

含区间数据的垂直线性互补问题解的存在性

胡栩源*, 李翠霞

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年1月12日; 录用日期: 2026年2月6日; 发布日期: 2026年2月12日

摘 要

本文主要研究具有区间数据的垂直线性互补问题。讨论了具有区间数据的垂直线性互补问题解的存在性, 得到了一些有用的结果。最后给出了一个数值算例来验证我们的理论结果。

关键词

垂直线性互补问题, 区间数据, 解的存在性, 行 $\mathcal{W}$ -性质

Existence of the Solution of Vertical Linear Complementarity Problem with Interval Data

Xuyuan Hu*, Cuixia Li

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: January 12, 2026; accepted: February 6, 2026; published: February 12, 2026

Abstract

In this paper, we focus on studying the vertical linear complementarity problem with interval data. The existence of solution of vertical linear complementarity problem with interval data is discussed, and some useful results are derived. A numerical example is given to show our theoretical results.

Keywords

Vertical Linear Complementarity Problem, Interval Data, The Existence of Solution, Row $\mathcal{W}$ -Property

*第一作者。



1. 引言

给定 $M_1 \in R^{n \times n}$ 和 $q_1 \in R^n$, $\ell = 1, \dots, k$, 垂直线性互补问题表示为 $VLCP(M, q)$, 其中 $M = (M_1, \dots, M_k)$ 且 $q = (q_1, \dots, q_k)$, 其是指找到一个向量 x 使得

$$\min \{x, M_1 x + q_1, \dots, M_k x + q_k\} = 0, \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$ 是未知向量, $\min(\cdot, \cdot)$ 表示分量意义下的最小值算子, 见[1] [2].

当 $k = 1$, $VLCP(M, q)$ 退化为线性互补问题, 记为 $LCP(M_1, q_1)$, 即:

$$\min \{x, M_1 x + q_1\} = 0, \quad (2)$$

其中 $M_1 \in R^{n \times n}$, $q_1 \in R^n$, 见[3]-[8].

目前, 许多研究者从理论和算法方面对 $VLCP(M, q)$ 进行了研究. 理论上, Sznajder 和 Gowda [2]利用行 $\mathcal{W}$ -性质给出了 $VLCP(M, q)$ 唯一解的几个充要条件. 同样, 在行 $\mathcal{W}$ -性质下, Wu 等人在[9] [10]中讨论了其扰动误差界和全局误差界. 为了有效地求解 $VLCP(M, q)$, Mezzadri 在[11]中引入了 $VLCP(M, q)$ 的基于模的公式. Sun 在[12]中研究了 Mangasarian 的迭代算法. Mezzadri 和 Galligani 在[13]提出了投影 Jacobi 和投影 Gauss-Seidel 方法. Li 和 Wu [14]给出了投影型方法的一些较弱收敛条件. 值得注意的是, 上述结果是在矩阵 M 和向量 q 的固定元素的基础上进行研究的, 而在实际应用中, 由于测量不准确、对数据认识不足、不确定性等原因, 大多数数据都不是不动点, 而是区间的变化. 基于这一考虑, 我们考虑了区间数据的垂直线性互补问题, 即相关联的 M 和 q 的元素用闭区间表示. 具体地说, 对于 $[M_\ell] \in IR^{n \times n}$, $[q_\ell] \in IR^n$, $\ell = 1, 2, \dots, k$, 我们考虑 $VLCP(M, q)$ 族:

$$\min \{x, \overline{M}_1 x + \overline{q}_1, \dots, \overline{M}_k x + \overline{q}_k\} = 0, \quad (3)$$

其中 $\overline{M}_\ell \in [M_\ell]$, $\overline{q}_\ell \in [q_\ell]$, 称该问题为含有区间数据的垂直区间线性互补问题, 记为 $VILCP([M], [q])$, 其中 $[M] = ([M_1], \dots, [M_k])$, $[q] = ([q_1], \dots, [q_k])$.

经典区间分析理论为处理含不确定性的线性系统提供了系统工具. 特别地, Oettli-Prager 定理[15]刻画了区间线性方程组解集的完整特征, 成为区间线性系统理论的基础之一. 本文研究的 $VILCP$ 在形式上可视为一类具有互补结构的特殊区间系统, 其解集结构比一般区间线性方程组更为复杂——不仅受区间算术约束, 还受分量极小值算子的制约. 因此, 经典的 Oettli-Prager 型结论不能直接应用, 需要结合互补问题的特有结构进行分析. 到目前为止, $VILCP([M], [q])$ 解的情况还没有被讨论, 这是我们的主要动机. 为了填补这一研究空白, 本文重点研究 $VILCP([M], [q])$ 解存在的条件. 推导出了 $VILCP([M], [q])$ 解存在的充分条件. 最后给出了一个数值算例来验证我们的理论结果. 论文的其余部分组成如下: 第 2 节给出了一些符号和结果; 第 3 节讨论 $VILCP([M], [q])$ 解的存在性; 此外, 第 4 节提供了一个数值示例; 最后, 在第 5 节中, 我们得出了一些结论来结束本文.

2. 预备知识

为方便后续讨论 $VILCP([M], [q])$ 解的存在性, 本节给出了一些符号和基本定义, 可在[1] [2] [15]-[17]中找到.

在本文中, I 表示单位矩阵, R, R^n 和 $R^{n \times n}$ 依次表示实数集合, n 维实向量集合, $n \times n$ 维实矩阵集合, IR, IR^n 和 $IR^{n \times n}$ 依次表示区间集合, n 维区间向量集合和 $n \times n$ 维区间矩阵. 简言之, $[m] \in IR$ 表示为

$$[m] = [m^L, m^U] = \{m \in R : m^L \leq m \leq m^U\},$$

区间矩阵 $[M] \in IR^{n \times n}$ 表示为

$$[M] = [M^L, M^U] = \{M \in R^{n \times n} : M^L \leq M \leq M^U\},$$

其中不等号表示分量对应下的不等关系。

通过引入参数 t , 区间、区间向量和区间矩阵的参数形式可依次表示为:

$$[a] = \{a(t) \in R : a(t) = ta^U + (1-t)a^L, a^L \in R, a^U \in R, t \in [0, 1]\},$$

设 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, n 为正整数且 $\circ$ 表示 Hadamard 积. 则对于 $i, j \in N$, 有:

$$[x] = \{x(t) \in R^n : x(t) = t \circ x^U + (j-t) \circ x^L, x^L, x^U \in R^n,$$

$$t = (t_i) \in R^n, t_i \in [0, 1], j = (j_i) \in R^n \text{ 且 } j_i = 1\},$$

$$[M] = \{M(T) \in R^{n \times n} : M(T) = T \circ M^U + (J-T) \circ M^L, x^L, x^U \in R^{n \times n},$$

$$T = (T_{ij}) \in R^{n \times n}, T_{ij} \in [0, 1], J = (J_{ij}) \in R^{n \times n} \text{ 且 } J_{ij} = 1\}.$$

定义 2.1 [5] 设 $M = (M_0, M_1, \dots, M_k)$ 是 R^n 中的 $k+1$ 个矩阵集合, 其中 $k \geq 1$, 若满足以下条件之一, 则称 M 有行 $\mathcal{W}$ -性质:

a) 对于任意非对角矩阵 $X_0, X_1, \dots, X_k \in R^{n \times n}$, 其中

$$\text{diag}(X_0 + X_1 + \dots + X_k) > 0, \det(X_0 M_0 + X_1 M_1 + \dots + X_k M_k) \neq 0.$$

b) 若 $\min(M_1 x, M_2 x, \dots, M_k x) \leq 0 \leq \max(M_1 x, M_2 x, \dots, M_k x)$, 则 $x = 0$.

定理 2.1 [1] 对于任意 q , VLCP(M, q) 有唯一解的充分必要条件是 (I, M) 具有行 $\mathcal{W}$ -性质。

3. 区间垂直线性互补问题的解存在性

在这一节中, 我们考虑了垂直区间线性互补问题解的存在性。为此, 用 $\sum_x([M], [q])$ 表示 VILCP($[M], [q]$) 的解集, 其定义为:

$$\sum_x([M], [q]) = \{x \in R^n : \min\{x, \overline{M_1}x + \overline{q_1}, \dots, \overline{M_k}x + \overline{q_k}\} = 0, \overline{M_\ell} \in [M_\ell], \overline{q_\ell} \in [q_\ell], \ell = 1, 2, \dots, k\}.$$

我们分两种情况进行讨论: $k = 2$ 和 k 为任意正整数。

情况 1: $k = 2$

此时, $[M] = ([M_1], [M_2]), [q] = ([q_1], [q_2])$, 我们考虑如下问题:

$$\min\{x, \overline{M_1}x + \overline{q_1}, \overline{M_2}x + \overline{q_2}\} = 0, \overline{M_1} \in [M_1], \overline{M_2} \in [M_2], \overline{q_1} \in [q_1], \overline{q_2} \in [q_2], \quad (4)$$

其解集为:

$$\sum_x([M], [q]) = \{x \in R^n : \min\{x, \overline{M_1}x + \overline{q_1}, \overline{M_2}x + \overline{q_2}\} = 0, \overline{M_\ell} \in [M_\ell], \overline{q_\ell} \in [q_\ell], \ell = 1, 2\}. \quad (5)$$

令 $u = \overline{M_1}x + \overline{q_1}, v = \overline{M_2}x + \overline{q_2}$, 则(5)等价于:

$$\sum_{(x,u,v)}([M], [q]) = \{(x, u, v) \in R^n \times R^n \times R^n : \min\{x, u, v\} = 0, u = [M_1]x + [q_1], v = [M_2]x + [q_2]\} \quad (6)$$

显然, 对于任意 $(x, u, v) \in \sum_{(x, u, v)}([M], [q])$, 有

$$\begin{aligned} & u - [M_1]x = [q_1], v - [M_2]x = [q_2], \min\{x, u, v\} = 0 \\ \Leftrightarrow & u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}) x_j = [q_1]_i, v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}) x_j = [q_2]_i, \min\{x, u, v\}_i = 0, i, j = 1, 2, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \left[u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j, u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j \right] = [q_1]_i^L, [q_1]_i^U, \\ & \left[v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^U) x_j, v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) x_j \right] = [q_2]_i^L, [q_2]_i^U, \min\{x, u, v\}_i = 0, i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

由于 $[a] = [b]$, 当且仅当 $a^L \leq b^U, a^U \geq b^L$, 因此有,

$$\begin{aligned} & u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j \leq (q_1)_i^U, \\ & u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j \geq (q_1)_i^L, \\ & v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^U) x_j \leq (q_2)_i^U, \\ & v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) x_j \geq (q_2)_i^L, \\ & \min\{x, u, v\}_i = 0, i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

也就是说, 由于变量的互补性, 需要考虑 $4n$ 种情况。用 $\bigcup_{4n}$ 表示这 $4n$ 个集合的并集。由(7)易得 $\sum_{(x, u, v)}([M], [q])$ 等价于

$$\begin{aligned} \sum_{(x, u, v)}([M], [q]) = \bigcup_{4n} & \left\{ (x, u, v) \in R^n \times R^n \times R^n : u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j \leq (q_1)_i^U, u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j \geq (q_1)_i^L, \right. \\ & \left. v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^U) x_j \leq (q_2)_i^U, v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) x_j \geq (q_2)_i^L, \min\{x, u, v\}_i = 0, i, j = 1, 2, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

此外, VILCP $([M], [q])$ 的参数形式可表示为:

$$\min\{x, M_1(T_1)x + q_1(t_1), M_2(T_2)x + q_2(t_2)\} = 0, \quad (9)$$

其解集定义如下:

$$\sum_x (M_1(T_1), M_2(T_2), q_1(t_1), q_2(t_2)) = \{x \in R^n : \min\{x, M_1(T_1)x + q_1(t_1), M_2(T_2)x + q_2(t_2)\} = 0\}, \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} & M_1(T_1) = T_1 \circ [M_1]^U + (J - T_1) \circ [M_1]^L, M_2(T_2) = T_2 \circ [M_2]^U + (J - T_2) \circ [M_2]^L, \\ & q_1(t_1) = t_1 \circ [q_1]^U + (j - t_1) \circ [q_1]^L, q_2(t_2) = t_2 \circ [q_2]^U + (j - t_2) \circ [q_2]^L \end{aligned} \quad (11)$$

引理 3.1 设 $[M] \in IR^{n \times n}$, $[q] \in IR^n$ 。则 $x \in \sum_x([M], [q])$ 的充分必要条件是存在 $u, v \in R^n$, 使得 $(x, u, v) \in \sum_{(x, u, v)}([M], [q])$ 。

证明: 显然。 $\square$

引理 3.2 对于任意 $\text{VILCP}([M],[q])$, $\sum_x([M]^L,[q]^L)$ 和 $\sum_x([M]^U,[q]^U)$ 都是 $\sum_x([M],[q])$ 的子集。

证明: 设 $(x,u,v) \in \sum_x([M]^L,[q]^L)$, 则

$$u - [M_1]^L x = [q_1]^L, v - [M_2]^L x = [q_2]^L, \min\{x, u, v\} = 0. \quad (12)$$

因此,

$$\begin{aligned} u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j &\geq (q_1)_i^L, \\ v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) x_j &\geq (q_2)_i^L, \\ \min\{x, u, v\} i &= 0, i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

由于

$$\begin{aligned} [M_1]_{ij}^L &\leq [M_1]_{ij}^U, [M_2]_{ij}^L \leq [M_2]_{ij}^U, \\ [q_1]_{ij}^L &\leq [q_1]_{ij}^U, [q_2]_{ij}^L \leq [q_2]_{ij}^U, \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j &\leq (q_1)_i^U, u_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j = (q_1)_i^L, \\ v_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^U) x_j &\leq (q_2)_i^U, u_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) x_j = (q_2)_i^L, \end{aligned} \quad (14)$$

由(7)可知, $(x,u,v) \in \sum_x([M],[q])$ 。因此, $\sum_x([M]^L,[q]^L) \in \sum_{(x,u,v)}([M],[q])$ 。

同理可证 $\sum_x([M]^U,[q]^U) \in \sum_x([M],[q])$ 。

定理 3.1 集合 $\sum_{(x,u,v)}([M],[q])$ 不是凸集。

证明: 设 $(x^1, u^1, v^1), (x^2, u^2, v^2) \in \sum_{(x,u,v)}([M],[q])$ 。

对于 $0 \leq \lambda \leq 1$, 考虑其凸组合: $\lambda(x^1, u^1, v^1) + (1-\lambda)(x^2, u^2, v^2)$, 结合(7)可得:

$$\lambda(u^1)_i + (1-\lambda)(u^2)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) (\lambda(x^1)_j + (1-\lambda)(x^2)_j) \leq (q_1)_i^U, \quad (15)$$

$$\lambda(u^1)_i + (1-\lambda)(u^2)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) (\lambda(x^1)_j + (1-\lambda)(x^2)_j) \geq (q_1)_i^L, \quad (16)$$

$$\lambda(v^1)_i + (1-\lambda)(v^2)_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^U) (\lambda(x^1)_j + (1-\lambda)(x^2)_j) \leq (q_2)_i^U, \quad (17)$$

$$\lambda(v^1)_i + (1-\lambda)(v^2)_i - \sum_{j=1}^n ([M_2]_{ij}^L) (\lambda(x^1)_j + (1-\lambda)(x^2)_j) \geq (q_2)_i^L, \quad (18)$$

且

$$\begin{aligned}
 & \left(\lambda(u^1)_i + (1-\lambda)(u^2)_i \right) \geq 0, \\
 & \left(\lambda(v^1)_i + (1-\lambda)(v^2)_i \right) \geq 0, \\
 & \left(\lambda(x^1)_i + (1-\lambda)(x^2)_i \right) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

注意到

$$\left(\left(\lambda(u^1)_i + (1-\lambda)(u^2)_i \right) \right) \left(\left(\lambda(v^1)_i + (1-\lambda)(v^2)_i \right) \right) \left(\left(\lambda(x^1)_i + (1-\lambda)(x^2)_i \right) \right) = 0$$

仅在 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$ 时成立, 并非对所有 $0 \leq \lambda \leq 1$ 都成立。因为互补变量的凸组合不保持互补性, 所以,

$$\left(\lambda(u^1)_i + (1-\lambda)(u^2)_i, \lambda(v^1)_i + (1-\lambda)(v^2)_i, \lambda(x^1)_i + (1-\lambda)(x^2)_i \right) \notin \sum_{(x,u,v)} ([M], [q]).$$

因此, 集合 $\sum_{(x,u,v)} ([M], [q])$ 不是凸集。

定理 3.2 若 $(I, [M]), [M] = ([M_1], [M_2])$ 有行 $\mathcal{W}$ -性质, 则任意 $[q] \in IR^n$, $\text{VILCP}([M], [q])$ 都有解。即 $\sum_x ([M], [q])$ 是非空集。

证明: 设 $(I, [M])$ 有行 $\mathcal{W}$ -性质, 则对于任意 $\overline{M}_1 \in [M_1], \overline{M}_2 \in [M_2], \overline{M} = (\overline{M}_1, \overline{M}_2) \in [M]$ 都具有行 $\mathcal{W}$ -性质, 因此

$$\min \{x, \overline{M}_1 x + \overline{q}_1, \overline{M}_2 x + \overline{q}_2\} = 0$$

有唯一解。又因为

$$\sum (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{q}_1, \overline{q}_2) \subseteq \sum ([M], [q]),$$

故 $\sum_x ([M], [q])$ 是非空集。

接下来, 我们讨论一般情况。

情况 2: k 为任意正整数, 即 $\text{VILCP}(3)$ 本身。

按照情况 1 的思路, 可推广讨论情况 2。

将上述讨论中的 $[M] = ([M_1], [M_2]), [q] = ([q_1], [q_2])$ 替换为 $[M] = ([M_1], [M_2], \dots, [M_k])$ 和 $[q] = ([q_1], [q_2], \dots, [q_k])$, 令 $u_1 = \overline{M}_1 x + \overline{q}_1, \dots, u_k = \overline{M}_k x + \overline{q}_k$, 其中, $\overline{M}_\ell \in [M_\ell], \overline{q}_\ell \in [q_\ell], \ell = 1, 2, \dots, k$ 。

对于 $(x, u_1, u_2, \dots, u_k) \in \sum_{(x, u_1, u_2, \dots, u_k)} ([M], [q])$, 有

$$\begin{aligned}
 & \left[(u_1)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j, (u_1)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j \right] = \left[[q_1]_i^L, [q_1]_i^U \right], \\
 & \left[(u_k)_i - \sum_{j=1}^n ([M_k]_{ij}^U) x_j, (u_k)_i - \sum_{j=1}^n ([M_k]_{ij}^L) x_j \right] = \left[[q_k]_i^L, [q_k]_i^U \right], \\
 & \min \{x, u_1, u_2, \dots, u_k\}_i = 0, i, j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}
 & (u_1)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^U) x_j \leq (q_1)_i^U, \\
 & (u_1)_i - \sum_{j=1}^n ([M_1]_{ij}^L) x_j \geq (q_1)_i^L, \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u_k)_i - \sum_{j=1}^n ([M_k]_{ij}^U) x_j &\leq (q_1)_i^U \\ (u_k)_i - \sum_{j=1}^n ([M_k]_{ij}^L) x_j &\geq (q_k)_i^L, \\ \min\{x, u_1, u_2, \dots, u_k\}_i &= 0, i, j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{20}$$

与情况 1 类似, 我们可以依次得到以下结果。证明过程完全相似, 此处省略。

定理 3.3 集合 $\sum_{(x, u_1, u_2, \dots, u_k)} ([M], [q])$ 不是凸集。

定理 3.4 若 $(I, [M]), [M] = ([M^1], [M^2], \dots, [M^k])$ 具有行 $\mathcal{W}$ -性质, 则对于任意 $[q] \in \mathbb{R}^n$, $\text{VILCP}([M], [q])$ 都有解, 即 $\sum_x ([M], [q])$ 是非空集。

注: 由定理 2.1 可知, 在满足行 $\mathcal{W}$ -性质的条件下, $\text{VLCP}(M, q)$ 有唯一解。然而, 本文并未研究 $\text{VILCP}([M], [q])$ 解的唯一性, 因为 $\text{VLCP}([M]^L, [q]^L)$ 和 $\text{VLCP}([M]^U, [q]^U)$ 解的唯一性并不能保证 $\text{VILCP}([M], [q])$ 解的唯一性。下面, 通过例子来说明这一点。

例 3.1 设

$$[M_1] = \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 2] \end{pmatrix}, [M_2] = \begin{pmatrix} [0, 0] & [1, 2] \\ [1, 2] & [0, 0] \end{pmatrix}, [q_1] = [q_2] = \begin{pmatrix} [0, 0] \\ [0, 0] \end{pmatrix},$$

则

$$[M_1]^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [M_1]^U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, [M_2]^L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, [M_2]^U = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

设非负对角矩阵

$$X_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix},$$

其中 $a, b, c, d, e, f \geq 0$, 且 $\text{diag}(X_0 + X_1 + X_2) = (a + c + e, b + d + f) > 0$ 。

则,

$$X_0 I + X_1 [M_1]^L + X_2 [M_2]^L = \begin{pmatrix} a+c & e \\ f & b+d \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} a+c & e \\ f & b+d \end{pmatrix} = (a+c)(b+d) - ef,$$

由 $a, b, c, d, e, f \geq 0$, 且 $a + c + e > 0$, $b + d + f > 0$, 可得 $(a+c)(b+d) - ef > 0$, 即, $\det(X_0 I + X_1 [M_1]^L + X_2 [M_2]^L) > 0$ 。

由定义 2.1 可知, $(I, [M_1]^L, [M_2]^L)$ 具有行 $\mathcal{W}$ -性质。同理, $(I, [M_1]^U, [M_2]^U)$ 也具有行 $\mathcal{W}$ -性质。

接下来, 取

$$\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in [M_1], \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in [M_2],$$

令 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 有

$$\min\{x, \overline{M_1}x, \overline{M_2}x\} \leq 0 \leq \max\{x, \overline{M_1}x, \overline{M_2}x\}$$

但 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$, 这不满足行 $\mathcal{W}$ -性质。

这表明, $\text{VLCP}([M]^L, [q]^L)$ 和 $\text{VLCP}([M]^U, [q]^U)$ 解的唯一性不能保证 $\text{VILCP}([M], [q])$ 解的唯一性。

4. 数值例子

本节将通过一个数值例子来验证我们的理论结果。为方便起见, 考虑 $k=2$ 的情况, 即 $\text{VILCP}(4)$ 。具体见例 4.1。

例 4.1 考虑 $\text{VILCP}(4)$, 其中 $[M] = ([M_1], [M_2])$ 且 $[q] = ([q_1], [q_2])$ 分别为

$$[M_1] = \begin{pmatrix} [2, 3] & [-2, -1] \\ [-2, -1] & [3, 5] \end{pmatrix}, [M_2] = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-3, -2] \\ [-1, -1/2] & [2, 3] \end{pmatrix},$$

$$[q_1] = \begin{pmatrix} [0, 1] \\ [1, 2] \end{pmatrix}, [q_2] = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

容易验证 $(I, [M])$ 具有行 $\mathcal{W}$ -性质, 相应的 $\text{VILCP}([M], [q])$ 满足定理 3.2。 $\text{VILCP}([M], [q])$ 的解集可通过以下不等式组求解得到:

$$\begin{cases} u_1 - 3x_1 + x_2 \leq 1, \\ u_1 - 2x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ u_2 + x_1 - 5x_2 \leq 2, \\ u_2 + 2x_1 - 3x_2 \geq 1, \\ v_1 - 4x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ v_1 - 2x_1 + 3x_2 \geq -1, \\ v_2 + 1/2x_1 - 3x_2 \leq 1, \\ v_2 + x_1 - 2x_2 \geq -1, \end{cases}$$

其中 $x_i, u_i, v_i \geq 0, i=1, 2$ 。

接下来, 考虑以下九种情况:

- 1) $u_1 = 0, u_2 = 0$; 2) $u_1 = 0, v_2 = 0$; 3) $u_1 = 0, x_1 = 0$;
- 4) $v_1 = 0, u_2 = 0$; 5) $v_1 = 0, v_2 = 0$; 6) $v_1 = 0, x_2 = 0$;
- 7) $x_1 = 0, u_2 = 0$; 8) $x_1 = 0, v_2 = 0$; 9) $x_1 = 0, x_2 = 0$ 。

$\text{VILCP}([M], [q])$ 的解集为上述各种情况解集的并集:

$$\sum_x ([M], [q]) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \left[0, \frac{1}{2} \right], x_2 = 0 \right\}.$$

此外, 容易验证 $[M]^L$ 是 P -矩阵(其所有主子式都大于 0), $\text{VLCP}([M]^L, [q]^L)$ 有唯一解。其中,

$$[M_1]^L = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, [M_2]^L = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, [q_1]^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [q_2]^L = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\text{VLCP}([M]^L, [q]^L)$ 的解为

$$\sum_x^L ([M], [q]) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

同理,

$$[M_1]^U = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, [M_2]^U = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}, [q_1]^U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, [q_2]^U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\text{VLCP}([M]^U, [q]^U)$ 的解为 $\sum_x^U([M], [q]) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

容易看出 $\sum_x^L([M], [q]) \subseteq \sum_x([M], [q])$ 且 $\sum_x^U([M], [q]) \subseteq \sum_x([M], [q])$ 。

5. 结论与展望

本文研究了 $\text{VLCP}([M], [q])$ 解的存在性, 得到了一些关于该问题解集的有效结果, 并通过数值例子验证了结论。本文的理论结果也为进一步研究解集的数值估计提供了基础: 基于本文给出的解集刻画, 可发展基于区间松弛与投影思想的估计算法, 并在矩阵满足行 $\mathcal{W}$ -性质等条件下分析其收敛性。未来工作将围绕高效算法的设计与应用展开。

基金项目

云南省教育厅科学研究基金(No. 2025Y0322)。

参考文献

- [1] Gowda, M.S. and Sznajder, R. (1994) The Generalized Order Linear Complementarity Problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **15**, 779-795. <https://doi.org/10.1137/s0895479892237859>
- [2] Sznajder, R. and Gowda, M.S. (1995) Generalizations of P0- and P-Properties; Extended Vertical and Horizontal Linear Complementarity Problems. *Linear Algebra and its Applications*, **223**, 695-715. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(93\)00184-2](https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)00184-2)
- [3] Cottle, R.W., Pang, J.S. and Stone, R.E. (1992) The Linear Complementarity Problem. Academic.
- [4] Ferris, M.C. and Pang, J.S. (1997) Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems. *SIAM Review*, **39**, 669-713. <https://doi.org/10.1137/s0036144595285963>
- [5] Fujisawa, T. and Kuh, E.S. (1972) Piecewise-Linear Theory of Nonlinear Networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **22**, 307-328. <https://doi.org/10.1137/0122030>
- [6] Fujisawa, T., Kuh, E. and Ohtsuki, T. (1972) A Sparse Matrix Method for Analysis of Piecewise-Linear Resistive Networks. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, **19**, 571-584. <https://doi.org/10.1109/tct.1972.1083550>
- [7] Murty, K.G. (1988) Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. Heldermann.
- [8] Nagae, T. and Akamatsu, T. (2008) A Generalized Complementarity Approach to Solving Real Option Problems. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **32**, 1754-1779. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2007.04.010>
- [9] Wu, S., Li, W. and Wang, H. (2023) The Perturbation Bound of the Extended Vertical Linear Complementarity Problem. *Journal of the Operations Research Society of China*, **12**, 601-625. <https://doi.org/10.1007/s40305-023-00456-6>
- [10] Wu, S. and Wang, H. (2024) On Error Bounds for the Extended Vertical Linear Complementarity Problem. *Journal of the Operations Research Society of China*. <https://doi.org/10.1007/s40305-024-00573-w>
- [11] Mezzadri, F. (2022) A Modulus-Based Formulation for the Vertical Linear Complementarity Problem. *Numerical Algorithms*, **90**, 1547-1568. <https://doi.org/10.1007/s11075-021-01240-4>
- [12] Sun, M. (1989) Monotonicity of Mangasarian's Iterative Algorithm for Generalized Linear Complementarity Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **144**, 474-485. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(89\)90347-8](https://doi.org/10.1016/0022-247x(89)90347-8)
- [13] Mezzadri, F. and Galligani, E. (2021) Projected Splitting Methods for Vertical Linear Complementarity Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **193**, 598-620. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01922-y>
- [14] Li, C. and Wu, S. (2024) The Projected-Type Method for the Extended Vertical Linear Complementarity Problem Revisited. *Journal of Global Optimization*, **93**, 535-550. <https://doi.org/10.1007/s10898-024-01392-2>
- [15] Neumaier, A. (1991) Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526473>

- [16] Moore, R.E. (1966) Interval Analysis. Prentice-Hall.
- [17] Moore, R.E. (1979) Methods and Applications of Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611970906>