

带有Stieltjes积分边界条件的Minkowski平均曲率问题正解的存在性

蒋月娇

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年1月5日; 录用日期: 2026年1月29日; 发布日期: 2026年2月5日

摘 要

本文运用锥上的不动点指数理论研究了在含有Stieltjes积分边值条件下Minkowski平均曲率问题
$$\begin{cases} -[\varphi(u'(t))] = f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u(1) = \alpha[u] \end{cases}$$
 正解的存在性。其中 $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \times (-1, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ 连续,

$\alpha[u] = \int_0^1 u(t) dA(t)$, A 是有界变差函数, $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, $s \in (-1, 1)$ 。

关键词

平均曲率, 不动点指数, 正解, 谱半径, Stieltjes积分

Existence of Positive Solutions for the Minkowski Mean Curvature Problem with Stieltjes Integral Boundary Conditions

Yuejiao Jiang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: January 5, 2026; accepted: January 29, 2026; published: February 5, 2026

Abstract

In this paper, by using the theory of fixed point index on cones, we discuss the existence of positive solutions for the following second-order differential equations with mean curvature

文章引用: 蒋月娇. 带有 Stieltjes 积分边界条件的 Minkowski 平均曲率问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 227-236. DOI: 10.12677/aam.2026.152064

operator in Minkowski space under Stieltjes boundary condition

$$\begin{cases} -[\varphi(u'(t))] = f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = \alpha[u] \end{cases} \quad \text{where } f: [0, 1] \times [0, +\infty) \times (-1, 0] \rightarrow [0, +\infty) \text{ is continuous}$$

and $\alpha[u] = \int_0^1 u(t) dA(t)$, A is a function of bounded variation $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, $s \in (-1, 1)$.

Keywords

Mean Curvature Operator, Fixed Point Index, Positive Solutions, Spectral Radius, Stieltjes Integral

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

众所周知 Minkowski 平均曲率问题在相对论和几何领域有着广泛的应用。近年来, 诸多学者研究了齐次平均曲率问题, 参见文[1]-[7]。膜是扩展的动力学物体, 在弦论和膜物理学中, 膜世界与相对论性膜的运作的研究, 多需要运用在 Minkowski 空间中的平均曲率问题。在无外力的情况下, 一个理想的、仅由其张力驱动膜, 其运动方程(即它的历史轨迹应满足的方程)就是其世界体积的平均曲率为零。这被称为极值超曲面方程或 Nambu-Goto 型方程。除此之外, 在广义相对论中, 黑洞的边界——事件视界, 是一个具有特殊几何性质的类光超曲面。Minkowski 空间中平均曲率也在其中扮演关键角色。另外, 带有 Stieltjes 边界条件的二阶非齐次微分方程在热传导和工程力学等方面有着深远影响, Stieltjes 积分用来描述一个弹性体(如梁、膜)在边界上不仅受到连续分布的支撑力(如躺在弹性地基上), 还在某些特定点受到点支撑、点载荷或点焊。因此, 将 Minkowski 空间中的平均曲率问题与 Stieltjes 积分边值条件相结合, 可以在膜物理学中, 我们能更好地分析膜在更复杂的受力情况下的状态, 见文[8]-[12]。然而, 带有 Stieltjes 积分边界条件的平均曲率问题很少被研究。

2006 年, Webb 等人在文[10]中运用了一种统一的非线性方法研究非线性微分方程

$$-u''(t) = g(t) f(t, u(t)), \quad \forall t \in (0, 1)$$

在如下各种非局部边界条件下

$$u(0) = \alpha[u], \quad u(1) = \beta[u],$$

$$u(0) = \alpha[u], \quad u'(1) = \beta[u],$$

$$u(0) = \alpha[u], \quad u'(1) + \beta[u] = 0,$$

$$u'(0) = \alpha[u], \quad u(1) = \beta[u],$$

$$u'(0) = \alpha[u], \quad u(1) = \beta[u]$$

多重正解的存在性。其中 $\beta[u] = \int_0^1 u(s) dB(s)$, $g \in L^1(0, 1)$ 。

2007 年, Bereanu 等人在文[2]中运用 Leray-Schauder 度理论得到了非局部平均曲率问题

$$\begin{cases} -[\varphi(u')] = f(t, u, u'), & t \in [0, T], \\ l(u, u') = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

多重解的存在性。其中 $l(u, u') = 0$ 分别满足 Dirchlet 边值条件、Neuman 边值条件和周期边值条件。2008 年, Bereanu 在文[3]研究了(1.1)在非齐次边界条件下多重正解的存在性。

2019 年, Ming 等人在文[8]中运用锥上不动点指数理论研究了带有 Stieltjes 积分边界条件的二阶微分方程

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, 1], \\ au(0) - bu'(0) = \alpha[u], & cu(1) + du'(1) = \beta[u] \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 连续。

基于上述工作以及受[3] [12]的启发, 本文研究带有 Stieltjes 积分边值条件的平均曲率边值问题

$$-[\varphi(u'(t))] = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \alpha[u] \quad (1.3)$$

正解的存在性。由 φ 的定义可知 $|u'| < 1$, 那么存在 $0 < \delta < 1$, 使得

$$u'^2 \leq 1 - \delta^2, \quad \forall t \in (1, 0]$$

在文[10]提供了一类统一方法的前提下, 本文针对具体的一维 Minkowski 空间中带有平均曲率算子的问题进行了转化, 利用添加扰动项的方法, 找到等价积分算子。

再在文[8]的基础上, 运用不动点指数理论找到正解的存在性, 区别于文[8], 我们重点强调了如何将平均曲率问题转化成二阶非线性微分方程, 对问题转化前后的等价性进行了证明, 并且奇异点处给出了带有平均曲率算子特点的处理方式。

众所周知, 记

$$k(t, s) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1-s, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

为问题

$$\begin{cases} -u''(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数。

本文总假定:

(C1) $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \times [-1, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ 连续;

(C2) $\mathcal{K}_A(s) := \int_0^1 k(t, s) dA(t) \geq 0$;

(C3) $0 \leq \alpha[1] < 1$ 。

2. 预备知识

设 $E = C^1[0, 1]$ 在 $\|u\|_{C^1} = \max\{\|u\|_C, \|u'\|_C\}$ 下构成的 Banach 空间, 其中 $\|u\|_C = \max|u|$, $\|u'\|_C = \max|u'|$, 定义 E 上开集 $\Omega_r = \{u \in E : \|u\|_{C^1} < r, r > 0\}$ 。

通过一系列计算, 问题(1.2)~(1.3)可转化为如下二阶微分边值问题

$$-u''(t) = f(t, u(t), u'(t))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \alpha[u]. \quad (2.2)$$

引理 1 问题(1.2)~(1.3)与问题(2.1)~(2.2)同解。

证明 显然, 问题(1.2)~(1.3)的解是问题(2.1)~(2.2)的解。反之, 假设 u 是问题(2.1)~(2.2)的解, 只需证明 $\|u'\|_C < 1$, 那么 u 是问题(1.2)~(1.3)的解。根据边界条件 $u'(0) = 0$, 现假设 $\|u'\|_C = 1$, 由 u' 的连续性可知, 存在一点 $t^* \in [0, 1]$, 使得 $|u'(t^*)| = 1$, 显然 $0 \neq t^*$ 。

对任意的 $t \in [0, t^*]$, 若 u 满足方程

$$-[\varphi(u'(t))] = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [0, t^*],$$

对上述方程作积分运算, 可得

$$u'(t) = -\varphi^{-1}\left(\int_0^t f(s, u(s), u'(s))ds\right).$$

由于 $f(t, u(t), u'(t)) \in C^1[0, 1]$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \varphi^{-1}\left(\int_0^t |f(s, u(s), u'(s))|ds\right) = \varphi^{-1}\left(\int_0^{t^*} |f(s, u(s), u'(s))|ds\right) < 1$$

则 $\lim_{t \rightarrow t^*} |u'(t)| < 1$ 。这与 $|u'(t^*)| = 1$ 矛盾, 故 $\|u'\|_C < 1$ 。□

文[12][13]给出了问题(2.1)~(2.2)有解当且仅当解满足如下积分算子

$$u(t) = \alpha[u] + \int_0^1 k(t, s) f(s, u(s), u'(s))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds =: (Tu)(t) \quad (2.3)$$

上式(2.3)由文[12]可得。下面令

$$(Fu)(t) := \int_0^1 k(t, s) f(s, u(s), u'(s))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \quad (2.4)$$

从而

$$(Tu)(t) = \alpha[u] + (Fu)(t). \quad (2.5)$$

对(2.5)等式两边同时作 Stieltjes 积分运算 $\alpha[u]$, 定义

$$(Su)(t) = \frac{\alpha[Fu]}{1-\alpha[1]} + (Fu)(t),$$

那么

$$\begin{aligned} (Su)(t) &= \frac{1}{1-\alpha[1]} \int_0^1 \mathcal{K}_A(s) f(s, u(s), u'(s))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\quad + \int_0^1 k(t, s) f(s, u(s), u'(s))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中

$$k_s(t, s) = \frac{1}{1-\alpha[1]} \mathcal{K}_A(s) + k(t, s). \quad (2.7)$$

引理 2 对于任意的 $t \in [0, 1]$, 有 $\max k_s(t, s) = k_s(0, s)$ 。

证明 $k_s(t, s) = \frac{1}{1-\alpha[1]} \mathcal{K}_A(s) + k(t, s) \leq \frac{1}{1-\alpha[1]} \mathcal{K}_A(s) + k(0, s) = k_s(0, s)$ 。 $\square$

通过一系列计算, 假定(C2)和(C3)成立。则存在非负函数 $\Phi(s)$, 满足

$$(1-t)\Phi(s) \leq k_s(t, s) \leq \Phi(s), \quad t, s \in [0, 1],$$

其中

$$\Phi(s) = \frac{1}{1-\alpha[1]} \mathcal{K}_A(s) + (1-s) \quad (2.8)$$

定义 E 上的两个锥以及一些线性算子

$$P = \{u \in E : u(t) \geq 0, u'(t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]\}, \quad (2.9)$$

$$K = \{u \in P : u(t) \geq (1-t)\|u\|_C, \forall t \in [0, 1], \alpha[u] \geq 0, u'(0) = 0\}, \quad (2.10)$$

$$(L_i u)(t) = \int_0^1 k_s(t, s)(a_i u(s) - b_i u'(s)) ds \quad (i = 1, 2, 4), \quad (2.11)$$

$$(L_3 u)(t) = a_3 \int_0^1 k_s(t, s) u(s) ds. \quad (2.12)$$

引理 3 如果(C1)~(C3)成立, 则 $S : P \rightarrow K$, $L_i : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ 是全连续算子并且满足 $L_i(P) \subset K$ ($i = 1, 2, 3, 4$)。

证明 由(2.6), (2.7)和(C1)~(C3)知, 对任意的 $u \in P$, 可得 $(Su)(t) \geq 0$ 且

$$(Su)'(t) = -\int_0^t f(s, u(s), u'(s))(1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

根据(C1), 显然 $S : P \rightarrow C^1[0, 1]$ 以及 $L_i : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 均连续。设 F 是 P 的有界集, 则存在 $M > 0$, 使得对于任意的 $u \in F$ 满足 $\|u\|_{C^1} \leq M$ 。令 $\tilde{M} = \min\{1, M\}$, 我们可以推出

$$(Su)(t) \leq \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) \int_0^1 \Phi(s) ds$$

$$\left| (Su)'(t) \right| \leq \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) \int_0^t ds \leq \max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v)$$

则 $S(F)$ 一致有界。此外, 对于任意的 $u \in F$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$, 不妨令 $t_1 < t_2$, 则有

$$\begin{aligned} |(Su)(t_1) - (Su)(t_2)| &\leq \int_0^1 |k_s(t_1, s) - k_s(t_2, s)| f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\leq \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) \int_0^1 |k_s(t_1, s) - k_s(t_2, s)| ds \\ &= \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| ds \\ &\leq \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) \int_0^1 |t_2 - t_1| ds, \\ |(Su)'(t_1) - (Su)'(t_2)| &= \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\leq \left(\max_{(s, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times [-\tilde{M}, 0]} f(s, u, v) \right) |t_2 - t_1| \end{aligned}$$

则 $S(F)$ 和 $S'(F)$ 等度连续。

由 Arzelà-Ascoli 定理可知 $S : P \rightarrow C^1[0, 1]$ 是全连续的, $L_i : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 也是全连续

的。

对任意的 $u \in P$, $t \in [0, 1]$, 由引理 2 可得

$$\begin{aligned}\|Su\|_C &= \int_0^1 k_s(0, s) f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \leq \int_0^1 \Phi(s) f(s, u(s), u'(s)) ds, \\ (Su)(t) &= \int_0^1 k_s(t, s) f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\geq (1-t) \int_0^1 \Phi(s) f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\geq (1-t) \|Su\|_C.\end{aligned}$$

借助文[10]可以得到。

引理 4 ([10]) 如果 (C1)~(C3) 成立, 那么 S 和 T 在锥 K 上有相同不动点。问题 (1.2)~(1.3) 有解当且仅当 S 有一个不动点。

下面引入本文使用的主要工具。

引理 5 ([14]) 设 E 是实 Banach 空间, P 为 E 中一个锥, Ω 是 E 上的有界开子集, 算子 $A: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 全连续。若

$$\mu Au \neq u, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

则 $i(A, K \cap \Omega, K) = 1$ 。

引理 6 ([14]) 设 E 是实 Banach 空间, P 为 E 中一个锥, Ω 是 E 上的有界开子集, 算子 $A: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 全连续。若存在 $v_0 \in K \setminus \{0\}$, 使得

$$u - Au \neq v v_0, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega, \quad v \geq 0,$$

则 $i(A, K \cap \Omega, K) = 0$ 。

若 Banach 空间 E 中的锥 P 满足 $E = P - P$, 则 P 称为 E 中的一个可再生锥。

引理 7 (Krein-Rutman) 设 E 是实 Banach 空间, P 为 E 中的一个可再生锥, $L: K \rightarrow K$ 是全连续线性算子, 满足 $L(P) \subset P$ 。若谱半径 $r(L) > 0$, 则存在 $\varphi \in P \setminus \{0\}$, 使得 $L\varphi = r(L)\varphi$ 。

下面给出的定理与本文主要结果的证明有密切关联。

引理 8 ([13]) 令 $R > 0$, 定义连续函数 $H_M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 满足

$$\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{H_M(\rho)} = \infty \quad (2.13)$$

那么存在依赖于 φ, R 的实数 $M > 0$, 若 $v \in C^2[0, 1]$ 且满足 $\|v\|_C \leq R$, $|v''(t)| \leq H_M(|v'(t)|)$ 其中 $t \in [0, 1]$, 那么 $\|v'\|_C \leq M$ 。

3. 主要结果及证明

定理 1 假定 (C1)~(C3) 成立。且满足

(F1) 存在实数 $a_1, b_1, c_1 > 0$, 使得对任意 $(t, u, v) \in [0, 1] \times [0, +\infty) \times (-1, 0]$, 有

$$f(t, u, v) \leq a_1 u - b_1 v + c_1 \quad (3.1)$$

且谱半径 $r(L_1) < 1$, 其中 L_1 如 (2.11) 所定义;

(F2) 存在实数 $a_2, b_2 > 0$, $0 < r, \delta < 1$, 使得对任意 $(t, u, v) \in [0, 1] \times [0, r] \times [-r, 0]$, 满足

$$f(t, u, v) \geq \frac{1}{\delta^3} (a_2 u - b_2 v) \quad (3.2)$$

且谱半径 $r(L_2) \geq 1$ ，其中 L_2 如(2.11)所定义。

则问题(1.2)~(1.3)至少存在一个非增正解。

定理 2 若(C1)~(C3)成立，且(F3)存在实数 $a_3, c_3 > 0$ ，使得对任 $(t, u, v) \in [0, 1] \times [0, +\infty) \times (-1, 0]$ ，

$$a_3 \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds > 1 \quad (3.3)$$

中的 $\Phi(s)$ 如(2.8)所定义，另外还满足

$$f(t, u, v) \geq a_3 u - c_3 \quad (3.4)$$

(F4) 存在实数 $a_4 > 0$ ， $b_4 > 0$ ， $r > 0$ ，使得对任意 $(t, u, v) \in [0, 1] \times [0, r] \times [-r, 0]$ ，有

$$f(t, u, v) \leq a_4 u - b_4 v \quad (3.5)$$

且谱半径 $r(L_4) \geq 1$ ；

(F5) 对任意 $M > 0$ ，存在一个定义在 $[0, +\infty)$ 上的正连续函数 $H_M(\rho)$ 满足(2.13)使得

$$f(t, u, v) \leq H_M(|v|) - c_1, (t, u, v) \in [0, 1] \times [0, M] \times (-\infty, +\infty) \quad (3.6)$$

则问题(1.2)~(1.3)至少存在一个非增正解。

定理 1 的证明 设 $W = \{u \in K : u = \mu Su, \mu \in [0, 1]\}$ ， S 和 K 如(2.5)和(2.10)所定义。下证 W 是有界集。若 $u \in W$ ，则由(2.7)和(2.9)可得，对任意 $\mu \in [0, 1]$ ，有 $u = \mu Su$ ，则由(F1)可得

$$\begin{aligned} u(t) &= \mu(Su)(t) = \mu \int_0^1 k_s(t, s) f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\leq \int_0^1 k_s(t, s) [a_1 u(s) - b_1 u'(s) + c_1] ds = (L_1 u)(t) + c_1 \int_0^1 k_s(t, s) ds \end{aligned}$$

从而

$$(I - L_1 u)(t) \leq c_1 \int_0^1 k_s(t, s) ds =: v(t)。$$

显然 $v \in P$ 。另一方面

$$u'(t) = \mu \int_0^t -f(s, u(s), u'(s)) (1-u'^2)^{\frac{3}{2}} ds = -\int_0^t [a_1 u(s) - b_1 u'(s) + c_1] ds = (L_1 u)'(t) + v'(t)。$$

由 $u'(t) \leq 0$ 可得

$$-((I - L_1)u)'(t) \leq -v'(t)。$$

又由 $r(L_1) < 1$ ，可推出 $(I - L_1)$ 存在有界可逆算子 $(I - L_1)^{-1}$ ，从而

$$u'(t) \leq ((I - L_1)^{-1} v)'(t)。$$

由引理 3 中 $L_1(P) \subset K \subset P$ 可知， $(I - L_1)^{-1}(P) \subset P$ ，则

$$u(t) \leq ((I - L_1)^{-1} v)(t), |u'(t)| \leq |((I - L_1)^{-1} v)'(t)|，$$

所以 $\|u\|_{C^1} \leq \|(I - L_1)^{-1} v\|_{C^1}$ ，即 W 有界。

取 $R > \max\{r, \sup W\}$ ，由引理 5 可知，对任意的 $u \in K \cap \partial\Omega_R$ ， $\mu \in [0, 1]$ ，有 $\mu Au \neq u$ ， $i(S, K \cap \Omega_R, K) = 1$ 。由引理 7，因为 $L_2(P) \subset K \subset P$ ， $r(L_2) \geq 1$ ，则存在 $\varphi_0 \in P \setminus \{0\}$ 使得 $L_2 \varphi_0 = r(L_2) \varphi_0$ 。

另有 $\varphi_0 = r(L_2)^{-1} L_2 \varphi_0 \in K$ 。下面我们要证 S 在 $K \cap \partial\Omega_r$ 上没有不动点，需要说明在 $K \cap \partial\Omega_r, r \geq 0$ 上

满足 $u - Su \neq v\varphi_0$ 。

反设 S 存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_r$, $v_0 \geq 0$, 使得 $u_0 - Su_0 = v_0\varphi_0$ 。由 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_r$, $v_0 \geq 0$ 可知对任意的 $t \in [0, 1]$, $0 \leq u_0(t) \leq r$, $-\min\{r, 1\} < u'_0(t) \leq 0$ 。有

$$\begin{aligned}(Su_0)(t) &= \int_0^1 k_s(t, s) f(s, u_0(s), u'_0(s)) (1 - u_0'^2)^{\frac{3}{2}} ds \geq \int_0^1 \frac{1}{\delta^3} (a_2 u_0(s) - b_2 u'_0(s)) \delta^3 ds = (L_2 u_0)(t) \\ (Su_0)'(t) &= -\int_0^t f(s, u_0(s), u'_0(s)) (1 - u_0'^2)^{\frac{3}{2}} ds \leq -\int_0^t \frac{1}{\delta^3} (a_2 u_0(s) - b_2 u'_0(s)) \delta^3 ds = (L_2 u_0)'(t)\end{aligned}$$

由此可得

$$u_0 = v_0\varphi_0 + Su_0 \geq v_0\varphi_0 + L_2 u_0 \geq v_0\varphi_0 \quad (3.7)$$

令 $v^* = \sup\{v > 0 : u_0 \geq v\varphi_0\}$, 那么 $v_0 \leq v^* < +\infty$, $u_0 \geq v^*\varphi_0$ 。由(3.1)可得

$$u_0 \geq v_0\varphi_0 + L_2 u_0 \geq v_0\varphi_0 + v^* L_2 \varphi_0 = v_0\varphi_0 + v^* r (L_2)\varphi_0,$$

从而 $r(L_2) \geq 1$ 可知 $u_0 \geq (v_0 + v^*)\varphi_0$, 与 v^* 的定义矛盾, 所以对 $u \in K \cap \partial\Omega_r$, $v \geq 0$ 满足 $u - Su \neq v\varphi_0$ 。从而引理 5 可得 $i(S, K \cap \partial\Omega_r, K) = 0$ 。

那么

$i(S, K \cap \Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r, K) = i(S, K \cap \Omega_R, K) - i(S, K \cap \bar{\Omega}_r, K) = 1$ 因此, S 在 K 中至少有一个不动点, 问题(1.2)~(1.3)至少有一个非增的正解。□

定理 2 的证明 (1) 首先证明对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_r$, $\mu \in [0, 1]$, 有 $\mu Su \neq u$ 。运用反证法, 若存在 $u_1 \in K \cap \partial\Omega_r$, $\mu_0 \in [0, 1]$, 使得 $u_1 = \mu_0 Su_1$, 可以推知

$$0 \leq u_1(t) \leq r, \quad -r \leq u'_1 \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1]。$$

由(3.4)知,

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \mu_0 (Su_1)(t) = \mu_0 \int_0^1 k_s(t, s) f(s, u_1(s), u'_1(s)) (1 - u_1'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\leq \int_0^1 k_s(t, s) [a_4 u_1(s) - b_4 u'_1(s)] ds = (L_2 u_1)(t), \\ u'_1(t) &= -\mu_0 \int_0^t f(s, u_1(s), u'_1(s)) (1 - u_1'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\geq -\int_0^t a_4 u_1(s) - b_4 u'_1(s) ds = (L_2 u_1)'(t), \quad \forall t \in [0, 1],\end{aligned}$$

故 $(I - L_2)u_1 \leq 0$ 。

由 $r(L_2) < 1$ 知 $I - L_2$ 有可逆算子 $(I - L_2)^{-1} : P \rightarrow P$ 且 $u_1 \leq (I - L_2)^{-1} 0 = 0$, 与 $u_1 \in K \cap \partial\Omega_r$ 矛盾。则由引理 5 可知 $i(S, K \cap \partial\Omega_r, K) = 1$ 。

(2) 令

$$M = \frac{c_3 \int_0^1 \Phi(s) ds}{a_3 \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds - 1} \quad (3.8)$$

(3) 对 $u \in P$, 定义

$$(S_1 u)(t) = \int_0^1 k_s(t, s) \left[f(s, u_2(s), u'_2(s)) + \frac{c_3}{\delta^3} \right] (1 - u_2'^2)^{\frac{3}{2}} ds \quad (3.9)$$

类似引理 3 的证明, S_1 是全连续的。假设存在 $u_2 \in K \cap \partial\Omega_r$, $\lambda_0 \in [0, 1]$, 使得

$$(1-\lambda_0)Su_2 + \lambda_0 S_1 u_2 = u_2 \quad (3.10)$$

由(3.4)和引理 3 可知,

$$\begin{aligned} \|u_2\|_C &= (1-\lambda_0) \int_0^1 k_s(0,s) f(s, u_2(s), u_2'(s)) (1-u_2'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\quad + \lambda_0 \int_0^1 k_s(0,s) \left[f(s, u_2(s), u_2'(s)) + \frac{c_3}{\delta^3} \right] (1-u_2'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\geq \int_0^1 k_s(0,s) \left[f(s, u_2(s), u_2'(s)) + \lambda_0 \frac{c_3}{\delta^3} \right] (1-u_2'^2)^{\frac{3}{2}} ds \\ &\geq \int_0^1 k_s(0,s) \left[\frac{a_3 u_2(s) - c_3 + c_3 \lambda_0}{\delta^3} \right] \delta^3 ds \\ &\geq a_3 \int_0^1 \Phi(s) u_2(s) ds - c_3 \int_0^1 \Phi(s) ds \\ &\geq a_3 \|u_2\|_C \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds - c_3 \int_0^1 \Phi(s) ds \end{aligned}$$

由此可得

$$\|u_2\|_C \leq \frac{c_3 \int_0^1 \Phi(s) ds}{a_3 \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds - 1} = M \quad (3.11)$$

又由(2.13), (3.10)和(3.11)可知,

$$\begin{aligned} -u_2''(t) &= (1-\lambda_0) f(s, u_2(s), u_2'(s)) (1-u_2'^2)^{\frac{3}{2}} + \lambda_0 \left(f(s, u_2(s), u_2'(s)) + c_3 \right) \\ &= (s, u_2(s), u_2'(s)) (1-u_2'^2)^{\frac{3}{2}} + \lambda_0 c_3 \leq f(s, u_2(s), u_2'(s)) + c_3 \\ &\leq H_M(|u_2'|) \end{aligned}$$

根据引理 6, 存在常数 $M_1 \geq 0$, 使得 $\|u_2'\|_C \leq M_1$ 。令 $R > \max\{r, M, M_1\}$, 那么

$$(1-\lambda)Su + \lambda S_1 u \neq u, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_R, \lambda \in [0,1],$$

因此可得

$$i(S, K \cap \partial\Omega_R, K) = i(S_1, K \cap \partial\Omega_R, K) \quad (3.12)$$

(4) 对于函数 $h(t)=1-t$, 我们可得,

$$(L_3 h)(t) = a_3 \int_0^1 (1-s) k_s(t, s) ds \geq a_3 (1-t) \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds = \left(a_3 \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds \right) h(t),$$

所以由 Krasnosel'skii 可得存在 $\lambda_1 \geq a_3 \int_0^1 (1-s) \Phi(s) ds > 1$ 以及 $\varphi_0 \in C[0,1], \varphi_0 \geq 0$, 使得 $\varphi_0 = \lambda_1^{-1} L_3 \varphi_0$ 。进一步, 由

$$\varphi_0'(t) = -a_3 \int_0^t \varphi_0(s) ds \leq 0, \quad \forall t \in [0,1]$$

可推得 $\varphi_0 \in P$ 且 $\varphi_0 \in K$ 。

(5) 接下来我们证明 $u - S_1 u \neq v \varphi_0$, $u \in K \cap \partial\Omega_R$, $v \geq 0$ 。这里 φ_0 如(iv)中定义, 根据引理 6 得

$$i(S_1, K \cap \partial\Omega_R, K) = 0 \quad (3.13)$$

运用反证法, 若存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_R, v_0 \geq 0$, 使得 $u_0 - S_1 u_0 = v_0 \varphi_0$ 。显然

$$u_0(t) = (S_1 u_0)(t) + v_0 \varphi_0(t) \geq v_0 \varphi_0(t) \quad (3.14)$$

对于任意的 $t \in [0, 1]$, 设

$$v^* = \sup \{v > 0 : u_0(t) \geq v \varphi_0(t), \forall t \in [0, 1]\},$$

那么有 $v_0 \leq v^* < +\infty$, $u_0(t) \geq v^* \varphi_0(t)$, 由(1.6)和(3.8)可知

$$u_0(t) = (S_1 u_0)(t) + v_0 \varphi_0(t) \geq (L_3 u_0)(t) + v_0 \varphi_0(t) \geq v^* (L_3 \varphi_0)(t) + v_0 \varphi_0(t) = \lambda_1 v^* \varphi_0(t) + v_0 \varphi_0(t).$$

由于 $\lambda_1 > 1$, 则 $r(L_3)v^* + v_0 > v^*$. 这与 v^* 的定义矛盾。

(6) 由(3.12)和(3.13)知 $i(S, K \cap \partial\Omega_R, K) = 0$, 从而

$$i(S, K \cap \Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r, K) = i(S, K \cap \Omega_R, K) - i(S, K \cap \bar{\Omega}_r, K) = -1,$$

因此可得 S 在 K 中至少有一个不动点, 问题(1.2)~(1.3)至少有一个非增的正解。□

参考文献

- [1] Bereanu, C., Jebelean, P. and Torres, P.J. (2013) Positive Radial Solutions for Dirichlet Problems with Mean Curvature Operators in Minkowski Space. *Journal of Functional Analysis*, **264**, 270-287. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.10.010>
- [2] Bereanu, C. and Mawhin, J. (2007) Existence and Multiplicity Results for Some Nonlinear Problems with Singular φ -Laplacian. *Journal of Differential Equations*, **243**, 536-557. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.05.014>
- [3] Bereanu, C. and Mawhin, J. (2008) Boundary Value Problems for Some Nonlinear Systems with Singular φ -Laplacian. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **4**, 57-75. <https://doi.org/10.1007/s11784-008-0072-7>
- [4] Cao, X. and Dai, G. (2019) Bifurcation and Entire Hypersurfaces of Mean Curvature Equation in Minkowski Space. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **21**, Article No. 82. <https://doi.org/10.1007/s11784-019-0720-0>
- [5] Chen, T. (2025) Bifurcation from Interval and Positive Solutions of Minkowski-Curvature on Unbounded Domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **548**, Article ID: 129422. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129422>
- [6] Chen, T., Zhao, Y. and Wu, H. (2024) Existence of Solutions for Systems of k -Dimensional Minkowski-Curvature Problems with Neumann Conditions. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **44**, 35-42.
- [7] Lee, Y., Sim, I. and Yang, R. (2024) Repeated S-Shaped and σ -Shaped Bifurcation Curves for the One-Dimensional Non-Autonomous Minkowski-Curvature Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **539**, Article ID: 128548. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128548>
- [8] Ming, Z., Zhang, G. and Li, H. (2019) Positive Solutions of a Derivative Dependent Second-Order Problem Subject to Stieltjes Integral Boundary Conditions. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 98, 1-15. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.98>
- [9] Niu, J. and Zhang, G. (2022) Positive Solutions of Nonlocal Second-Order Differential Equations with Derivative Functions under Robin Conditions. *Applied Mathematics E—Notes*, **22**, 668-683.
- [10] Webb, J.R.L. and Infante, G. (2006) Positive Solutions of Nonlocal Boundary Value Problems: A Unified Approach. *Journal of the London Mathematical Society*, **74**, 673-693. <https://doi.org/10.1112/s0024610706023179>
- [11] R. L. Webb, J. and Infante, G. (2010) Semi-positone Nonlocal Boundary Value Problems of Arbitrary Order. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **9**, 563-581. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2010.9.563>
- [12] Zhang, J., Zhang, G. and Li, H. (2018) Positive Solutions of Second-Order Problem with Dependence on Derivative in Nonlinearity under Stieltjes Integral Boundary Condition. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 4, 1-13. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.4>
- [13] Carrier, G.F. (1987) Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics). Society for Industrial Mathematics.
- [14] 郭大钧, 编著. 非线性泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.