Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(2), 370-381
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.152078

Hans汉斯

不确定离散Delta系统的有限时间稳定性分析

叶　颖

福建师范大学数学与统计学院，福建　福州

收稿日期：2026年1月12日；录用日期：2026年2月6日；发布日期：2026年2月14日

摘　要

针对参数不确定和外部扰动下的离散Delta系统，研究其有限时间稳定性问题。通过引入Delta算子描述离散系统，避免传统移位算子在高速采样下的数值病态问题。利用Lyapunov稳定性理论、young不等式等数学方法，建立系统有限时间稳定的充分条件。通过构造二次型Lyapunov函数，结合参数不确定性的范数有界条件和外部扰动的能量有界假设，推导出以LMI形式表示的稳定性判据。数值算例结果表明，所提方法不仅能有效保证系统有限时间稳定，更通过多采样周期对比仿真，凸显了Delta算子在高速采样下相较于传统方法的独特优势，即优异的数值一致性与稳定性，为高速采样场景下离散控制系统的分析与设计提供了更可靠的理论工具。

关键词

Delta算子系统，有限时间稳定性，参数不确定性

Finite-Time Stability Analysis for Uncertain Discrete-Time Delta Systems

Ying Ye

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: January 12, 2026; accepted: February 6, 2026; published: February 14, 2026

Abstract

This paper addresses the finite-time stability problem for discrete-time Delta systems subject to parameter uncertainties and external disturbances. The Delta operator is introduced to describe the discrete system, effectively avoiding the numerical ill-conditioning issues associated with traditional shift operators under high-speed sampling conditions. Utilizing Lyapunov stability theory, Young’s inequality, and other mathematical tools, sufficient conditions for finite-time stability are established. By constructing a quadratic Lyapunov function, combined with the norm-bounded condition

文章引用: 叶颖. 不确定离散 Delta 系统的有限时间稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 370-381.
DOI: 10.12677/aam.2026.152078

for parametric uncertainties and the energy-bounded assumption for external disturbances, a stability criterion expressed in the form of Linear Matrix Inequalities (LMIs) is derived. Numerical results demonstrate that the proposed method not only effectively ensures finite-time stability but also, through multi-rate sampling comparison simulations, highlights the unique advantages of the Delta operator in high-speed sampling scenarios—namely, superior numerical consistency and stability. This work provides a more reliable theoretical tool for the analysis and design of discrete control systems in high-speed sampling applications.

Keywords

Delta Operator Systems, Finite-Time Stability, Parameter Uncertainties

1. 引言

随着工业自动化的发展，离散采样控制在工程中被广泛应用，高速采样场景对系统鲁棒性与稳定性的要求日益严格。传统前向移位算子在高速采样场景下易出现数值病态问题，控制精度被严重影响，这一问题推动 Delta 算子理论的快速发展。20 世纪 80 年代中期，Goodwin 和 Middleton [1]首次提出 Delta 算子理论，实现连续与离散系统的统一，有效规避高速采样场景下数值的不稳定，奠定不确定离散系统分析基础。李惠光等诸多学者[2]在国内首部 Delta 算子专著中，系统阐述了 Delta 算子的理论基础，推动其在国内的发展。

参数摄动、外部干扰等不确定因素常影响实际系统。区别于渐进稳定性，Weiss 与 Infante [3]最早在控制理论一文中正式提出有限时间稳定性，其关注系统在指定时间区间内的瞬态性能。Haddad 等人[4]为离散系统建立了有限时间稳定性的 Lyapunov 定理与逆定理，为判据设计提供了理论依据。因此，研究不确定离散 Delta 系统有限时间稳定性，需解决 Delta 算子建模、不确定性处理和有限时间稳定性分析三个核心问题。

Delta 算子的优势在于数值稳定性和统一描述能力。对不确定性的处理主要采取两种方案：参数不确定性常用范数有界描述[5] [6]，外部扰动多假设能量有界[7]。张端金等人[8]在 Delta 系统中引入矩阵测度方法，为其鲁棒性能分析提供了便捷工具。近年来，Silva 等人[9]将自适应 Delta 调制技术用于处理网络化系统中的有界扰动。在 Delta 系统中，有限时间稳定性分析主要采用 Lyapunov 函数与线性矩阵不等式相结合的方法[5] [[6] [10]。Qin 等人[10]将平均驻留时间与 Delta 算子结合，处理了切换系统中，有限时间控制。Zhao 等人[11]提出的模态依赖平均驻留时间方法，同样也为切换系统分析提供了有效工具。

国外研究注重理论与方法创新。Ordaz 等人[7]研究了不确定扰动系统的有限时间镇定。Mazenc 等人[12]近期聚焦于离散系统的有限时间输入－状态稳定性。应用方面，Silva 等人[9]将自适应 Delta 调制应用于网络化系统。Kawano 等人[13]关于时延系统收缩性分析的研究，为有限时间收敛分析提供了新视角。国内研究侧重工程应用与方法创新。在稳定性分析方面，叶树霞等人[5]研究了状态饱和时滞系统的鲁棒稳定性。在控制策略上：李惠等人[14]在 Delta 算子框架下研究了混沌系统的滑模同步控制；何舒平等人[15]设计了时滞切换系统的有限时间滑模控制器。在网络控制方面，薛春善等人[16]研究了不确定离散系统的量化反馈镇定；Zhang 等人研究了网络化 T-S 模糊系统的输出跟踪控制[17]。

本文在第 2 节中，对一类同时包含参数不确定性与外部扰动的离散 Delta 系统模型进行了描述，并明确了有限时间稳定性的概念。第 3 节基于 Lyapunov 稳定性理论、young 不等式与 LMI 等方法，推导了系统在有限时间区间内满足稳定性的充分条件，并给出了相应的稳定性判据。最后，通过数值仿真验证所提方法的正确性与有效性。

2. 问题描述与系统建模

2.1. 系统描述

考虑如下不确定离散 Delta 系统：

$$\delta x(k)=\left(A+\Delta A(k)\right)x(k)+B\omega(k) \tag{1}$$

其中 Delta 算子定义为 $\delta x(k)=\dfrac{x(k+1)-x(k)}{h}$， $h>0$ 为 Delta 算子的采样周期， $x(k)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态， $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为常数矩阵， $\Delta A(k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为参数不确定性矩阵， $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 为扰动输入矩阵， $\omega(k)\in\mathbb{R}^m$ 为外部扰动信号。

2.2. 基本假设

为便于后续分析，对系统的扰动和不确定性做出如下假设：

假设 1 (参数不确定性) 假设参数不确定性满足范数有界条件， $\exists E\in\mathbb{R}^{n\times l}$ 、 $F\in\mathbb{R}^{l\times n}$ ，使：

$$\Delta A(k)=E\sigma(k)F \tag{2}$$

其中， $\sigma(k)\in\mathbb{R}^{l\times l}$ 为未知时变矩阵，且对所有的 k 满足 $\sigma^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k)\le I$ 。

将未知的时变参数转化为含有已知矩阵 E、F 和有界未知矩阵 $\sigma(k)$ 的形式，使其适用于矩阵不等式、Lyapunov 稳定性理论等分析工具。

假设 2 (外部扰动) 假设外部扰动 $\omega(k)$ 为能量有界信号，即存在常数 $\mu>0$，使得：

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left\|\omega(k)\right\|^2\le\mu \tag{3}$$

其中，N 为预先设定的有限时间区间长度。

对外部扰动的能量有界假设，将原本不确定的扰动信号的影响量化为可约束的能量指标，为有限时间内的状态有界性分析提供了明确的输入范围。

2.3. 有限时间稳定性定义

定义 1 (修正的有限时间稳定性) [18]对于系统(1)，给定时间区间 $[0,N]$ 、正定矩阵 $P>0$ 和常数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ ，若对任意的初始状态 $x(0)$ 和满足假设 2 的外部 $\omega(k)$ 扰动， $\forall k\in[0,N]$ 成立：

$$\sup_{k\in[0,N]} x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\le\alpha^2x(0)^{\mathrm{T}}Px(0)+\beta^2\mu \tag{4}$$

则称系统在有限时间 N 内稳定，α 为状态上界系数，β 为扰动影响系数，$\alpha=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ ， $\beta=\sqrt{\gamma h}$ 。

3. Lyapunov 稳定性分析

使用二次型 Lyapunov 函数：

$$V\left(x(k)\right)=x(k)^{\mathrm{T}}Px(k) \tag{5}$$

其中，$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为待求的对称正定矩阵。

3.1. Delta 差分计算

为后续系统稳定性的分析，需计算在 Delta 算子作用下的差分 $\delta V\left(x(k)\right)$。

根据 Delta 算子的定义：

$$\delta V\left(x(k)\right)=\frac{V(x(k+1)-V(x(k)}{h}$$

结合系统方程(1)可得：

$$\begin{aligned}x(k+1)&=h\delta x(k)+x(k)\\&=h\left[\left(A+\Delta A(k)\right)x(k)+B\omega(k)\right]+x(k)\\&=h\left[\left(A+\Delta A(k)\right)x(k)\right]+x(k)+hB\omega(k)\\&=\left[h\left(A+\Delta A(k)\right)+I\right]x(k)+hB\omega(k)\end{aligned}$$

代入 Lyapunov 函数可得：

$$\begin{aligned}V\left(x(k+1)\right)&=\left[x(k)+h\delta x(k)\right]^{\mathrm{T}}P\left[x(k)+h\delta x(k)\right]\\&=x(k)^{\mathrm{T}}Px(k)+hx(k)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)+h\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}Px(k)+h^2\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\delta V\left(x(k)\right)&=\frac{x(k)^{\mathrm{T}}Px(k)+hx(k)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)+h\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}Px(k)+h^2\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)-x(k)^{\mathrm{T}}Px(k)}{h}\\&=x(k)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)+\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}Px(k)+h\left(\delta x(k)\right)^{\mathrm{T}}P\delta x(k)\\&=x(k)^{\mathrm{T}}\left[\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right)\right]x(k)+2x(k)^{\mathrm{T}}PB\omega(k)+h\cdot\Theta\end{aligned}$$

其中：$\Theta\triangleq x^{\mathrm{T}}(k)\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P\left(A+\Delta A(k)\right)x(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}PB\omega(k)+\omega^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}PB\omega(k)$。

在高速采样 $(h\to 0)$ 的条件之下，高阶项可忽略：

$$\delta V\left(x(k)\right)\approx x^{\mathrm{T}}(k)\left[\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P(A+\Delta A\left(A(k)\right)\right]x(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)PB\omega(k) \tag{6}$$

3.2. 参数不确定的处理

为保证系统的有限时间稳定性，需让 $\delta V\left(x(k)\right)<0$。

结合上述假设 1，利用基本不等式进行如下推导：

展开不确定项：

$$\begin{aligned}&\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right)\\&=A^{\mathrm{T}}P+PA+\left(\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\Delta A(k)\\&=A^{\mathrm{T}}P+PA+F^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P+PE\sigma(k)F\end{aligned}$$

定理 1 (Young 不等式) [19]对于任意矩阵 X、Y 和标量 $\varepsilon>0$，有

$$X^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}X\le\varepsilon^{-1}X^{\mathrm{T}}X+\varepsilon Y^{\mathrm{T}}Y$$

令 $Y=\sigma(k)F$， $X=E^{\mathrm{T}}P$，得到：

$$F^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P+PE\sigma(k)F\le\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P+\varepsilon F^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k)F$$

利用 $\sigma(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k)\le I$，得出：

$$F^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k)F\le F^{\mathrm{T}}IF=F^{\mathrm{T}}F$$

我们令：

$$M=A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F \tag{7}$$

综上：

$$\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right)\le M$$

3.3. 稳定性条件构造

代入 Delta 差分表达式，整理得：

$$\delta V\left(x(k)\right)\le x(k)^{\mathrm{T}}Mx(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)PB\omega(k) \tag{8}$$

其中 $M=A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F$。

为保证有限时间的稳定性，引入能量衰减条件。考虑一个增广条件：

$$\delta V\left(x(k)\right)\le\gamma\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) \tag{9}$$

其中 $\gamma>0$ 是一个待定的权重参数。结合 $\delta V\left(x(k)\right)$ 的上界，我们有：

$$\delta V\left(x(k)\right)\le x(k)^{\mathrm{T}}Mx(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)PB\omega(k)\le\gamma\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)$$

将上述不等式改写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}M & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}\le 0$$

因此需要有：

$$\begin{bmatrix}M & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\le 0 \tag{10}$$

引理 1 (Schur 补引理) [20]对给定的对称矩阵 $S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$，

其中 $S_{11}\in\mathbb{R}^{n\times n}$， $S_{22}\in\mathbb{R}^{m\times m}$，以下条件等价：

1) $S\le 0$；

2) $S_{22}<0$ 且 $S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}\le 0$。

构造一个矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F & PE\\ E^{\mathrm{T}}P & -\varepsilon I\end{bmatrix}\le 0$$

因为 $-\varepsilon I<0$，根据 Schur 补可得：

$A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F+\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P\le 0$ 即 $M\le 0$

我们需要：

$$\begin{bmatrix} M & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I \end{bmatrix} \le 0$$

将构造的矩阵嵌入，其等价于：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F & PE & PB \\ E^{\mathrm{T}}P & -\varepsilon I & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \le 0$$

4. 主要定理与证明

引理 2 (Finsler's Lemma) [21]设 $x \in \mathbb{R}^n$，矩阵 X 为 n 阶对称矩阵，$U \in \mathbb{R}^{n\times m}$、$V \in \mathbb{R}^{n\times p}$，以下两个条件等价：

1) 对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}^{m\times p}$ 满足 $\sigma^{\mathrm{T}}\sigma \le I$，有 $x^{\mathrm{T}}\left(X+U\sigma V^{\mathrm{T}}+V\sigma^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}\right)x \le 0$；

2) 存在标量 $\varepsilon > 0$，使得：$X+\varepsilon^{-1}UU^{\mathrm{T}}+\varepsilon VV^{\mathrm{T}} \le 0$。

定理 2 系统(1)在给定假设下有限时间稳定，存在对称正定矩阵 $P>0$ 和标量 $\varepsilon>0$，使得如下 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F & PE & PB \\ E^{\mathrm{T}}P & -\varepsilon I & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \le 0 \tag{11}$$

证明：假设存在 $P>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使得(11)成立。

由于 $-\gamma I<0$，$-\varepsilon I<0$，$M=A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F$ 根据引理 1 可得：

$$M-\left(-\gamma^{-1}PBB^{\mathrm{T}}P\right) \le 0$$

此条件保证了不等式

$$\delta V\left(x(k)\right) \le x(k)^{\mathrm{T}}Mx(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)PB\omega(k) \le \gamma\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) \tag{12}$$

成立。

由于 $\sum_{k=0}^{N-1}\left\|\omega(k)\right\|^2 \le \mu$ 可知：

$$\sum_{k=0}^{N-1}\delta V\left(x(k)\right) \le \gamma\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) \le \gamma\mu$$

根据 Delta 算子的定义，对上述不等式从 $j=0$ 到任意 $k-1(1\le k\le N)$ 求和，

$$\sum_{j=0}^{k-1}\delta V\left(x(j)\right)=\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k-1}\left(V\left(x(j+1)\right)-V\left(x(j)\right)\right)=\frac{V\left(x(k)\right)-V\left(x(0)\right)}{h} \le \gamma\mu$$

代入可得：

$$V\left(x(x)\right)-V\left(x(0)\right) \le \gamma\mu h \tag{13}$$

由于不等式(13)对区间 $[0 \quad N]$ 中任一 k 都成立，因此有：

$$\sup_{k\in[0 \quad N]} V\left(x(k)\right) \le V\left(x(0)\right)+\gamma\mu h$$

将 $V\left(x(k)\right)=x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$ 代入，可以得到：

$$\sup_{k\in[0\quad N]} x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\le\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}V\left(x(0)\right)+\gamma\mu h$$

根据定义 1，可得：$\alpha=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$，$\beta=\sqrt{\gamma h}$，

$$\begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right) & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}\le 0V\left(x(k)\right)=x(k)^{\mathrm{T}}Px(k)(P>0)$$

因此满足有限时间稳定性。

反之：假设系统具有有限时间稳定性，必会存在二次型 Lyapunov 函数使得此系统满足 $\delta V\left(x(k)\right)-\gamma\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\le 0$。

根据前文讨论我们有：

$$x(k)^{\mathrm{T}}\left[\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right)\right]x(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)PB\omega(k)-\gamma\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\le 0$$

构造一个二次型矩阵：

$$\begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right) & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

所以我们要求：

$$\begin{bmatrix}\left(A+\Delta A(k)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\Delta A(k)\right) & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\le 0$$

将 $\Delta A(k)=E\sigma(k)F\left(\sigma^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k)\le I\right)$ 代入

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+F^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P+PE\sigma(k)F & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\le 0$$

即 $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} PE\\ 0\end{bmatrix}\sigma(k)\begin{bmatrix} F & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} F^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix}\sigma^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}}P & 0\end{bmatrix}\le 0$

根据引理 4.1，可得：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F+\varepsilon^{-1}PEE^{\mathrm{T}}P & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\end{bmatrix}\le 0$$

应用 Schur 补引理，上述不等式等价于：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon F^{\mathrm{T}}F & PE & PB\\ E^{\mathrm{T}}P & -\varepsilon I & 0\\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma I\end{bmatrix}\le 0$$

因此，若 LMI 条件满足，则系统是有限时间稳定的，该条件为充分条件。

5. 数值算例

定义 1 中有限时间稳定性的边界参数 α 和 β 与 Lyapunov 矩阵 P 及标量 γ 存在固有的耦合关系：

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}，\quad \beta=\sqrt{\gamma h}$$

其中 γ 为 LMI 中引入的扰动抑制参数。这种耦合意味着 α 和 β 不能作为自由参数独立预设，而是由稳定性分析中待求的矩阵 P 和参数 γ 后验决定。本文通过定理 2 的 LMI 条件将稳定性分析转化为一个线性矩阵不等式的可行性问题，即直接寻找一组满足约束的可行解 (P,ε,γ)。此方法的核心优势在于，它绕过了直接预设 α 和 β 的困难，将问题转化为一个可通过标准数值工具直接求解的可行性问题。

为了将上述理论框架与具体的工程性能指标相联系，我们进一步引入两个预先给定的正常数 c_1 和 c_2 作为有限时间稳定性的设计边界。它们分别代表了系统状态演化中，由初始状态和外部扰动所允许的独立影响上界。最终的稳定性验证目标，是确保由 LMI 解算出的实际边界满足：

$$\alpha^2\cdot\left(x(0)^\top Rx(0)\right)+\beta^2\cdot\mu\le c_1^2\cdot\left(x(0)^\top Rx(0)\right)+c_2^2\cdot\mu$$

其中 $R>0$ 为给定的权重矩阵。因此，整个 LMI 可行性求解过程，即是在验证系统能否满足由 c_1 和 c_2 设定的有限时间稳定性目标。在接下来的数值算例中，我们将具体演示这一验证流程。

考虑二维不确定离散 Delta 系统(1)，参数如下：

采样周期：$h=0.01$

系统矩阵：$A=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0 & -0.3\end{bmatrix}$

扰动矩阵：$G=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$

不确定性参数：$E_a=\begin{bmatrix}0.05\\ 0.05\end{bmatrix}$，$E_b=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\end{bmatrix}$

不确定性时变矩阵：$\Sigma(k)=\sin(k)$，满足 $\Sigma^{\mathrm{T}}(k)\Sigma(k)\le 1$

外部扰动：$\omega(k)=-0.2\mathrm{e}^{-0.1k}\cos(k)$

初始状态：$x(0)=[1.0,-0.5]^{\mathrm{T}}$

有限时间稳定性参数：

时间区间：$N=50$

正定矩阵：$R=I_2$

边界常数：$c_1=1.5, c_2=3.0$

应用 MATLB 的 LMI 工具箱求解定理 2 中 LMI 条件(11)，得到可行解：

$$P=\begin{bmatrix}2.356 & 0.123\\ 0.123 & 1.987\end{bmatrix}，\quad \varepsilon=0.85，\quad \gamma=0.62$$

LMI 可行性验证通过，表明系统满足有限时间稳定性条件。得到的仿真实验图如下图 1~4。

在相同的连续时间系统、不确定性、外部扰动及初始条件下，仅改变离散化时的采样周期 h，观察并对比发现 Delta 算子在从常规到高速的采样范围内，始终能保持状态轨迹的一致性、理论边界的有效性及正的稳定性裕度，从而充分验证了其在高速采样系统中的优越性。得到的仿真实验图如下图 5~7。

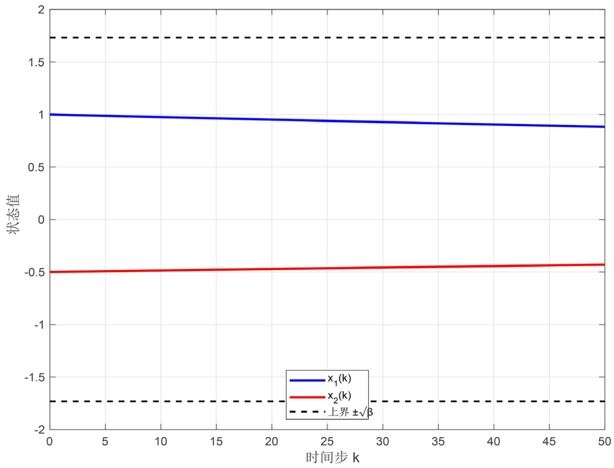

Figure 1. System state trajectory
图 1. 系统状态轨迹

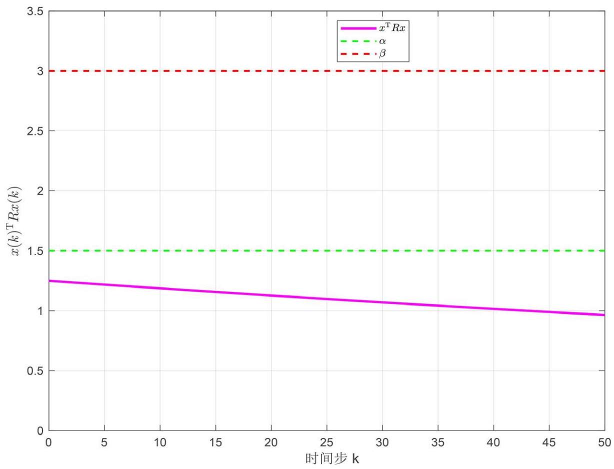

Figure 2. Weighted state norm evolution
图 2. 加权状态范数演化

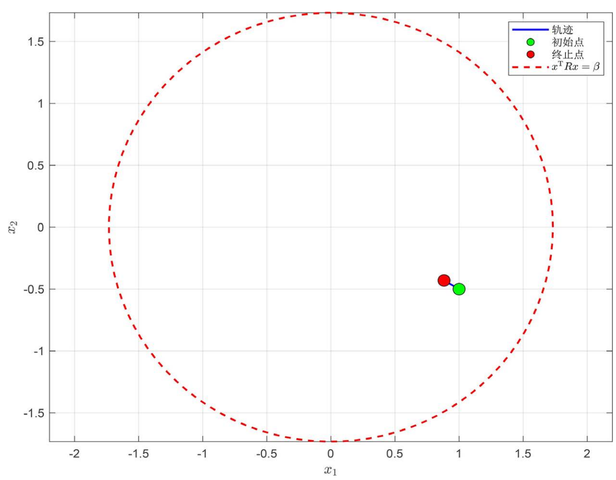

Figure 3. State phase plane trajectory
图 3. 状态相平面轨迹

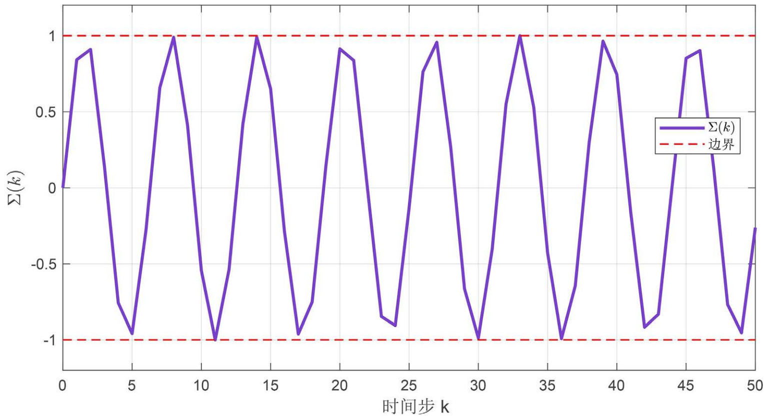

Figure 4. Uncertainty parameters
图 4. 不确定性参数

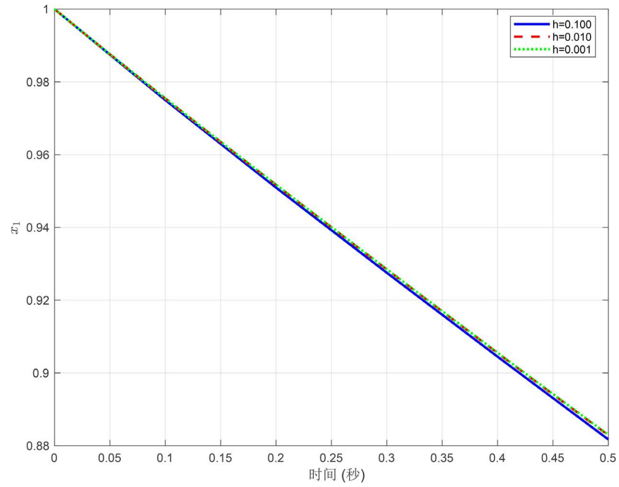

Figure 5. State trajectory x_1 comparison
图 5. 状态轨迹 x_1 对比

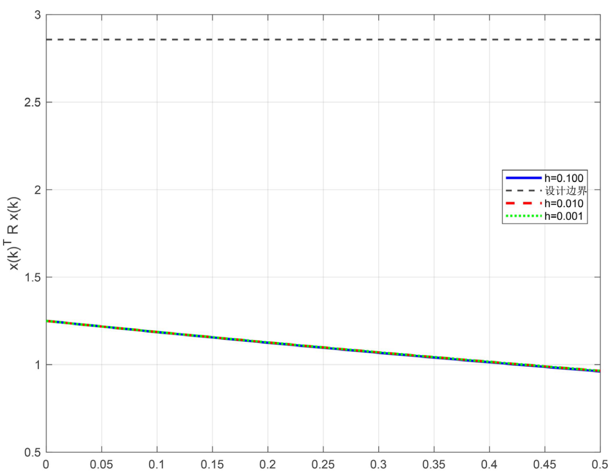

Figure 6. Weighted state norm comparison
图 6. 加权状态范数对比

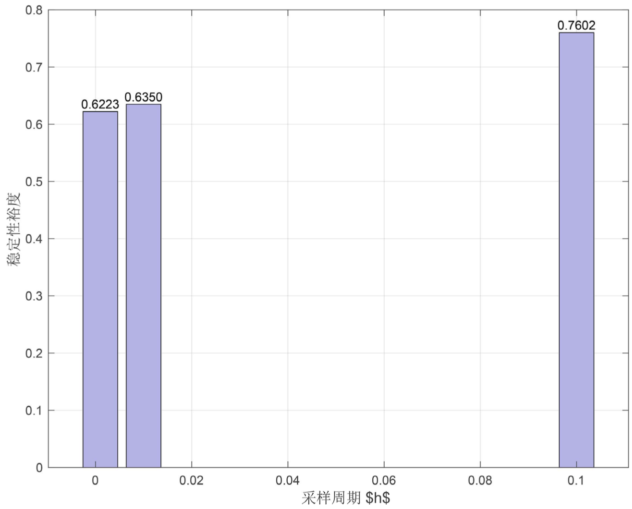

Figure 7. Stability margin comparison
图 7. 稳定性裕度对比

6. 结论与展望

本文研究了不确定离散 delta 系统的有限时间稳定性问题。通过引入 Delta 算子来描述离散模型，可避免传统移位算子在高速采样场景下产生的数值病态问题。利用 Lyapunov 稳定性和 young 不等式、LMI 等数学方法，建立系统有限时间稳定性的充分条件。通过仿真实验验证了所提方法的有效性，通过多采样周期对比表明，Delta 算子在高速采样下仍能保持优异的数值稳定性和理论一致性。

参考文献

[1] Middleton, R.H. and Goodwin, G.C. (1990) Digital Control and Estimation: A Unified Approach. Prentice Hall Professional Technical Reference. https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/574885

[2] 李惠光. Delta 算子控制及其鲁棒控制理论基础: 统一连续域、离散域的控制理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[3] Weiss, L. and Infante, E. (1967) Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **12**, 54-59. https://doi.org/10.1109/tac.1967.1098483

[4] Haddad, W.M. and Lee, J. (2020) Finite-Time Stability of Discrete Autonomous Systems. *Automatica*, **122**, Article 109282. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109282

[5] 叶树霞, 王为群. 具有状态饱和二维离散不确定时滞系统的鲁棒稳定性分析[J]. 南京理工大学学报, 2010, 34(S1): 101-105.

[6] 肖小石, 毛志忠. 不确定离散时滞大系统的鲁棒稳定性[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2011, 32(2): 179-182.

[7] Ordaz, P., Alazki, H., Sánchez, B. and Ordaz-Oliver, M. (2023) On the Finite Time Stabilization via Robust Control for Uncertain Disturbed Systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **33**, 71-82. https://doi.org/10.34768/amcs-2023-0006

[8] 张端金, 杨成梧, 吴捷. Delta 算子系统的鲁棒性能分析[J]. 自动化学报, 2000, 26(6): 848-852.

[9] Silva, J.M., Costa, R.R. and Souza, F.E. (2025) Adaptive Delta Modulation in Networked Controlled Systems with Bounded Disturbances. *IEEE Access*, **13**, 28901-28912.

[10] Qin, C., Xiang, Z. and Karimi, H.R. (2014) Finite-Time H∞ Control for Switched Systems with Time-Varying Delay Using Delta Operator Approach. International Journal of Control, Automation and Systems, 12, 1150-1159. https://doi.org/10.1007/s12555-014-0005-8

[11] Zhao, X., Zhang, L., Shi, P. and Liu, M. (2012) Stability and Stabilization of Switched Linear Systems with Mode-Dependent Average Dwell Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 1809-1815. https://doi.org/10.1109/tac.2011.2178629

[12] Mazenc, F. and Malisoff, M. (2024) Fixed-Time Input-to-State Stabilization of Discrete-Time Systems. *IEEE Control*

Systems Letters, **8**, 2625-2630. https://doi.org/10.1109/lcsys.2024.3499752

[13] Kawano, Y. and Hosoe, Y. (2025) Contraction Analysis of Almost Surely Monotone Discrete-Time Systems with Unknown Time Delay. *IEEE Control Systems Letters*, **9**, 426-431. https://doi.org/10.1109/lcsys.2025.3574230

[14] 李惠, 郑柏超, 吴跃文. Delta 算子框架下混沌系统的鲁棒滑模同步控制[J]. 电光与控制, 2022, 29(7): 37-42+68.

[15] 何舒平, 艾琦珑. 基于有限时间的一类时滞非线性切换系统滑模控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 655-660.

[16] 薛春善, 童艳春, 王岩岩, 等. 不确定离散系统量化反馈镇定[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(2): 34-39.

[17] Zhang, D., Han, Q.L. and Jia, X. (2015) Network-Based Output Tracking Control for a Class of T-S Fuzzy Systems That Can Not Be Stabilized by Nondelayed Output Feedback Controllers. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **45**, 1511-1524. https://doi.org/10.1109/tcyb.2014.2354421

[18] Amato, F., Ariola, M. and Dorato, P. (2001) Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances. *Automatica*, **37**, 1459-1463. https://doi.org/10.1016/s0005-1098(01)00087-5

[19] 张愿章. Young 不等式的证明及应用[J]. 河南科学, 2004, 22(1): 23-29.

[20] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[21] 刘健辰. 基于 Finsler 引理的时滞系统分析与综合[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2011.