Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(2), 397-407
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.152080

一类基于非线性传染率与出生率的传染病模型

张　琦[1]，吕晓静[2]，李怀兴[3*]，王娇艳[1]

[1]天津职业技术师范大学理学院，天津
[2]新疆和田学院数理学院，新疆 和田
[3]天津理工大学理学院，天津

收稿日期：2026年1月12日；录用日期：2026年2月6日；发布日期：2026年2月14日

摘　要

本文研究了具有非线性出生率和非线性感染率的传染病模型。考虑疾病发生时，医院的医疗能力有限，本文在模型中加入医院容纳量进行讨论。第一，证明解的非负性和有界性；第二，计算模型的无病平衡点和基本再生数并证明无病平衡点的局部渐近稳定性；第三，讨论地方病平衡点的存在条件并给出发生后向分支的参数要求。

关键词

非线性出生率，非线性传染率，医院容纳量，后向分支

A Class of Infectious Disease Models Based on Nonlinear Incidence and Birth Rates

Qi Zhang[1], Xiaojing Lyu[2], Huaixing Li[3*], Jiaoyan Wang[1]

[1]School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin
[2]School of Mathematics and Physics, Xinjiang Hetian College, Hetian Xinjiang
[3]School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin

Received: January 12, 2026; accepted: February 6, 2026; published: February 14, 2026

Abstract

In this paper, we investigate a class of epidemic models incorporating both a nonlinear birth rate and a nonlinear incidence rate. To account for the limited medical capacity of hospitals during disease outbreaks, a hospital admission capacity is introduced into the models. First, the nonnegativity and boundedness of solutions of the models are established. Second, the disease-free equilibrium

*通讯作者。

文章引用: 张琦, 吕晓静, 李怀兴, 王娇艳. 一类基于非线性传染率与出生率的传染病模型[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 397-407. DOI: 10.12677/aam.2026.152080

and the basic reproduction number are derived, and the local asymptotic stability of the disease-free equilibrium is analyzed. Third, the conditions for the existence of the endemic equilibrium are discussed, together with the parameter requirements under which backward bifurcation may occur.

Keywords

Nonlinear Birth Rate, Nonlinear Incidence Rate, Hospital Capacity, Backward Bifurcation

1. 引言

传染病是由各类病原体引发，并且能在人与人、动物与动物或人与动物间传播的疾病，一直严重威胁人类健康与社会稳定。为了有效防控传染病，传染病模型的研究具有至关重要的意义。

1927 年 Kermack 和 Mckendrick [1]研究了 1665~1666 年伦敦的黑死病以及 1906 年孟买的瘟疫，提出了著名的 SIR 模型(易感－感染－恢复模型)，模型假设三仓室人群总数恒定。1999 年，Cooke 等在文献[2]中研究一种具有非线性出生率 $B(N)$ 的模型，该研究首次系统分析了非线性出生函数可导致平衡点稳定性的变化。文献[3]和文献[4]考虑了形如 $\frac{\beta SI^{p}}{1+\alpha I^{q}}$ 的传染率，文献[5]基于这类非线性传染率讨论了平衡点的存在性和稳定性。文献[6]结合非线性出生率和医院容纳量进行动力学分析，建立模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{A}{N}+B\right)N-\beta SI-\mu S\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-rI\left(1-\dfrac{H}{k}\right)-\gamma_1 I-\varepsilon_1 I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rI\left(1-\dfrac{H}{k}\right)-\gamma_2 H-\varepsilon_2 H-\mu H\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma_1 I+\gamma_2 H-\mu R\end{cases}$$

文献[7]在此基础上加入了白噪声影响因子，发现干扰强度越大，灭绝速度越快。文献[8]讨论了含有非线性传染率的模型具有的分支情况。

为了同时考虑非线性出生率和传染率对传染病传播的影响，本文在文献[6]的基础上加入非线性传染率进行分析，更贴合实际情况。

本文考虑的模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{A}{N}+b\right)N-\dfrac{\beta SI}{\alpha I^2+1}-\mu S\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta SI}{\alpha I^2+1}-rI\left(1-\dfrac{H}{k}\right)-v_1 I-\varepsilon_1 I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rI\left(1-\dfrac{H}{k}\right)-v_2 H-\varepsilon_2 H-\mu H\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=v_1 I+v_2 H-\mu R\end{cases} \tag{1}$$

其中 S 是易感人群，I 是无症状的感染人群，H 是住院人群，R 是康复者，$\frac{A}{N}+b$ 是非线性出生率，μ 是自然死亡率($b<\mu$)，$\frac{1}{\alpha I^2+1}$ 是描述易感者采取措施以抑制传染力(其中 $\alpha>0$ 刻画了抑制效果)，βI 是度量疾病的传染力，r 是感染者去医院就医的转移率，k 表示医院收治容量的最大值，v_1 是感染者的自愈率，v_2 是住院者的治愈率，ε_1 是感染者的因病死亡率，ε_2 是住院者的死亡率。

模型中考虑的非线性传染率为 $\frac{\beta SI}{\alpha I^2+1}$，其中 α 刻画了抑制传染力的效果。当感染人数 I 较少时，传染率近似于 βSI；当感染人数 I 增多时，传染率反而减少，这说明人群在传染病严重时会因为恐慌或社会约束自发地采取防范措施，从而减缓疾病传播。例如，SIRS 和 COVID-19 等疫情中都可以观察到此现象。模型中还考虑了饱和治疗率。

2. 解的非负性和有界性

2.1. 解的非负性

定理 1.1 给定非负的初始条件 $S(0)\ge 0$，$I(0)\ge 0$，$H(0)\ge 0$，$R(0)\ge 0$，模型(1)的解 $(S(t),I(t),H(t),R(t))$ 在 $t>0$ 时，将保持非负。

证明：假设 t_0 为第一次 $S(t)=0$ 的时刻，当 $S=0$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=A+bN(t_0)>0$$

故 $S(t)\ge 0$，$t>0$。

同理，$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=rI$。

由于 $I\ge 0$，$H\ge 0$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=v_1I+v_2H\ge 0$$

由初始时刻，$S(0)\ge 0$，$I(0)\ge 0$，$H(0)\ge 0$，$R(0)\ge 0$，得 $S\ge 0$，$I\ge 0$，$H\ge 0$，$R\ge 0$。

2.2. 解的有界性

定理 1.2 系统的解 $(S(t),I(t),H(t),R(t))$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上是一致有界的。

证明：令 $N=S+I+H+R$。

由模型(1)可得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\\&=A+bN-\mu(S+I+H+R)-\varepsilon_1I-\varepsilon_2H\\&=A+(b-\mu)N-\varepsilon_1I-\varepsilon_2I\end{aligned}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\le A+(b-\mu)N$$

因此，

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) \le \frac{A}{\mu-b}$$

即模型的解是一致有界的，并且当 $t\to\infty$ 时， $N(t)\le\dfrac{A}{\mu-b}$ 。

因此，我们可在可行域：

$$G=\left\{\left(S(t),I(t),H(t),R(t)\right)\in R_{+}^{4}:S(t),I(t),H(t),R(t)\ge 0;S(t)+I(t)+H(t)+R(t)\le\frac{A}{\mu-b}\right\}$$

内对模型(1)进行研究。

2.3. 模型假设与参数约束

为了使模型满足住院人群小于医院容纳量的要求，我们做出假设： $\dfrac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\le k$ 。其中 $S_0=\dfrac{A}{\mu-b}$ 是无病平衡状态下的易感者数量， $\dfrac{1}{v_2+\varepsilon_2+\mu}$ 表示平均住院时间。因此， $\dfrac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}$ 的生物学意义是在全部易感者被感染且需要住院的情况下，医院需要接收的最大患者数量。

定理 2.3 当 $\dfrac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\le k$ 时，若满足 $0\le H(t)\le k$ ，则模型的任意解在 $t>0$ 时都有 $H(t)\le k$ 。

证明：对于模型(1)中的

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rI\left(1-\frac{H}{k}\right)-v_2H-\varepsilon_2H-\mu H$$

由于 $I\ge 0$， $H\ge 0$，将等式进行放缩得到：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\le rI-v_2H-\varepsilon_2H-\mu H$$

在可行域 G 中 $S(t)+I(t)+H(t)+R(t)\le\dfrac{A}{\mu-b}$， 故 $I(t)\le\dfrac{A}{\mu-b}=S_0$， 即

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\le rS_0-v_2H-\varepsilon_2H-\mu H$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=rS_0-v_2H-\varepsilon_2H-\mu H$ ，其解为 $u(t)=\dfrac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}+\left(H(0)-\dfrac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\mathrm{e}^{-(v_2+\varepsilon_2+\mu)t}$ 。

根据比较定理可知：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\le u(t)$$

综上所述，可以得出：

$$H(t)\le u(t)\le\left\{H(0),\frac{rS_0}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right\}\le k$$

模型(1)在可行域 G 上基于此假设进行研究。

3. 基本再生数和无病平衡点的稳定性

3.1. 无病平衡点

无病平衡点是指疾病不存在时的稳定状态，即 $I=0$ ，则 $H=0,R=0$ 。

令模型(1)中所有导数为 0，且 $I=0$，得到无病平衡点为：

$$E_0=\left(\frac{A}{\mu-b},0,0,0\right)$$

3.2. 基本再生数

基本再生数 R_0 是流行病学中的关键参数，表示一个感染者在完全易感人群中引起的平均二次感染数量。本文采用文献[9]下一代矩阵法计算公式(1)的 R_0。

令 $x=[I,H]^{\mathrm{T}}$ 定义新感染向量 $F(x)$，转移向量 $V(x)$，感染子系统方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta\dfrac{SI}{\alpha I^2+1}-rI\left(1-\dfrac{H}{K}\right)-v_1I-\varepsilon_1I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rI\left(1-\dfrac{H}{K}\right)-v_2H-\varepsilon_2H-\mu H\end{cases}$$

则

$$F(x)=\left[\frac{\beta SI}{\alpha I^2+1},0\right]$$

$$V(x)=\left[rI\left(1-\frac{H}{K}\right)+(v_1+\varepsilon_1+\mu)I,-rI\left(1-\frac{H}{K}\right)+(v_2+\varepsilon_2+\mu)H\right]$$

在无病平衡点 $E_0=\left(\dfrac{A}{\mu-b},0,0,0\right)$ 处计算上式的 Jacibian 矩阵

$$F=\begin{bmatrix}BS_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}r+v_1+\varepsilon_1+\mu & 0\\ -r & v_2+\varepsilon_2+\mu\end{bmatrix}$$

其中，

$$V^{-1}=\frac{1}{(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)(v_2+\varepsilon_2+\mu)}\begin{bmatrix}v_2+\varepsilon_2+\mu & 0\\ r & r+v_1+\varepsilon_1+\mu\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r+v_1+\varepsilon_1+\mu} & 0\\ \dfrac{r}{(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)(v_2+\varepsilon_2+\mu)} & \dfrac{1}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\end{bmatrix}$$

下一代矩阵为：

$$K=FV^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta A}{\mu-b} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r+v_1+\varepsilon_1+\mu} & 0\\ \dfrac{r}{(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)(v_2+\varepsilon_2+\mu)} & \dfrac{1}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta A}{(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵 K 的谱半径为：

$$R_0=\frac{\beta A}{(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)}$$

3.3. 无病平衡点 E_0 的局部渐进稳定性

定理 2.1 若 $R_0<1$，则模型的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定；若 $R_0>1$， E_0 不稳定。

证明：模型在 E_0 处的 Jacibian 矩阵为：

$$J_0=\begin{bmatrix} b-\mu & b-\dfrac{\beta A}{\mu-b} & b & b \\ 0 & \dfrac{\beta A}{\mu-b}(r+v_1+\varepsilon_1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & r & -(v_2+\varepsilon_2+\mu) & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

其特征方程为：

$$|\lambda I-J_0|=\begin{vmatrix} \lambda-(b-\mu) & -b+\dfrac{\beta A}{\mu-b} & -b & -b \\ 0 & \lambda-\dfrac{\beta A}{\mu-b}+(r+v_1+\varepsilon_1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -r & \lambda+v_2+\varepsilon_2+\mu & 0 \\ 0 & -v_1 & -v_2 & \lambda+\mu \end{vmatrix}=0$$

即

$$[\lambda-(b-\mu)](\lambda+\mu)\left(\lambda-\frac{\beta A}{\mu-b}+r+v_1+\varepsilon_1+\mu\right)(\lambda+v_2+\varepsilon_2+\mu)=0$$

其特征值为： $\lambda_1=b-\mu$； $\lambda_2=-\mu$； $\lambda_3=\dfrac{\beta A}{\mu-b}-(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)$； $\lambda_4=-(v_2+\varepsilon_2+\mu)$。

易得 $\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_4<0$，当 $R_0<1$ 时，$\lambda_3<0$。所以，若 $R_0<1$，无病平衡点 E_0 局部渐近稳定；若 $R_0>1$ 时， $\lambda_3>0$， E_0 不稳定。

4. 地方病平衡点的稳定性

4.1. 地方病平衡点的存在性

若存在地方病平衡点，则其满足以下方程：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{A}{N}+b\right)N-\dfrac{\beta S^*I^*}{1+\alpha I^{*2}}-\mu S^*=0 \\ \dfrac{\beta S^*I^*}{1+\alpha I^{*2}}-rI^*\left(1-\dfrac{H^*}{k}\right)-v_1I^*-\varepsilon_1I^*-\mu I^*=0 \\ rI^*\left(1-\dfrac{H^*}{k}\right)-v_2H^*-\varepsilon_2H^*-\mu H^*=0 \\ v_1I^*+v_2H^*-\mu H^*=0 \end{cases} \tag{2}$$

通过计算可以得出：

$$H^* = \frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}$$

$$S^* = \frac{\alpha I^{*2}+1}{\beta}\left[\left(r+v_1+\varepsilon_1+\mu-\frac{r}{k}\right)\cdot\frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}\right]$$

$$R^* = \frac{v_1}{\mu}I^*+\frac{v_2}{\mu}\cdot\frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}$$

由公式(2)中的第一个等式可得：

$$A+(b-\mu)S^*+bI^*+bH^*+bR^* = \frac{\beta S^* I^*}{1+\alpha I^{*2}} \tag{3}$$

将 S^*,H^*,R^* 代入公式(3)中，可得

$$A+(b-\mu)\frac{\alpha I^{*2}+1}{\beta}\left[r+v_1+\varepsilon_1+\mu-\frac{r}{k}\cdot\frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}\right]+bI^*+b\cdot\frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}$$

$$+b\cdot\left(\frac{v_1}{\mu}I^*+\frac{v_2}{\mu}\cdot\frac{rI^*}{\frac{r}{k}I^*+v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)=\frac{\beta}{1+\alpha I^{*2}}\cdot\frac{\alpha I^{*2}+1}{\beta}\left[r+v_1+\varepsilon_1+\mu-\frac{r}{k}\cdot\frac{rI^*}{\frac{rI^*}{k}+v_2+\varepsilon_2+\mu}\right]\cdot I^*$$

整理后得到关于 I^* 的一元三次方程：

$$a_3 I^{*3}+a_2 I^{*2}+a_1 I^*+a_0=0$$

其中：

$$a_3=\frac{\alpha r}{k}(b-\mu)(v_1+\varepsilon_1+\mu)$$

$$a_2=\alpha(b-\mu)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)(v_2+\varepsilon_2+\mu)+\frac{\beta r}{k}\left[(b-\mu)+\left(\frac{b}{\mu}-1\right)-\varepsilon_1\right]$$

$$a_1=(b-\mu)\beta(v_2+\varepsilon_2+\mu)+\left(\frac{b}{\mu}-1\right)v_1(v_2+\varepsilon_2+\mu)+(b-\mu)\beta r+\left(\frac{b}{\mu}-1\right)\beta r v_2$$

$$-\beta r\varepsilon_2-\beta\varepsilon_1(v_2+\varepsilon_2+\mu)+\frac{r}{k}\left[A\beta+(b-\mu)(v_1+\varepsilon_1+\mu)\right]$$

$$a_0=(v_2+\varepsilon_2+\mu)\left[A\beta-(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)\right]$$

由条件 $b<\mu$ 和 $R_0=\frac{A\beta}{(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)}$，可得：$a_3<0$；$a_2<0$。

当 $R_0>1$ 时，$a_0>0$；当 $R_0<1$ 时，$a_0<0$；当 $R_0=1$ 时，$a_0=0$。

下求方程 $a_3 I^{*3}+a_2 I^{*2}+a_1 I^*+a_0=0$ 的正根分布情况。

令 $f(I^*)=a_3 I^{*3}+a_2 I^{*2}+a_1 I^*+a_0$，则 $f'(I^*)=3a_3 I^{*2}+2a_2 I^*+a_1$，分以下三种情况讨论：

1) 当 $R_0 > 1$ 时，$a_0 > 0$，则 $f(0) > 0$。

若 $a_1 > 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减，故 $f(I) = 0$ 有一个正解；

若 $a_1 < 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(I) = 0$ 有一个正解。

2) 当 $R_0 < 1$ 时，$a_0 < 0$，则 $f(0) < 0$

若 $a_1 > 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减，故 $f(I) = 0$ 有两个正解；

若 $a_1 < 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(I) = 0$ 有无解。

3) 当 $R_0 = 1$ 时，$a_0 = 0$，则 $f(0) = 0$

若 $a_1 > 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减，故 $f(I) = 0$ 有一个正解；

若 $a_1 < 0$，则 $f(I)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(I) = 0$ 有无解。

综上所述，得出定理 3.1。

定理 3.1： 若 $R_0 < 1, a_1 > 0$ 时，存在两个地方病平衡点；若 $R_0 \ge 1, a_1 > 0$ 时，存在一个地方病平衡点；若 $R_0 \le 1, a_1 < 0$ 时，不存在地方病平衡点；若 $R_0 > 1, a_1 < 0$ 时，存在一个地方病平衡点。

4.2. 后向分支

为了分析系统在基本再生数 $R_0 = 1$ 附近的局部动力学性质，本文引用 Casillo-Chavez 和 Song [2]建立的以下定理 3.2。

定理 3.2： 考虑一般常微分系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x,\phi), x \in R^n$$

其中 ϕ 为分岔参数，0 是系统的一个平衡点，满足 $F(0,\phi) = 0$。假设：

(A₁)系统在 $x = 0, \phi = 0$ 处的雅可比矩阵 $J = D_x F(0,0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(0,0)\right)$ 有一个简单的零特征值且其余特征值的实部为负。

(A₂)该矩阵在零特征值处具有非负的左、右特征向量 w 和 u，并标准化使得 $w \cdot u = 1$。

系统在中心流形上的动态可以由以下标量方程近似描述：

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = au^2 + b\phi c + o\left(|c|^3 + |c|\phi^2\right)$$

其中参数 a，b 为：

$$a = \frac{1}{2}\sum_{k,i,j=1}^{n} w_k u_i u_j \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}(0,0)$$

$$b = \sum_{k,i=1}^{n} w_k \mu_i \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial \phi}(0,0)$$

系统在 $x = 0$ 处的局部动力学性质由 a，b 决定：

(1) 若 $a < b$，且 $b > 0$，系统在 $\phi = 0$ 处发生前向分支。

(2) 若 $a > b$，且 $b > 0$，系统在 $\phi = 0$ 处发生后向分支。

定理 3.3： 定义

$$R^* = \frac{Ar^2}{-k(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)(v_2+\varepsilon_2+\mu)\left[b-(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)+\frac{br}{v_2+\varepsilon_2+\mu}+\frac{b}{\mu}\left(v_1+\frac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\right]}$$

若 $R^*>1$，模型在 $R_0=1$ 处发生后向分支；若 $R^*<1$，模型在 $R_0=1$ 处发生前向分支。

证明：选择 β 作为分岔系数，令 $R_0=1$，得出：

$$\beta^*=\frac{(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)}{A}$$

记 $x=(S,I,H,R)$，有

$$f(x,\beta)=\begin{pmatrix} A+b(S+I+H+R)-\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I^2}-\mu S \\ \dfrac{\beta SI}{1+\alpha I^2}-rI+\dfrac{rIH}{k}-(v_1+\varepsilon_1+\mu)I \\ rI-\dfrac{rIH}{k}-(v_2+\varepsilon_2+\mu)H \\ v_1I+v_2H-\mu R \end{pmatrix}$$

f 在 (E_0,β^*) 处的雅可比矩阵为：

$$J(E_0,\beta^*)=\begin{pmatrix} b-\mu & b-\dfrac{\beta^*A}{\mu-b} & b & b \\ 0 & \dfrac{\beta^*A}{\mu-b}-(r+v_1+\varepsilon_1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & r & -(v_2+\varepsilon_2+\mu) & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

将 $\beta^*=\dfrac{(\mu-b)(r+v_1+\varepsilon_1+\mu)}{A}$ 代入，得：

$$J(E_0,\beta^*)=\begin{pmatrix} b-\mu & b-(r+v_1+\varepsilon_1+\mu) & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -(v_2+\varepsilon_2+\mu) & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

矩阵 J 的特征方程为：

$$\lambda\cdot(\lambda+\mu)\cdot[\lambda-(b-\mu)]\cdot[\lambda+v_2+\varepsilon_2+\mu]=0$$

其特征值为：

$$\lambda_1=0;\quad \lambda_2=-\mu<0;\quad \lambda_3=b-\mu<0;\quad \lambda_4=-(v_2+\varepsilon_2+\mu)<0$$

满足定理 3.2 中的条件 A_1。

设右特征向量 $U=(u_1,u_2,u_3,u_4)^{\mathrm{T}}$，满足 $J\cdot U=0$，即

$$\begin{pmatrix} b-\mu & b-(r+v_1+\varepsilon_1+\mu) & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -(v_2+\varepsilon_2+\mu) & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}=0$$

设 $u_2=1$，解得：

$$U=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b-\mu}\left[r+v_1+\varepsilon_1+\mu-b-\dfrac{br}{v_2+\varepsilon_2+\mu}-\dfrac{b}{\mu}\left(v_1+\dfrac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\right]\\ 1\\ \dfrac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\\ \dfrac{1}{\mu}\left(v_1+\dfrac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\end{pmatrix}$$

设左特征向量 $W=\left(w_1,w_2,w_3,w_4\right)$，满足 $W\cdot J=0$，即

$$\left(w_1,w_2,w_3,w_4\right)\begin{pmatrix}b-\mu & b-\left(r+v_1+\varepsilon_1+\mu\right) & b & b\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r & -\left(v_2+\varepsilon_2+\mu\right) & 0\\ 0 & v_1 & v_2 & -\mu\end{pmatrix}=0$$

设 $w_2=1$，解得：

$$W=\left(0,1,0,0\right)$$

验证 $w\cdot v=1$，满足定理 3.2 中的 A_2 条件。

根据参数公式计算 a，b，由 a，b 表达式和 W 可知，仅需计算 F_2 的相关二阶偏导，现给出各偏导在 E_0 处的值为：

$$\frac{\partial^2F_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2F_2}{\partial x_2\partial x_1}=\beta^*\text{；}\quad\frac{\partial^2F_2}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial^2F_2}{\partial x_3x_2}=\frac{r}{K}\text{；}\quad\frac{\partial^2F_2}{\partial x_2\partial\beta}=\frac{A}{\mu-b}$$

其余二阶偏导均为 0。由 a，b 表达式可得：

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{2}\sum_{k.i.j=1}^{n}w_ku_iu_j\frac{\partial^2F_k}{\partial x_i\partial x_j}\left(0,0\right)\\&=\frac{1}{2}\left[2u_1u_2\beta^*+2u_2u_3\frac{r}{k}\right]\\&=u_1\beta^*+u_3\cdot\frac{r}{k}\\&=\frac{1}{b-\mu}\left[r+v_1+\varepsilon_1+\mu-b-\frac{br}{v_2+\varepsilon_2+\mu}-\frac{b}{\mu}\left(v_1+\frac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\right]\cdot\frac{\left(\mu-b\right)\left(r+v_1+\varepsilon_1+\mu\right)}{A}+\frac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\cdot\frac{r}{K}\\&=\frac{r+v_1+\varepsilon_1+\mu}{A}\left[b-\left(r+v_1+\varepsilon_1+\mu\right)+\frac{br}{v_2+\varepsilon_2+\mu}+\frac{b}{\mu}\left(v_1+\frac{r}{v_2+\varepsilon_2+\mu}\right)\right]+\frac{r^2}{k\left(v_2+\varepsilon_2+\mu\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\sum_{k,i=1}^{n}w_ku_i\frac{\partial F_k}{\partial x_i\partial\phi}\left(0,0\right)\\&=u_2\frac{\partial F_k}{\partial x_2\partial\beta}\\&=\frac{A}{\mu-b}\end{aligned}$$

显然，$b>0$，由 R^* 的定义得：

$$a>0\Leftrightarrow R^*>1\text{；}\quad a<0\Leftrightarrow R^*<1$$

故当 $R^{*}>1$时，模型发生后向分支。

5. 结语

本文建立了一类 SIHR 传染病模型，基于非线性出生率，非线性传染率和医院容纳量进行分析，得到：当 $R_0<1$，无病平衡点 E_0 局部渐近稳定，以及地方病平衡点存在的条件。根据文献[2]得到发生后向分支的条件：当 $R^{*}>1$时，模型在 $R=1$ 处发生后向分支。根据定理 3.3 可知，后向分支产生的关键是 $a>0$，为了避免产生后向分支，公共卫生部门可采取以下措施：扩充医疗资源 k，如增加床位；优化治疗流程，如提高治疗效率；调整收治策略等。本文采取参数约束的方法使模型中的 $H(t)<k$。在后续研究中可考虑修改住院率函数进行更深度的研究。

致　谢

本研究得到国家自然科学基金项目(NO: 702504101002)的资助，感谢相关基金项目提供的经费支持与资源保障。

特别感谢匿名评审专家的专业付出和富有洞察力的反馈意见，各位专家的建设性意见极大提升了本论文的学术严谨性与创新性。

参考文献

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700-721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

[2] Cooke, K., van den Driessche, P. and Zou, X. (1999) Interaction of Maturation Delay and Nonlinear Birth in Population and Epidemic Models. *Journal of Mathematical Biology*, **39**, 332-352. https://doi.org/10.1007/s002850050194

[3] Liu, W., Levin, S.A. and Iwasa, Y. (1986) Influence of Nonlinear Incidence Rates Upon the Behavior of SIRS Epidemiological Models. *Journal of Mathematical Biology*, **23**, 187-204. https://doi.org/10.1007/bf00276956

[4] Ruan, S. and Wang, W. (2003) Dynamical Behavior of an Epidemic Model with a Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Differential Equations*, **188**, 135-163. https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00089-x

[5] 王拉娣, 李建全. 一类带有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的定性分析[J]. 应用数学和力学, 2006(5): 591-596.

[6] 刘单, 刘贤宁. 具有非线性出生率和医院容纳量的传染病模型[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(7): 35–43.

[7] 陈丽君. 一类具有非线性出生率和饱和恢复率的随机 SEIR 传染病模型的动力学行为[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2024, 47(3): 201-210.

[8] 谭梦琪. 传染病模型的动力学性态研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2024.

[9] 马知恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.