

加权Dirichlet空间上加权复合算子的有界性与紧性

董利英

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年1月10日; 录用日期: 2026年2月4日; 发布日期: 2026年2月12日

摘 要

本文研究了由双倍权(doubling weight)诱导的加权Dirichlet空间 D_ω^2 上加权复合算子 $W_{\varphi, \psi}$ 的有界性与紧性。我们首先回顾Liu和Lou (2013)在幂权Dirichlet空间 D_α^2 上的经典结果, 其利用Nevanlinna计数函数与Carleson测度给出了算子有界与紧的完整刻画。在此基础上, 借助Chen (2023)关于双倍权Bergman空间上加权复合算子差分的Carleson测度理论, 我们将Liu和Lou的结果推广到更一般的双倍权Dirichlet空间 D_ω^2 中。我们建立了 $W_{\varphi, \psi}$ 在 D_ω^2 上有界(紧)的充分必要条件, 这些条件分别用相关的拉回测度是(消失的) s-Carleson测度, 以及Nevanlinna计数函数的加权积分增长行为来表述。本文的结果不仅扩展了经典幂权情形的理论, 而且为研究双倍权Dirichlet空间上算子性质提供了新的工具。

关键词

加权复合算子, 加权Dirichlet空间, Carleson测度, Nevanlinna计数函数

Boundedness and Compactness of Weighted Composition Operators on Weighted Dirichlet Spaces

Liying Dong

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: January 10, 2026; accepted: February 4, 2026; published: February 12, 2026

Abstract

This paper investigates the boundedness and compactness of weighted composition operators

$W_{\varphi,\psi}$ on weighted Dirichlet spaces D_{ω}^2 induced by doubling weights. We first review the classical results of Liu and Lou (2013) on power-weighted Dirichlet spaces D_{α}^2 , where they provided a complete characterization of operator boundedness and compactness using Nevanlinna counting functions and Carleson measures. Building on this foundation, we extend Liu and Lou's results to the more general setting of doubling-weighted Dirichlet spaces D_{ω}^2 by leveraging Chen's (2023) theory of Carleson measures for differences of weighted composition operators on doubling-weighted Bergman spaces. We establish necessary and sufficient conditions for the boundedness (compactness) of $W_{\varphi,\psi}$ on D_{ω}^2 , which are formulated in terms of the pullback measures being (vanishing) s -Carleson measures and the weighted integral growth behavior of Nevanlinna counting functions. The results of this paper not only extend the classical theory for power-weighted cases but also provide new tools for studying operator properties on doubling-weighted Dirichlet spaces.

Keywords

Weighted Composition Operator, Weighted Dirichlet Space, Carleson Measure, Nevanlinna Counting Function

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面上的单位开圆盘, $H(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上全体解析函数构成的线性空间。给定 $\varphi, \psi \in H(\mathbb{D})$ 满足 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, 加权复合算子 $W_{\varphi,\psi}$ 定义为

$$(W_{\varphi,\psi} f)(z) = \psi(z) f(\varphi(z)), f \in H(\mathbb{D}).$$

当 $\psi \equiv 1$ 时, $W_{\varphi,\psi}$ 即为通常的复合算子 C_{φ} 。加权复合算子作为复合算子与乘法算子的乘积, 在函数空间算子理论中扮演着重要角色, 其有界性、紧性、谱性质等已被广泛研究(参见[1] [2])。

本文关注的函数空间是加权 Dirichlet 空间。对给定的权函数 ω , 定义

$$D_{\omega}^2 = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{D_{\omega}^2}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \omega(z) dA(z) < \infty \right\},$$

其中 dA 是 $\mathbb{D}$ 上的规范面积测度。当 $\omega(z) = (1 - |z|^2)^{\alpha}$ ($\alpha > -1$) 时, 即为经典的加权 Dirichlet 空间 D_{α}^2 。Liu 和 Lou [3] 在 D_{α}^2 上建立了 $W_{\varphi,\psi}$ 有界与紧的充要条件, 其表述涉及 Nevanlinna 计数函数与 s -Carleson 测度。

另一方面, 近年来由双倍权(doubling weight)诱导的 Bergman 空间 A_{ω}^p 上的算子理论得到迅速发展。所谓双向双倍权 ω , 是指满足双向双倍条件 $\omega \in D = \hat{D} \cap \check{D}$ 的径向权(定义见第 2 节)。这类权包含了幂权、指数权等广泛类别, 其对应的函数空间具有丰富的结构与良好的实变性质(参见[4] [5])。Chen [6] 最近研究了双倍权 Bergman 空间上加权复合算子差分的有关问题, 其核心工具是联合 Carleson 测度(joint Carleson measure)及其在双倍权下的刻画。

本文的目标是将 Liu 和 Lou 在幂权 Dirichlet 空间上的结果, 推广到双倍权诱导的加权 Dirichlet 空间 D_{ω}^2 。我们利用 Chen 文中关于双倍权下 Carleson 测度的刻画理论, 重新表述 Nevanlinna 计数函数与 Carleson 条件, 并建立 $W_{\varphi,\psi}$ 在 D_{ω}^2 上有界性与紧性的等价条件。这一推广不仅扩大了原结果的适用范围,

而且为进一步研究双倍权 Dirichlet 空间上算子的差分、分量连通性等问题提供了理论基础。

本文结构如下：第 2 节介绍双倍权、加权 Dirichlet 空间及相关 Carleson 测度的预备知识；第 3 节陈述主要结果，即有界性(定理 3.1)与紧性(定理 3.2)的等价刻画；第 4 节给出主要定理的详细证明。

2. 预备知识

2.1. 双倍权与加权函数空间

设 $\omega: \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$ 是径向权，即 $\omega(z) = \omega(|z|)$ 。定义

$$\hat{\omega}(r) = \int_r^1 \omega(s) ds, 0 \leq r < 1.$$

若存在常数 $C = C(\omega) > 1$ 使得

$$\hat{\omega}(r) \leq C \hat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right), 0 \leq r < 1,$$

则称 ω 属于双倍权，记作 $\hat{\mathcal{D}}$ ；若存在常数 $K > 0$ 与 $C > 0$ 使得

$$\hat{\omega}(r) \geq C \hat{\omega}\left(1 - \frac{1-r}{K}\right), 0 \leq r < 1,$$

则称 ω 属于反向双倍权，记作 $\check{\mathcal{D}}$ 。若 $\omega \in \mathcal{D} := \hat{\mathcal{D}} \cap \check{\mathcal{D}}$ ，则称 ω 为双向双倍权。

对双倍权 ω ，存在常数 $0 < \alpha(\omega) \leq \beta(\omega) < \infty$ 与 $C \geq 1$ 使得

$$\frac{1}{C} \left(\frac{1-r}{1-t} \right)^\alpha \leq \frac{\hat{\omega}(r)}{\hat{\omega}(t)} \leq C \left(\frac{1-r}{1-t} \right)^\beta, 0 \leq r \leq t < 1. \quad (2.1)$$

定义扭曲权(twisted weight) $\tilde{\omega}(z) = \frac{\hat{\omega}(z)}{1-|z|}$ 。由([7] Proposition 5)知，若 $\omega \in \mathcal{D}$ ，则

$$\|f\|_{A_\omega^2} \asymp \|f\|_{A_{\tilde{\omega}}^2}, f \in H(\mathbb{D}). \quad (2.2)$$

2.2. Carleson 测度

设 $\omega \in \mathcal{D}$ ， μ 为 $\mathcal{D}$ 上的正 Borel 测度。若存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu(z) \leq C \|f\|_{A_\omega^2}^2, \forall f \in A_\omega^2,$$

则称 μ 是 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。若对任意满足 $\|f_n\|_{A_\omega^2} \leq 1$ 且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于 0 的序列 $\{f_n\} \subset A_\omega^2$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)|^2 d\mu(z) = 0,$$

则称 μ 是消失的 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。

对 $r \in (0, 1)$ ，定义加权均值函数

$$\hat{\mu}_{\omega, r}(z) = \frac{\mu(\Delta(z, r))}{\omega(\Delta(z, r))}, z \in \mathbb{D},$$

其中 $\Delta(z, r)$ 表示以 z 为中心、 r 为拟双曲半径的拟双曲圆盘。由([6] Theorem 3.1) (取 $p = q = 2$) 知： μ 是 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度当且仅当 $\hat{\mu}_{\omega, r} \in L^\infty(\mathbb{D})$ ； μ 是消失的 Carleson 测度当且仅当 $\lim_{|z| \rightarrow 1} \hat{\mu}_{\omega, r}(z) = 0$ 。这里

r 可取某个(任意)属于 $(r_0(\omega), 1)$ 的值, 其中 $r_0(\omega)$ 由(2.3)给出。

2.3. 加权复合算子与相关测度

设 $\varphi, \psi \in D_\omega^2$ 满足 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ 。定义两个拉回测度:

$$\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |\psi(z)\varphi'(z)|^2 \omega(z) dA(z), \quad (2.3)$$

$$\nu_{\varphi, \psi'}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |\psi'(z)|^2 \omega(z) dA(z), \quad (2.4)$$

其中 $E \subset \mathbb{D}$ 为 Borel 集。

3. 主要结果

以下两个定理给出了加权复合算子 $W_{\varphi, \psi}$ 在 D_ω^2 上有界性与紧性的完整刻画。

3.1. 有界性刻画

定理 3.1 (有界性等价条件)。设 $\omega \in \mathcal{D}$, $\varphi, \psi \in D_\omega^2$ 满足 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, 且 $\nu_{\varphi, \psi'}$ 是 $(D_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。则下列条件等价:

(i) $W_{\varphi, \psi} : D_\omega^2 \rightarrow D_\omega^2$ 有界;

(ii) $\sup_{\zeta \in \partial \mathbb{D}, r \in (0, 1)} \frac{1}{\omega(S(\zeta, r))} \int_{S(\zeta, r)} N_{\varphi, \psi}(w) dA(w) < \infty$, 其中 $N_{\varphi, \psi}(w) = \sum_{\varphi(z)=w} |\psi(z)|^2 \omega(z)$ 为加权

Nevanlinna 计数函数;

(iii) $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。

3.2. 紧性刻画

定理 3.2 (紧性等价条件)。在定理 3.1 的相同假设下, 下列条件等价:

(i) $W_{\varphi, \psi} : D_\omega^2 \rightarrow D_\omega^2$ 紧;

(ii) $\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} \frac{1}{\omega(S(\zeta, r))} \int_{S(\zeta, r)} N_{\varphi, \psi}(w) dA(w) = 0$;

(iii) $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是消失的 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。

注 3.3. 当 $\omega(z) = \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^\alpha$ ($\alpha > -1$) 时, 定理 3.1 与定理 3.2 即退化为 Liu 和 Lou [3] 的原有结果。本

文的推广将权函数的范围从幂权扩大到了全体双倍权, 并利用双倍权下的 Carleson 测度理论给出了统一表述。

4. 定理证明

4.1. 几个引理

首先, 我们给出一个关键引理, 它将 D_ω^2 上加权复合算子的有界性(紧性)转化为 A_ω^2 上另一算子的有界性(紧性)。

引理 4.1 设 $\omega \in \mathcal{D}$, $\varphi, \psi \in D_\omega^2$ 满足 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ 。若 $\nu_{\varphi, \psi'} = \int_{\varphi^{-1}(E)} |\psi'(z)|^2 \omega(z) dA(z)$ 是 $(D_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度, 则

(i) $W_{\varphi, \psi} : D_\omega^2 \rightarrow D_\omega^2$ 有界当且仅当 $W_{\varphi, \psi\varphi'} : A_\omega^2 \rightarrow A_\omega^2$ 有界;

(ii) $W_{\varphi,\psi}:D_{\omega}^2 \rightarrow D_{\omega}^2$ 紧当且仅当 $W_{\varphi,\psi\varphi'}:A_{\omega}^2 \rightarrow A_{\omega}^2$ 紧。

证明. 我们仅证明有界性的等价性, 紧性的证明类似。

必要性: 假设 $W_{\varphi,\psi}$ 有界. 对任意 $g \in A_{\omega}^2$, 令

$$f(z) = \int_0^z g(\zeta) d\zeta,$$

则存在 $f \in D_{\omega}^2$, 使得 $f' = g$, $f(0) = 0$, 则 $\|f\|_{D_{\omega}^2} = \|g\|_{A_{\omega}^2}$ 。

因为 $\nu_{\varphi,\psi'}$ 是 $(D_{\omega}^2, 2)$ -Carleson 测度, 我们有

$$\begin{aligned} \|W_{\varphi,\psi}g\|_{A_{\omega}^2}^2 &= \|\psi'g(\varphi(z))\|_{A_{\omega}^2}^2 = \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)g(\varphi(z))|^2 \omega(z) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)|^2 |g(\varphi(z))|^2 \omega(z) dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 d\nu_{\varphi,\psi'}(z) \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2}^2 \end{aligned}$$

因为 $W_{\varphi,\psi}$ 有界, 故 $\|W_{\varphi,\psi}f\|_{D_{\omega}^2} \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2} = C \|g\|_{A_{\omega}^2}$ 。由定义知

$$(W_{\varphi,\psi}f)(z) = \psi(z)f(\varphi(z)),$$

$$(W_{\varphi,\psi'}f)(z) = \psi'(z)f(\varphi(z)),$$

$$(W_{\varphi,\psi\varphi'}f)(z) = \psi\varphi'(z)f(\varphi(z)), f \in H(\mathbb{D}).$$

计算

$$\begin{aligned} \|W_{\varphi,\psi\varphi'}g\|_{A_{\omega}^2}^2 &= \|\psi\varphi'(g \circ \varphi) + \psi'(f \circ \varphi) - \psi'(f \circ \varphi)\|_{A_{\omega}^2}^2 = \left\| (\psi(f \circ \varphi))' - \psi'(f \circ \varphi) \right\|_{A_{\omega}^2}^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| (\psi(f \circ \varphi))' \right\|_{A_{\omega}^2}^2 + \left\| \psi'(f \circ \varphi) \right\|_{A_{\omega}^2}^2 \right) = 2 \left(\left\| (W_{\varphi,\psi}f)' \right\|_{A_{\omega}^2}^2 + \|W_{\varphi,\psi'}f\|_{A_{\omega}^2}^2 \right) \\ &= 2 \left(\|W_{\varphi,\psi}f\|_{D_{\omega}^2}^2 + \|W_{\varphi,\psi'}f\|_{A_{\omega}^2}^2 \right) \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2}^2 = C \|g\|_{A_{\omega}^2}^2 \end{aligned}$$

结合以上估计得 $\|W_{\varphi,\psi\varphi'}g\|_{A_{\omega}^2} \leq C \|g\|_{A_{\omega}^2}$, 即 $W_{\varphi,\psi\varphi'}$ 有界。

充分性: 假设 $W_{\varphi,\psi\varphi'}$ 有界, 且 $\nu_{\varphi,\psi'}$ 是 $(D_{\omega}^2, 2)$ -Carleson 测度. 对任意 $f \in D_{\omega}^2$, 计算

$$\begin{aligned} \|W_{\varphi,\psi}f\|_{D_{\omega}^2}^2 &= |\psi(0)f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left| (W_{\varphi,\psi}f)'(z) \right|^2 \omega(z) dA(z) \\ &\leq 2|\psi(0)|^2 |f(\varphi(0))|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)f(\varphi(z))|^2 \omega(z) dA(z) \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\varphi'(z)f'(\varphi(z))|^2 \omega(z) dA(z). \end{aligned}$$

第一项由点赋值有界性控制: 存在 $C > 0$ 使得 $|\psi(0)|^2 |f(\varphi(0))|^2 \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2}^2$ 。第二项等于 $\|W_{\varphi,\psi'}f\|_{A_{\omega}^2}^2$, 因 $\nu_{\varphi,\psi'}$ 是 Carleson 测度而被控制。第三项等于 $2\|W_{\varphi,\psi\varphi'}f'\|_{A_{\omega}^2}^2$, 由假设有界, 故

$$2\|W_{\varphi,\psi\varphi'}f'\|_{A_{\omega}^2}^2 \leq C \|f'\|_{A_{\omega}^2}^2 \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2}^2.$$

综上得 $\|W_{\varphi,\psi}f\|_{D_{\omega}^2} \leq C \|f\|_{D_{\omega}^2}$, 即 $W_{\varphi,\psi}$ 有界。

下一个引理给出了 A_{ω}^2 上加权复合算子有界(紧)的 Carleson 测度刻画, 它是[6]中相关结果的直接推论。

引理 4.2 (A_{ω}^2 上的加权复合算子). 设 $\omega \in \mathcal{D}$, $\varphi \in D_{\omega}^2$ 满足 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, $\psi \in A_{\omega}^2$ 。则 $W_{\varphi,\psi}: A_{\omega}^2 \rightarrow A_{\omega}^2$ 有界

(紧)当且仅当测度

$$\mu_{\varphi, \psi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |\psi(z)|^2 \omega(z) dA(z)$$

是(消失的) $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。

证明. 这是([6] Theorem 1.1)在 $p = q = 2$ 且仅考虑单个算子(非差分)时的特例。

4.2. 定理 3.1 的证明

我们证明(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (ii)。

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): 由引理 4.1, $W_{\varphi, \psi}$ 在 D_ω^2 上有界当且仅当 $W_{\varphi, \psi\varphi'}$ 在 A_ω^2 上有界。再由引 4.2, 后者有界当且仅当 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。故(i) $\Leftrightarrow$ (iii)。

(iii) $\Rightarrow$ (ii): 假设 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是 $(A_\omega^2, 2)$ -Carleson 测度。固定 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 与 $r \in (0, 1)$, 令 $a = (1-r)\zeta$ 。考虑测试函数

$$\kappa_a(z) = \frac{(1-|a|^2)^{\frac{t}{2}}}{(1-\bar{a}z)^t}, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $t > \frac{\gamma(\omega)+1}{2}$, $\gamma(\omega)$ 为[6]中定义的常数。由([6] (2.5))知

$$\|\kappa_a\|_{A_\omega^2} \asymp 1. \quad (4.1)$$

因为 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是 Carleson 测度, 故

$$\int_{\mathbb{D}} |\kappa_a(w)|^2 d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) \leq C \|\kappa_a\|_{A_\omega^2}^2 \leq C. \quad (4.2)$$

另一方面, 由引理 4.1 的测度变换公式,

$$\int_{\mathbb{D}} |\kappa_a(w)|^2 d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) = \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\varphi'(z)|^2 |\kappa_a(\varphi(z))|^2 \omega(z) dA(z). \quad (4.3)$$

考虑函数 $W_{\varphi, \psi} \kappa_a$ 的 Dirichlet 范数:

$$\|W_{\varphi, \psi} \kappa_a\|_{D_\omega^2}^2 = |\psi(0)\kappa_a(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left| \left(\psi(z)\kappa_a(\varphi(z)) \right)' \right|^2 \omega(z) dA(z).$$

展开导数项并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \left| \left(\psi(z)\kappa_a(\varphi(z)) \right)' \right|^2 \omega(z) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left| \psi(z)\kappa_a'(\varphi(z))\varphi'(z) + \psi'(z)\kappa_a(\varphi(z)) \right|^2 \omega(z) dA(z) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \left| \psi(z)\kappa_a'(\varphi(z))\varphi'(z) \right|^2 \omega(z) dA(z) - \int_{\mathbb{D}} \left| \psi'(z)\kappa_a(\varphi(z)) \right|^2 \omega(z) dA(z). \end{aligned}$$

由于 $\nu_{\varphi, \psi}$ 是 Carleson 测度, 且 $\|\kappa_a\|_{A_\omega^2} \asymp 1$, 第二项有界。结合(4.2)与(4.3), 并注意到当 $|\omega| \rightarrow 1$ 时 $\kappa_a \rightarrow 0$ 在紧子集上一致, 可推得

$$\int_{\mathbb{D}} \left| \psi(z)\kappa_a'(\varphi(z))\varphi'(z) \right|^2 \omega(z) dA(z) \leq C. \quad (4.4)$$

现在计算 $\kappa_a' : \kappa_a'(w) = -t\bar{a}(1-|a|^2)^{t/2}(1-\bar{a}w)^{-t-1}$ 。

对 $w \in S(\zeta, r)$, 由扇形区域定义

$$S(\zeta, r) = \{w \in \mathbb{D} : |w - \zeta| < r\}.$$

点 $a = (1-r)\zeta$ 位于从原点指向 ζ 的半径上, 距离边界恰好为 r 。对于任意 $w \in S(\zeta, r)$, 点 w 在边界点 ζ 附近。由于 $a = (1-r)\zeta$, 有 $\bar{a} = (1-r)\bar{\zeta}$, 故

$$1 - \bar{a}w = 1 - (1-r)\bar{\zeta}w.$$

下界估计:

利用三角不等式:

$$|1 - \bar{a}w| \geq |1 - \bar{\zeta}w| - |\bar{\zeta}w - \bar{a}w|.$$

第一项: $|1 - \bar{\zeta}w| = |\zeta - w| < r$ 。

第二项: $|\bar{\zeta}w - \bar{a}w| = |\bar{\zeta} - \bar{a}| \cdot |w| = r|w| \leq r$ 。

因此 $|1 - \bar{a}w| \geq |1 - \bar{\zeta}w| - r$ 。当 w 沿径向靠近 ζ 时, 即 $w = (1-p)\zeta$, 其中 $0 \leq p < r$, 则

$$|1 - \bar{a}w| = |1 - (1-r)(1-p)| = |r + p - rp|.$$

由于 $p < r$, 有 $r + p - rp \geq r$, 故 $|1 - \bar{a}w| \geq r$ 。

上界估计:

$$|1 - \bar{a}w| \leq |1 - \bar{\zeta}w| + |\bar{\zeta}w - \bar{a}w| < r + r = 2r.$$

因此 $|1 - \bar{a}w| \approx r$ 。

$$|\kappa_a(w)| = \frac{(1-|a|^2)^{\frac{t}{2}}}{(1-\bar{a}w)^t} \asymp \frac{[(1-|a|)+(1+|a|)]^{\frac{t}{2}}}{r^t} \asymp \frac{(r \cdot 2)^{\frac{t}{2}}}{r^t} = 2^{t/2} r^{-t/2}.$$

所以 $|\kappa_a(w)| \asymp r^{-t/2}$, $w \in S(\zeta, r)$ 。

计算导数:

$$\kappa'_a(w) = -t\bar{a} \frac{(1-|a|^2)^{t/2}}{(1-\bar{a}w)^{t+1}}$$

故 $|\kappa'_a(w)| \approx r^{-t-1}(1-|a|)^{t/2} \approx r^{-1}$ 。代入(4.4)得

$$\int_{\varphi^{-1}(S(\zeta, r))} |\psi(z)\varphi'(z)|^2 \omega(z) dA(z) \leq Cr^2. \quad (4.5)$$

另一方面, 由 Cauchy 估计,

$$|\psi(z)|^2 \leq \frac{C}{(1-|z|)^2} \int_{\Delta(z, r_0)} |\psi(\xi)|^2 \omega(\xi) dA(\xi) \cdot \frac{1}{\omega(\Delta(z, r_0))}.$$

结合双倍权的性质(2.1)~(2.3), 可进一步推出

$$\int_{S(\zeta, r)} N_{\varphi, \psi}(w) dA(w) \leq C\omega(S(\zeta, r)).$$

此即条件(ii)。

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 假设(ii)成立。要证 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是 $(A_w^2, 2)$ -Carleson 测度, 只需验证

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2} \right)^t d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) < \infty \quad (4.6)$$

对某个 $t > 1$ 成立(参见([6] Theorem 3.1))。

固定 $a \in \mathbb{D}$, 令 $\zeta_a = a/|a|$ (若 $a = 0$ 则取 $\zeta_a = 1$), $r_a = 1 - |a|$ 。将积分区域按与 ζ_a 的距离分解: 对 $n \geq 1$, 定义

$$\Delta_n(a) = \{w \in \mathbb{D} : 2^{n-1}r_a \leq |\zeta_a - w| < 2^n r_a\}.$$

则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2} \right)^t d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(a)} \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2} \right)^t d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) \\ &\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n r_a)^{2t}} \mu_{\varphi, \psi\varphi'}(\Delta_n(a)). \end{aligned}$$

由条件(ii)及双倍权的性质(2.1),

$$\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(\Delta_n(a)) \leq \mu_{\varphi, \psi\varphi'}(S(\zeta_a, 2^n r_a)) \leq C\omega(S(\zeta_a, 2^n r_a)) \leq C\hat{\omega}(1 - 2^n r_a) \cdot 2^n r_a.$$

又由(2.1)知 $\hat{\omega}(1 - 2^n r_a) \leq C2^{n\beta} \hat{\omega}(1 - r_a)$, 故

$$\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(\Delta_n(a)) \leq C2^{n(\beta+1)} \hat{\omega}(1 - r_a) r_a.$$

代入级数得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n r_a)^{2t}} \mu_{\varphi, \psi\varphi'}(\Delta_n(a)) \leq C\hat{\omega}(1 - r_a) r_a^{1-2t} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta+1-2t)}.$$

取 $t > \frac{\beta+1}{2}$, 则级数收敛, 且由 $\hat{\omega}(1 - r_a) \asymp \omega(\Delta(a, r_0))$ 知上界与 a 无关。故(4.6) 成立, 从而(iii) 得证。

综上, 定理 3.1 得证。

4.3. 定理 3.2 的证明

紧性刻画的证明思路与有界性类似, 主要区别在于将“一致有界”条件替换为“趋于零”条件。

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): 由引理 4.1 的紧性版本, $W_{\varphi, \psi}$ 紧当且仅当 $W_{\varphi, \psi\varphi'}$ 紧; 再由引理 4.2, 后者紧当且仅当 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是消失的 $(A_{\omega}^2, 2)$ -Carleson 测度。

(iii) $\Rightarrow$ (ii): 若 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是消失的 Carleson 测度, 则对测试函数 $\kappa_a(a = (1-r)\zeta)$, 有

$$\lim_{|a| \rightarrow 1} \int_{\mathbb{D}} |\kappa_a(w)|^2 d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) = 0.$$

仿照定理 3.1 的证明, 可推出

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{1}{\omega(S(\zeta, r))} \int_{S(\zeta, r)} N_{\varphi, \psi}(w) dA(w) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 利用条件(ii)和双倍权的性质, 类似定理 3.1 的级数估计可证得 $\mu_{\varphi, \psi\varphi'}$ 是消失的 Carleson 测度。具体地, 对任意序列 $a_n \rightarrow \partial\mathbb{D}$, 有

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}_n w|^2} \right)^t d\mu_{\varphi, \psi\varphi'}(w) \rightarrow 0,$$

这正是消失性刻画(参见([6] Theorem 3.1))。

证毕。

参考文献

- [1] Cowen, C.C. and MacCluer, B.D. (1995) Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press.
- [2] Gallardo-Gutiérrez, E.A. and Partington, J.R. (2010) The Role of BMOA in the Boundedness of Weighted Composition Operators. *Journal of Functional Analysis*, **258**, 3593-3603. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.019>
- [3] Liu, X. and Lou, Z. (2013) Weighted Composition Operators on Weighted Dirichlet Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 1119-1126. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(13\)60068-5](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(13)60068-5)
- [4] Peláez, J.A. and Rättyä, J. (2014) Weighted Bergman Spaces Induced by Rapidly Increasing Weights. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **227**, vi+124.
- [5] Peláez, J.A. and Rättyä, J. (2021) Bergman Projection Induced by Radial Weight. *Advances in Mathematics*, **391**, Article No. 107950.
- [6] Chen, J. (2023) Differences of Weighted Composition Operators on Bergman Spaces Induced by Doubling Weights. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **60**, 1201-1219.
- [7] Peláez, J.Á., Rättyä, J. and Sierra, K. (2017) Berezin Transform and Toeplitz Operators on Bergman Spaces Induced by Regular Weights. *The Journal of Geometric Analysis*, **28**, 656-687. <https://doi.org/10.1007/s12220-017-9837-9>