简称NPCA)。NPCA结合了向前向后分裂算法(简称FBSA)和压缩投影算法(简称PCA)来减少算法的迭代步数。在此基础上, 本文提出了惯性的NPCA算法, 简称为INPCA, 并在与NPCA相同的假设条件下, 证明了INPCA的全局收敛性。数值实验结果表明惯性方法能进一步加速NPCA。

关键词

变分不等式, 拟单调, 向前向后分裂算法, 压缩投影算法

A New Inertial Projection Algorithm for Solving Quasimonotone Variational Inequalities

Jingjing Wei, Minglu Ye*

School of Mathematical Sciences, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: January 3, 2026; accepted: January 28, 2026; published: February 4, 2026

Abstract

In 2023, Ye and Deng [Operations Research Transactions, 2023, 27(01): 127-137] introduced a new projection and contraction algorithm (NPCA) for solving quasimonotone variational inequalities. NPCA combines the forward backward splitting algorithm (FBSA) and the projection and contraction algorithm (PCA) to reduce iterations numbers. By incorporating an inertial step, we extend it to the

*通讯作者。

文章引用: 魏京晶, 叶明露. 一种新的求解拟单调变分不等式的惯性投影算法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 165-177.
DOI: 10.12677/aam.2026.152058

inertial NPCA (INPCA). The global convergence is proven under the original assumptions, and numerical experiments confirm that the inertial step accelerates convergence.

Keywords

Variational Inequalities, Quasimonotone, Forward-Backward Splitting Algorithm, Projection and Contraction Algorithm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

令 $\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间, 本文考虑经典的变分不等式问题 (Variational Inequality Problem, 简称 VIP): 找 $x^* \in C$ 使得

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C, \quad (1.1)$$

其中 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集, F 是从 C 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个连续映射, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的内积. 我们用 S 来表示 VIP 的解集. S_D 来表示 VIP 的对偶变分不等式的解集, 即

$$S_D := \{x \in C \mid \langle F(y), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in C\}.$$

VIP 最早由 Hartman 和 Stampacchia [1] 在 1966 年提出, 用于研究偏微分方程的解的存在性和唯一性. 随后, 变分不等式逐渐发展成为解决均衡问题, 优化问题和不动点问题的有力工具 [2]-[4].

Goldstein-Levitin-polyak [5] [6] 在 1964 年提出了投影算法, 其算法具体结构如下:

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \beta F(x^k)),$$

其中 $P_C(\cdot)$ 为投影算子, 该算法的收敛性需要 F 在 C 上强单调且 Lipschitz 连续. 为了削弱 F 的强单调性, 1976 年 Korpelevich [7] 和 Khobotov [8] 提出了外梯度投影算法 (EGA), 其算法具体结构如下:

$$y^k = P_C(x^k - \beta F(x^k)), x^{k+1} = P_C(x^k - \beta F(y^k)).$$

EGA 的收敛性只需要 F 在 C 上单调且 L -Lipschitz 连续. 但 EGA 的每次迭代需要计算两次向 C 的投影, 这导致当向 C 的投影不易实施时, EGA 的效率不高.

为了在每次迭代中减少一次向 C 的投影, Solodov 和 Tseng [9] 介绍了压缩投影算法 (简称 PCA, 该类算法的进展还可参见 He [10], Ye [11]); Tseng [12] 提出了向前向后分裂算法 (简称 FBSA), 其算法具体结构如下:

$$y_n = P_C(x_n - \lambda F(x_n)), x_{n+1} = y_n + \lambda(F(x_n) - F(y_n)),$$

并在 F 伪单调且 Lipschitz 连续条件下证明了算法的全局收敛性.

最近, Liu 和 Yang [13] 介绍了一种自适应的 FBSA (简称 LYA) 来求解拟单调变分不等式, 其自适应步长为:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\mu \|x_n - y_n\|}{\|F(x_n) - F(y_n)\|}, \lambda_n + p_n \right\}, & \text{若 } F(x_n) - F(y_n) \neq 0; \\ \lambda_n + p_n, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\{p_n\}$ 是非负实数列, 满足 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < +\infty$ 。

Ye 和 Deng [14] 将 FBSA 与 PCA 结合, 提出了一种新的求解拟单调变分不等式的压缩投影算法, 其下一个迭代点的形式为:

$$x^{k+1} = P_{H_k} \left(y^k - \lambda_k \left(F(x^k) - F(y^k) \right) \right).$$

在映射 F 在 R^n 上连续、拟单调, $S_D \neq \emptyset$ 且 $A = \{z \in C : F(z) = 0\} \setminus S_D$ 是有限集的条件下, 证明了算法的全局收敛性。

Polyak [15] 提出了惯性方法, 利用前一个迭代点来加速凸优化算法。此后, 惯性方法也被用来加速非凸优化算法, 例如文献[16] [17]。在映射为 Lipschitz 连续条件下的惯性算法得到了广泛的研究, 其中求解伪单调 VIP 的有[18]-[20]; 求解拟单调 VIP 的有惯性次梯度外梯度法[21]、惯性 Tseng 方法[22]等。但在映射仅连续条件下的求解拟单调变分不等式的惯性算法比较少。

受文献[12]-[15]的启发, 本文提出了一种求解拟单调变分不等式的惯性向前向后分裂算法(INPCA)。在与文献[14]相同的假设条件下, 证明了新算法的全局收敛性。数值实验结果表明, 与 NPCA 和 LYA 相比, 在低维实例下 INPCA 具有较少的迭代次数; 在高维实例下, INPCA 具有较少的迭代次数、投影次数和 CPU 耗时。

2. 预备知识

本节中, 我们回顾一些基本的定义、性质和一些引理。

$\mathbb{N}^*$ 表示正整数, $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的范数, $\text{dist}(x, C)$ 表示向量 x 到集合 C 的距离, 即

$$\text{dist}(x, C) := \inf \{\|x - y\| : y \in C\}.$$

$P_C(x)$ 表示向量 x 集合 C 的正交投影, 即

$$P_C(x) := \operatorname{argmin} \{\|y - x\| : y \in C\}.$$

从而向量 x 到集合 C 的距离等于 $\|x - P_C(x)\|$ 。对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 及 $\lambda > 0$, 令 $r(x, \lambda)$ 为问题(1.1)的自然残差函数, 即

$$r(x, \lambda) := x - P_C(x - \lambda F(x)).$$

定义 1 设 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 映射 $F: C \rightarrow \mathbb{R}^n$,

(1) 若存在常数 $\gamma > 0$, 使得

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2, \forall x, y \in C,$$

则称 F 在 C 上是 γ -强单调的。

(2) 若

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in C,$$

则称 F 在 C 上是单调的。

(3) 若

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle F(y), y - x \rangle \geq 0, \forall x, y \in C,$$

则称 F 在 C 上是伪单调的。

(4) 若

$$\langle F(x), y-x \rangle > 0 \Rightarrow \langle F(y), y-x \rangle \geq 0, \forall x, y \in C,$$

则称 F 在 C 上是拟单调的。

根据上述定义, 自然的有: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ 。

引理 1 [23] 设 $\{\varphi_k\}, \{\alpha_k\}, \{\delta_k\}$ 为非负序列使得

$$\varphi_{k+1} \leq \varphi_k + \alpha_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}) + \delta_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty,$$

并且存在一个正数 α , 使得 $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $\varphi^* \in [0, +\infty)$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k = \varphi^*.$$

引理 2 [2] [24] 设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集, 则有以下不等式成立。

(1) $\langle P_C(x) - x, y - P_C(x) \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in C$;

(2) $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in C$;

(4) $\|ax + (1-a)y\|^2 = a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)\|x - y\|^2, \forall a \in \mathbb{R}, x, y \in C$ 。

引理 3 [25] 设 x 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量, $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq a\}$ 是一个半空间, 则

$$P_H(x) = x - \max \left\{ \frac{\langle u, x \rangle - a}{\|u\|^2}, 0 \right\} u$$

特别地, 当 $x \notin H$ 时, 可得

$$P_H(x) = x - \frac{\langle u, x \rangle - a}{\|u\|^2} u.$$

引理 4 [2] 若 $\lambda > 0$, 则 $x^* \in S$ 的充要条件是 $\|r(x^*, \lambda)\| = 0$ 。

引理 5 [26] 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及任意的 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, 有

$$\begin{aligned} \|r(x, \lambda_1)\| &\leq \|r(x, \lambda_2)\|; \\ \frac{\|r(x, \lambda_1)\|}{\lambda_1} &\geq \frac{\|r(x, \lambda_2)\|}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

引理 6 [18] 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及任意的实数 $\lambda > 0$, 有

$$\min(1, \lambda) \|r(x, 1)\| \leq \|r(x, \lambda)\| \leq \max(1, \lambda) \|r(x, 1)\|.$$

引理 7 [27] 设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集, F 是 C 上的映射。若下列条件之一成立:

F 在 C 上是伪单调的, 且 $S \neq \emptyset$;

F 是 f 的梯度, 其中 f 是包含 C 的开集 K 上的可微拟凸函数, 且在 C 上可取得其全局最小值;

F 在 C 上是拟单调的, $F \neq 0$ 且 C 有界;

F 在 C 上是拟单调的, F 在 C 上不为零, 且存在正数 r , 使得对任意 $x \in C$, 当 $\|x\| > r$ 时, 存在 $y \in C$ 满足 $\|y\| \leq r$ 且 $\langle F(x), y - x \rangle \leq 0$;

F 在 C 上是拟单调的, 且 $S \setminus S_T \neq \emptyset$, 其中 $S_T := \{x \in C : \langle F(x), y - x \rangle = 0, \forall y \in C\}$;

F 在 C 上是拟单调的, $\text{int}(C)$ 非空, 且存在 $x^* \in S$ 使得 $F(x^*) \neq 0$,

则 S_D 非空。

3. 主要内容

在本节中, 首先介绍求解拟单调变分不等式的惯性投影算法 INPCA, 再证明算法的合理性和生成序列的收敛性。

首先介绍 INPCA, 其具体结构如下:

算法 3.1

步骤 0 选取初始点 $x^0, x^{-1} \in \mathbb{R}^n$, 选取参数 $0 < \alpha_l < \alpha_u$, $\eta, \theta \in (0, 1)$ 和 $\sigma \in (0, 1)$, 选取正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, 设 $k = 0$ 。

步骤 1 计算

$$\omega^k = x^k + \theta_k (x^k - x^{k-1}),$$

其中

$$\theta_k := \begin{cases} \min \left\{ \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2}, \theta \right\}, & \text{若 } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0; \\ \theta, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.1)$$

步骤 2 (线搜索) 选取 $\alpha_k^0 \in [\alpha_l, \alpha_u]$, 寻找最小的非负整数 m_k 使得

$$\alpha_k^0 \eta^{m_k} \left\| F(\omega^k) - F\left(P_C\left(\omega^k - \alpha_k^0 \eta^{m_k} F(\omega^k)\right)\right) \right\| \leq \sigma \left\| \omega^k - P_C\left(\omega^k - \alpha_k^0 \eta^{m_k} F(\omega^k)\right) \right\|. \quad (3.2)$$

令 $\lambda_k = \alpha_k^0 \eta^{m_k}$, $y^k = P_C(\omega^k - \lambda_k F(\omega^k))$ 并转到下一步。

步骤 3 计算 $r(\omega^k, \lambda_k) = \omega^k - y^k$, 若 $r(\omega^k, \lambda_k) = 0$, 停止 (ω^k 解); 否则转到下一步。

步骤 4 令 $H_k = \{u \in \mathbb{R}^n \mid h_k(u) \leq 0\}$, 其中

$$h_k(u) = \left\langle \omega^k - y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)), u - y^k \right\rangle. \quad (3.3)$$

计算

$$x^{k+1} := P_{H_k} \left(y^k - \lambda_k (F(y^k) - F(\omega^k)) \right). \quad (3.4)$$

步骤 5 令 $k = k + 1$, 并返回步骤 1。

注 1. 由引理 3 可知 $\{x^{k+1}\}$ 具体形式为:

$$x^{k+1} = \begin{cases} v^k, & \text{如果 } v^k \in H_k; \\ v^k - \frac{\langle u^k, v^k - y^k \rangle}{\|u^k\|^2} u^k, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $v^k := y^k - \lambda_k (F(y^k) - F(\omega^k))$, $u^k := \omega^k - y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k))$ 。

引理 8 设 $\{\theta_k\}$ 由 INPCA 所生成的数列, 则对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 都有:

(1) $0 \leq \theta_k \leq \theta < 1$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, 进而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 = 0$ 。

证明 (1) 由 θ 和 θ_k 的定义可知结论成立。

(2) 由式(3.1)分类讨论可知: $\theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \varepsilon_k$ 。这结合 ε_k 的定义可知 $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$ 成立。

我们为了说明 INPCA 的合理性, 需要说明 INPCA 中提到的线搜索可以在有限步内停止, 并且对于每个 k , 都有由(3.3)定义的半空间 H_k 是非空闭凸集。下面我们先介绍 INPCA 中的线搜索可以在有限步内停止。

引理 9 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 则对任意的 $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ 及 $\eta \in (0, 1)$, 存在有限的非负整数 m 使得下式成立:

$$\alpha \eta^m \|F(\omega) - F(P_C(\omega - \alpha \eta^m F(\omega)))\| \leq \sigma \|\omega - P_C(\omega - \alpha \eta^m F(\omega))\|. \quad (3.5)$$

证明: 因为线搜索(3.5)与文献[28]中的线搜索一致, 故由文献[28]的引理 10 知结论成立。

接着, 我们用下面的引理来说明(3.3)中由 $h_k(\cdot)$ 定义的半空间 H_k 非空, 从而由(3.4)可以生成点 x^{k+1} 。

引理 10 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且 $S_D \neq \emptyset$, $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\omega^k\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 是由 INPCA 所生成的无穷序列, $h_k(\cdot)$ 是由(3.3)所定义的函数, 则对任意的 k 都有

- (1) $h_k(x^*) \leq 0, \forall x^* \in S_D$;
- (2) $h_k(\omega^k) \geq (1 - \sigma) \|r(\omega^k, \lambda_k)\|^2 > 0$ 。

进而对任意的 k 有 $\emptyset \neq S_D \subset H_k$ 及 $\omega^k \notin H_k$ 。

证明: (1) 设 $x^* \in S_D$, 由 $h_k(\cdot)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} h_k(x^*) &= \langle \omega^k - y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)), x^* - y^k \rangle \\ &= \langle \omega^k - y^k - \lambda_k F(\omega^k), x^* - y^k \rangle + \lambda_k \langle F(y^k), x^* - y^k \rangle \\ &\leq \langle \omega^k - y^k - \lambda_k F(\omega^k), x^* - y^k \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

其中第一个不等式由 $x^* \in S_D$ 且 $y^k \in C$ 可得, 最后一个不等式由引理 2 (1), y^k 的定义以及 $x^* \in C$ 可得。这证明了(1)。

(2) 由 $h_k(\cdot)$ 的定义可知

$$\begin{aligned} h_k(\omega^k) &= \langle \omega^k - y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)), \omega^k - y^k \rangle \\ &= \|\omega^k - y^k\|^2 - \lambda_k \langle F(\omega^k) - F(y^k), \omega^k - y^k \rangle \\ &\geq \|r(\omega^k, \lambda_k)\|^2 - \lambda_k \|F(\omega^k) - F(y^k)\| \|\omega^k - y^k\| \\ &\geq \|r(\omega^k, \lambda_k)\|^2 - \sigma \|r(\omega^k, \lambda_k)\|^2 \\ &= (1 - \sigma) \|r(\omega^k, \lambda_k)\|^2 > 0, \end{aligned}$$

其中第一个不等式由 Cauchy-Schwartz 不等式可得, 第二个不等式由(3.2)式可得, 最后一个不等式由 $\|r(\omega^k, \lambda_k)\| > 0$ 和 $\sigma \in (0, 1)$ 可得。这完成了(2)的证明。

最后, 我们对 INPCA 的收敛性进行分析。

引理 11 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且 $S_D \neq \emptyset$, $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\omega^k\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 是由 INPCA 所生成的无穷序列, 则对任意的 $x^* \in S_D$, 有

- (1) $\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|\omega^k - x^*\|^2 - (1 - \sigma^2) \|\omega^k - y^k\|^2$ 成立;

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|$ 存在, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k - y^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = 0$, 进而有 $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\omega^k\}$, $\{F(x^k)\}$ 及 $\{F(\omega^k)\}$ 均有界。

证明 (1) 由引理 10 (2) 知: $\emptyset \neq S_D \subset H_k$, 任取 $x^* \in S_D$, 有

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_{H_k}(y^k - \lambda_k(F(y^k) - F(\omega^k))) - P_{H_k}(x^*)\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^* - \lambda_k(F(y^k) - F(\omega^k))\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^* - (\omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)))\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^*\|^2 - 2\langle \omega^k - x^*, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle \\ &\quad + \|\omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k))\|^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中第一个不等式由引理 2(2) 可得。

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} &\langle \omega^k - x^*, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle \\ &= \langle \omega^k - y^k, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle + \langle y^k - x^*, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle \\ &\geq \langle \omega^k - y^k, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle, \end{aligned}$$

其中不等式由 $x^* \in H_k$ 及 H_k 的定义可得。这结合(3.6)可知

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|\omega^k - x^*\|^2 - 2\langle \omega^k - y^k, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle \\ &\quad + \|\omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k))\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^*\|^2 - 2\langle \omega^k - y^k, \omega^k - y^k - \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle + \|\omega^k - y^k\|^2 \\ &\quad - 2\langle \omega^k - y^k, \lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle + \|\lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k))\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^*\|^2 - \|\omega^k - y^k\|^2 + \|\lambda_k(F(\omega^k) - F(y^k))\|^2 \\ &\leq \|\omega^k - x^*\|^2 - \|\omega^k - y^k\|^2 + \sigma^2 \|\omega^k - y^k\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^*\|^2 - (1 - \sigma^2) \|\omega^k - y^k\|^2, \end{aligned}$$

其中第二个不等式由(3.2)可得。这就完成了(1)的证明。

(2) 由(1), $\sigma \in (0, 1)$, ω^k 的定义和引理 2 (4) 可知

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|\omega^k - x^*\|^2 = \|(1 + \theta_k)(x^k - x^*) - \theta_k(x^{k-1} - x^*)\|^2 \\ &= (1 + \theta_k) \|x^k - x^*\|^2 - \theta_k \|x^{k-1} - x^*\|^2 + (1 + \theta_k) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k (\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k-1} - x^*\|^2) + (1 + \theta) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2, \end{aligned}$$

其中第二个不等式由 $0 \leq \theta_k \leq \theta$ 可得。由此, 令

$$\varphi_k = \|x^k - x^*\|^2, \quad \alpha_k = \theta_k, \quad \delta_k = (1 + \theta) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2,$$

则由引理 8 (2) 及引理 1 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ 存在, 即 $\{\|x^k - x^*\|\}$ 收敛。进而知 $\{x^k\}$ 有界。

结合 ω^k 的定义及引理 8 可知

$$0 \leq \|\omega^k - x^k\|^2 = \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \theta \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \theta \varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

另一方面, 由(1)还可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - \sigma^2) \|\omega^k - y^k\|^2 \leq \|\omega^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^k + x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= \|\omega^k - x^k\|^2 + 2 \langle \omega^k - x^k, x^k - x^* \rangle + \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \|\omega^k - x^k\|^2 + 2 \|\omega^k - x^k\| \|x^k - x^*\| + \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 Cauchy-Schwartz 不等式可得。对上式取极限, 结合(3.7), $\{x^k\}$ 的有界性, $0 < \sigma < 1$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2) = 0$ 可知:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k - y^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|r(\omega^k, \lambda_k)\| = 0. \quad (3.8)$$

这结合(3.7)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0.$$

由 $\{x^k\}$ 的有界性, (3.7) 以及(3.8)可知 $\{\omega^k\}$, $\{y^k\}$ 也均有界。这结合 $F(\cdot)$ 的连续性还可得 $\{F(x^k)\}$, $\{F(\omega^k)\}$ 和 $\{F(y^k)\}$ 也均有界。这完成了(2)的证明。

引理 12 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且 $S_D \neq \emptyset$, $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\omega^k\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 是由 INPCA 所生成的无穷序列, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad (3.9)$$

证明: 由三角不等式可知

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^{k+1} - y^k + \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k))\| + \|x^k - y^k + \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k))\|, \quad (3.10)$$

另一方面, 由(3.2)和引理 11(2)可知

$$\begin{aligned} \|x^k - y^k + \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k))\| &\leq \|x^k - y^k\| + \lambda_k \|F(\omega^k) - F(y^k)\| \\ &\leq \|x^k - y^k\| + \sigma \|\omega^k - y^k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.11)$$

另一方面, 对 $x^* \in S_D$, 由 x^{k+1} 的定义及引理 2(3)可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - (y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)))\|^2 &\leq \|y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)) - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= \|y^k - x^*\|^2 - 2 \langle y^k - x^*, \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)) \rangle + \lambda_k^2 \|F(\omega^k) - F(y^k)\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 + 2 \lambda_k \|y^k - x^*\| \|F(\omega^k) - F(y^k)\| + \lambda_k^2 \|F(\omega^k) - F(y^k)\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 + 2 \sigma \|y^k - x^*\| \|\omega^k - y^k\| + \sigma^2 \|\omega^k - y^k\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

最后一个不等式由 $\lambda_k \|F(\omega^k) - F(y^k)\| \leq \sigma \|\omega^k - y^k\|$ 可得(参见(3.2))。

此外, 还有

$$\begin{aligned} \|y^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|y^k - x^k + x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= \|y^k - x^k\|^2 + \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle y^k - x^k, x^k - x^* \rangle - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^k\|^2 + 2\|y^k - x^k\| \|x^k - x^*\| + \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2. \end{aligned}$$

将此式代入(3.12)可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - (y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)))\|^2 &\leq 2\sigma \|y^k - x^*\| \|\omega^k - y^k\| + \sigma^2 \|\omega^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2 \\ &\quad + 2\|y^k - x^k\| \|x^k - x^*\| + \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 结合引理 11(2)以及 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2) = 0$ 可得

$$\|x^{k+1} - (y^k - \lambda_k (F(\omega^k) - F(y^k)))\|^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

这结合(3.10)和(3.11)可知(3.9)成立。

定理 1 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 拟单调且 $S_D \neq \emptyset$, $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\omega^k\}$ 和 $\{\lambda^k\}$ 是由 INPCA 所生成的无穷序列, 则对 $\{x^k\}$ 的任意聚点 $\bar{x}$ 都有 $\bar{x} \in S$ 。并且还满足 $F(\bar{x}) = 0$ 或者 $\bar{x} \in S_D$ 。

证明: 设 $\bar{x}$ 为 $\{x^k\}$ 的聚点。则存在子列 $\{x^{k_i}\}$ 满足

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} = \bar{x}.$$

这结合引理 11(2)可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y^{k_i} = \bar{x}, \lim_{i \rightarrow \infty} \omega^{k_i} = \bar{x}. \quad (3.13)$$

从而由 $\{y^{k_i}\} \subset C$ 及 C 是闭集可知 $\bar{x} \in C$ 。利用(3.13)以及文献[14]中的定理 1 (将 x^{k_i} 替换为 ω^{k_i})可知结论成立。

定理 2 若 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 拟单调且 $S_D \neq \emptyset$ 且满足 $\{z \in C : F(z) = 0\} \setminus S_D$ 为有限集。设 $\{x^k\}$ 是 INPCA 生成的无穷序列, 则 $\{x^k\}$ 收敛到 S 中的一点。

证明: 设 X 为 $\{x^k\}$ 的所有聚点构成的集合, 则由定理 1 可知 $X \subset S$ 。我们按以下情况进行分类讨论。

情况一 若存在 $\tilde{x} \in X$ 使得 $\tilde{x} \in S_D$ 。此时, 由引理 11(2)可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \tilde{x}\|$ 存在。这结合 $\tilde{x}$ 为序列 $\{x^k\}$ 的聚点可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \tilde{x}\| = 0,$$

即 $\{x^k\}$ 收敛到 S 中一点。

情况二 若对任意的 $\tilde{x} \in X$ 都有 $\tilde{x} \notin S_D$, 则由定理 1 可知 $F(\tilde{x}) = 0$ 且 $\tilde{x} \notin S_D$ 。因此, 我们有 $X \subset \{z \in C : F(z) = 0\} \setminus S_D$ 。这结合题设可知 X 为有限集。因此, 文献[13]中的引理 3.5 成立。进而, 结合式(3.9)中

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0,$$

以及文献[13]中的定理 3.1 可知 $\{x^k\}$ 收敛到 S 中一点。

综上, 定理 2 成立。

4. 数值实验

在本节中, 我们用数值实验来验证 INPCA 的有效性。我们将 Ye 和 Deng [14] 中的算法 1 称为 NPCA, 将 Liu 和 Yang [13] 的算法 3.1 称为 LYA。所有实验均在 Intel(R) Core(TM) Ultra 5 125H 3.60 GHz 和内存为 32.00GB 的笔记本电脑上使用 MATLAB R2023b 进行。

INPCA 的参数设置为: $\sigma = 0.99$, $\eta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\alpha_0^0 = 1$, 以及对 $k \geq 1$ 取

$$\alpha_k^0 = \begin{cases} P_{[10^{-10}, 10^{10}]} \left(\frac{\|\omega^k - \omega^{k-1}\|^2}{\langle \omega^k - \omega^{k-1}, F(\omega^k) - F(\omega^{k-1}) \rangle} \right), & \text{若 } \langle \omega^k - \omega^{k-1}, F(\omega^k) - F(\omega^{k-1}) \rangle > 10^{-4}; \\ P_{[10^{-10}, 10^{10}]} (1.6\lambda_{k-1}), & \text{其他情况.} \end{cases}$$

其中 α_k^0 的选择是对 Ye [29] 中的参数调整所得。NPCA 与 LYA 的参数选取分别与文献[14]和[13]中一致, 即 NPCA 为 $\alpha = 10$, $\sigma = 0.99$, $\eta = 0.5$; LYA 为 $\mu = 0.5$, $p_n = \frac{100}{(n+1)^{1.1}}$, $\lambda_0 = 1$ 。

例 1 此例被 Ye 和 He [27] 及 Ye 和 Deng [14] 测试。令 $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = a, a > 0 \right\}$, 且 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$, 其中

$$F_i(x) = \frac{hx_i \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \forall i,$$

h 在 $(0.1, 1.6)$ 内随机生成, 则 $S = S_D = \left\{ \left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n} \right) \right\}$ 。此例的停止准则如下:

$$\text{dist} \leq 10^{-4},$$

其中 dist 表示当前迭代点到解集的距离。对于例 1, 我们首先在 $n = 5$ 时测试此算例, 在表 1 中给出了初始点 x^0 , a , 迭代次数 iter , 投影次数 np , CPU 时间(单位: 秒); 当 $n \geq 100$ 时, 初始点 x^0 按文献[14]中的方式生成, 即

$$z = \text{rand}(n, 1), \quad bb = \text{sum}(z), \quad x^0 = \frac{az}{bb} \in C.$$

在表 2 中给出 n , iter , np 和 CPU 情形($a = n$), 其结果为 10 次实验的平均值。

Table 1. Numerical experimental results of example 1 when $n = 5$

表 1. 例 1 在 $n = 5$ 时的数值实验结果

x^0	a	iter			np			CPU		
		INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA
(0, 0, 0, 0, 5)	5	18	29	41	56	99	42	0.02328	0.04841	0.02845
(0, 0, 5, 0, 0)	5	18	29	41	56	99	42	0.02356	0.03950	0.02452

续表

(0, 2, 0, 2, 1)	5	15	26	36	43	84	37	0.01897	0.03312	0.01985
(1, 1, 1, 1, 6)	10	23	28	39	68	59	40	0.02824	0.02484	0.02837
(5, 0, 0, 0, 5)	10	21	37	40	63	78	41	0.02356	0.02397	0.02354

Table 2. Numerical experimental results of example 1 when $n \geq 100$ **表 2.** 例 1 在 $n \geq 100$ 的数值实验结果

n	iter			np			CPU		
	INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA
100	23	121	42	65	243	43	0.05039	0.10313	0.03740
200	26	254	57	73	510	58	0.10220	0.53385	0.13586
500	28	671	93	79	1343	94	0.76908	9.86117	1.56018
1000	29	1388	147	80	2778	148	4.12551	103.61323	12.92367

例 2 此例被 Sun [30] 和 Malitsky [31] 用于算法测试。令 $C = \mathbb{R}_+^n$, $F(x) := F_1(x) + F_2(x)$, 其中 $F_1(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $f_i(x) = x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i-1}x_i + x_i x_{i+1}, \forall i$ 且 $x^0 = x^{n+1} = 0$; $F_2(x) := Ex + c$, $c = (-1, -1, \dots, -1)$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的元素 $e_{i,j}$ 满足

$$e_{i,j} := \begin{cases} 4, & i = j, \\ 1, & i - j = 1, \\ -2, & i - j = -1, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

此例的停止准则为:

$$\|r(m^k, \lambda_k)\| \leq 10^{-4}.$$

其中, 在 NPCA 和 LYA 中, $m^k = x^k$, 在 INPCA 中, $m^k = \omega^k$ 。我们在表 3 中给出 n , iter, np 和 CPU, 结果为 10 个随机初始点的平均值。

Table 3. Numerical experimental results of example 2**表 3.** 例 2 的数值实验结果

n	iter			np			CPU		
	INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA	INPCA	NPCA	LYA
1000	22	31	204	66	266	205	0.00954	0.02860	0.04241
3000	22	33	235	68	288	236	0.08062	0.32705	0.54946
5000	23	34	259	71	297	260	0.33722	1.34843	2.37148

注 3 由表 1~3 可知, 在低维算例中, INPCA 的迭代次数比 NPCA、LYA 少, 投影次数和 CPU 耗时与 NPCA、LYA 基本相当。在高维算例中, INPCA 的迭代次数, 投影次数和 CPU 耗时均少于 NPCA、LYA。

致 谢

衷心感谢我的导师叶明露教授。从读文献都生涩, 到完成论文; 从选题迷茫到终稿落定, 每一步都离不开他的悉心指引。他治学严谨、眼中有光, 这份态度与热忱, 深深影响了我, 并将成为我前行路上长久的光亮。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(No. 11871059), 西华师范大学培育项目(No. 20A024)。

参考文献

- [1] Hartman, P. and Stampacchia, G. (1966) On Some Non-Linear Elliptic Differential-Functional Equations. *Acta Mathematica*, **115**, 271-310. <https://doi.org/10.1007/bf02392210>
- [2] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer.
- [3] Evans, L.C. (2006) A Book Review on: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications (D. Kinderlehrer and G. Stampacchia). *SIAM Review*, **23**, 539-543. <https://doi.org/10.1137/1023111>
- [4] Nagurney, A. (1999) Network Economics: A Variational Inequality Approach. Kluwer Academic Publishers.
- [5] Goldstein, A.A. (1964) Convex Programming in Hilbert Space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70**, 709-710. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1964-11178-2>
- [6] Levitin, E.S. and Polyak, B.T. (1966) Constrained Minimization Methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **6**, 1-50. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90114-5)
- [7] Korpelevich, G.M. (1976) The Extragradient Method for Finding Saddle Points and Other Problems. *Matecon*, **12**, 747-756.
- [8] Khobotov, E.N. (1987) Modification of the Extra-Gradient Method for Solving Variational Inequalities and Certain Optimization Problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**, 120-127. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(87\)90058-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90058-9)
- [9] Solodov, M.V. and Tseng, P. (1996) Modified Projection-Type Methods for Monotone Variational Inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **34**, 1814-1830. <https://doi.org/10.1137/s0363012994268655>
- [10] He, B. (1997) A Class of Projection and Contraction Methods for Monotone Variational Inequalities. *Applied Mathematics and Optimization*, **35**, 69-76. <https://doi.org/10.1007/s002459900037>
- [11] Ye, M. (2017) A Half-Space Projection Method for Solving Generalized Nash Equilibrium Problems. *Optimization*, **66**, 1119-1134. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1326045>
- [12] Tseng, P. (2000) A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 431-446. <https://doi.org/10.1137/s0363012998338806>
- [13] Liu, H. and Yang, J. (2020) Weak Convergence of Iterative Methods for Solving Quasimonotone Variational Inequalities. *Computational Optimization and Applications*, **77**, 491-508. <https://doi.org/10.1007/s10589-020-00217-8>
- [14] 叶明露, 邓欢. 一种新的求解拟单调变分不等式的压缩投影算法[J]. 运筹学学报, 2023, 27(1): 127-137.
- [15] Polyak, B.T. (1964) Some Methods of Speeding Up the Convergence of Iteration Methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**, 1-17. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90137-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90137-5)
- [16] Wen, B., Chen, X. and Pong, T.K. (2017) A Proximal Difference-of-Convex Algorithm with Extrapolation. *Computational Optimization and Applications*, **69**, 297-324. <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9954-1>
- [17] Pock, T. and Sabach, S. (2016) Inertial Proximal Alternating Linearized Minimization (iPALM) for Nonconvex and Nonsmooth Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **9**, 1756-1787. <https://doi.org/10.1137/16m1064064>
- [18] Thong, D.V., Van Hieu, D. and Rassias, T.M. (2019) Self Adaptive Inertial Subgradient Extragradient Algorithms for Solving Pseudomonotone Variational Inequality Problems. *Optimization Letters*, **14**, 115-144. <https://doi.org/10.1007/s11590-019-01511-z>
- [19] Thong, D.V., Vinh, N.T. and Cho, Y.J. (2019) New Strong Convergence Theorem of the Inertial Projection and Contraction Method for Variational Inequality Problems. *Numerical Algorithms*, **84**, 285-305. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00755-1>
- [20] Shehu, Y. and Iyiola, O.S. (2020) Projection Methods with Alternating Inertial Steps for Variational Inequalities: Weak and Linear Convergence. *Applied Numerical Mathematics*, **157**, 315-337. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.06.009>

-
- [21] 李卓. 求解拟单调变分不等式的惯性次梯度外梯度算法[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2024.
- [22] Dung, V.T., Anh, P.K. and Thong, D.V. (2024) Convergence of Two-Step Inertial Tseng's Extragradient Methods for Quasimonotone Variational Inequality Problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **136**, Article 108110. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108110>
- [23] Polyak, B.T. (1987) Introduction to Optimization. Optimization Software.
- [24] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2011) Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Space. Springer.
- [25] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441>
- [26] He, B.S. and Liao, L.Z. (2002) Improvements of Some Projection Methods for Monotone Nonlinear Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **112**, 111-128. <https://doi.org/10.1023/a:1013096613105>
- [27] Ye, M. and He, Y. (2014) A Double Projection Method for Solving Variational Inequalities without Monotonicity. *Computational Optimization and Applications*, **60**, 141-150. <https://doi.org/10.1007/s10589-014-9659-7>
- [28] 叶明露, 黄明. 连续非单调变分不等式的一种惯性投影算法[J]. 运筹学学报: 中英文, 2024, 28(2): 81-92.
- [29] Ye, M. (2022) An Infeasible Projection Type Algorithm for Nonmonotone Variational Inequalities. *Numerical Algorithms*, **89**, 1723-1742. <https://doi.org/10.1007/s11075-021-01170-1>
- [30] Sun, D.F. (1994) A Projection and Contraction Method for the Nonlinear Complementarity Problem and Its Extensions. *Mathematica Numerica Sinica*, **16**, 183-194.
- [31] Malitsky, Y. (2015) Projected Reflected Gradient Methods for Monotone Variational Inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, **25**, 502-520. <https://doi.org/10.1137/14097238x>