Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(3), 148-160
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.153095

牛顿对三次曲线分类的最初研究

安　琪

西北大学科学技术史高等研究院，陕西　西安

收稿日期：2026年2月4日；录用日期：2026年2月27日；发布日期：2026年3月6日

摘　要

牛顿对三次曲线的分类研究是高次曲线研究领域的奠基性工作。现有研究多聚焦于牛顿在1704年发表的《三次曲线枚举》，本文聚焦于牛顿1667~1668年对三次曲线的最初研究，以牛顿拉丁语手稿及其英译版为基础，旨在厘清牛顿的分类逻辑。作者通过案例分析表明，牛顿先通过坐标变换将三次曲线一般方程化简为9类，再依据渐近线交点、曲线直径是否存在、方程根的情况等几何与代数特征，构建“类－子类－亚类－型”四层分类框架，最终确定了58个不同型的三次曲线。本研究明确了牛顿对三次曲线分类框架的具体标准和技术路线，有助于理解牛顿的最初的分类思想与逻辑。

关键词

牛顿，三次曲线，分类，标准，方程

Newton’s Original Research on the Classification of Cubic Curves

Qi An

Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi’an Shaanxi

Received: February 4, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 6, 2026

Abstract

Newton’s research on the classification of cubic curves is a foundational work in the field of higher-order algebraic curve studies. Existing studies have mostly focused on *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* published by Newton in 1704, while this paper centers on his preliminary research on cubic curves carried out during 1667~1668. Based on Newton’s Latin manuscripts and their English translations, this study aims to clarify the logical system of his classification for cubic curves. Through case analysis, the authors demonstrate that Newton first simplified the general equation of cubic curves into nine categories by means of coordinate transformation, and then constructed a four-tier

文章引用: 安琪. 牛顿对三次曲线分类的最初研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(3): 148-160.
DOI: 10.12677/aam.2026.153095

classification framework of "Class-Subclass-Subsubclass-Type" according to geometric and algebraic characteristics including the intersection points of asymptotes, the existence of curve diameters and the properties of equation roots, ultimately defining 58 distinct types of cubic curves. This study clarifies the specific criteria and technical approach of Newton's classification framework for cubic curves, which is conducive to an in-depth understanding of his original ideological connotation and logical reasoning regarding the classification of cubic curves.

Keywords

Newton, Cubic Curves, Classification, Criteria, Equations

1. 问题的提出

分类思想在数学发展历程中是重要思想之一，通过揭示数学对象本质属性与内在关联，从而使庞杂的知识系统化与规律化，分类思想为数学研究提供了清晰的逻辑框架和探索路径[1]。例如，克莱因(F. Klein 1849~1925)的《埃尔朗根纲领》[2] (*Erlangen Program*, 1872)在群论的观点下，对当时的几何学进行了更为系统和科学的分类，对几何学的发展产生了长远的影响[3]。

在牛顿(Isaac Newton, 1643~1727)之前，人们对高次曲线的种类知之甚少，那么对三次曲线进行分类研究能够推动高次曲线的研究，而三次曲线又是高次曲线中较为简单的一种，所以对其进行分类成为顺理成章的一步。在17世纪60年末代牛顿首次尝试对三次曲线分类，在他的原始手稿 *Enumeratio Curvarum trium Dimensionum* [4]中确定了58个不同型的三次曲线。1695年牛顿对曲线分类问题进行重新思考，并将大部分成果整理成一篇简短文章，于1704年作为《光学》(*Optics*, 1704)的附录发表，标题为《三次曲线枚举》(*Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*，下文简称为《枚举》)，使得三次曲线成为热议问题。但出版的《枚举》中存在许多晦涩之处，牛顿并没有给出具体的证明过程，使读者们难以理解，这也是牛顿数学著作的特点。这种风格引发了对文章的各种评论和抱怨，一方面，人们对牛顿分类思想感到惊叹。

德古阿(Jean Paul de Gua de Malves, 1713~1785)对《枚举》提出高度赞赏：

> "这位几何学家的所有著作都具有独特的崇高性，尤其是在这部作品(这里指的是《枚举》)中，他似乎将自己提升到了一个无与伦比的高度，其他洞察力和意志力稍逊的天才都难以企及。但他在这项艰巨的工作中所遵循的路径，却让那些惊叹于其成就的人难以捉摸。唯有他在那些本值得他驻足良久的地方，留下的微弱痕迹，才能为我们提供些许线索。如果有人想要追随他的脚步，就必须在这些漫长的时间间隙中独自摸索。"[5]

另一方面，对其晦涩的风格提出质疑。

莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646~1746)对威廉·琼斯(William Jones, 1675~1749)在1711年校勘出版的牛顿数学论著与书信选段合集之中，收录牛顿的《枚举》工作做出匿名评价，首次对《枚举》提出批评：

> "这位编辑如果能够至少提供一次牛顿关于三次曲线数量的证明，我想牛顿是不会拒绝的。此外，如果能够将其以附录或者其他形式出版，他将更受人们的称赞。"[6]

这样的抱怨并不少见，黎卡提(Vincenzo Riccati, 1707~1775)和萨拉蒂尼(Girolamo Saladini, 1731~18313)在《分析指南》(*Institutiones Analyticae*, 1765))的序言中对《枚举》做出了批判性评价。

“艾萨克·牛顿虽然公布了三次曲线分类的结果，但未发表任何证明过程，也没有提到所使用的法则。显然，他更渴望得到他人的钦佩，而非教导他人。”[7]

克拉默(Gabriel Cramer 1704~1752)也公开表达了批判态度：

“令人遗憾的是，牛顿只满足于展示自己的发现，却不补充证明，宁愿享受被钦佩的乐趣，也不履行教导他人的责任。”[8]

18 世纪的研究大多是对牛顿已经出版的《枚举》进行分析，斯特林(James Stirling, 1692~1770)在其 1717 年出版的《牛顿的三次曲线》[9] (*Lineae Tertii Ordinis Neutonianae*, 1717)中，为《枚举》提供了评注和相关证明。欧拉(Leonhard Euler, 1707~1783)在 1748 年的《无穷分析引论》[10] (*Introductio an analysin infinitorum*, 1748)中，沿用了牛顿的分类方法，观察三次曲线无穷分支性质的各种可能变化来研究其分类问题。克拉默在《代数曲线分析引论》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraiques*, 1750)中引用牛顿对三次曲线“结点、尖点”的分类，讨论了曲线奇点与多重点。

现代研究多聚焦于牛顿 1704 年出版的《枚举》，尼科洛•圭恰迪尼(Guicciardini Niccolò, 1957-)在《超越笛卡尔经典：三次曲线的枚举》[11] (Beyond the Cartesian Canon: The Enumeration of Cubics, 2009)中，对牛顿《枚举》中的三次曲线枚举工作进行了综述。吴红丹的《三次曲线牛顿分类法的研究》[12]，则是利用现代数学的射影几何理论来分析牛顿的方法。

目前对牛顿原始手稿进行研究的是怀特赛德(D. T. Whiteside, 1932~2008)，他将《枚举》的原始手稿翻译为英文并添加了注解。尽管如此，想要厘清牛顿的分类思路仍然存在一定的困难。因此，借助牛顿的早期研究，尤其是未发表的手稿，对牛顿三次曲线分类思想进行研究是很有必要的。本文从牛顿对三次曲线的分类方法出发，通过对牛顿的拉丁文原始手稿以及怀特赛德的英译版本进行研究，梳理牛顿对三次曲线分类的基本思想。

2. 对牛顿三次曲线分类的思路梳理

牛顿通过坐标变换的方法，将三次曲线的一般方程化简为 9 类标准型，每个标准型都有对应的渐近线特征。在此基础上，牛顿以曲线是否存在直径、渐近线是否与曲线相交为划分依据，将上述 9 类标准型划分为 16 个“子类”；针对每个子类，再结合渐近线的交点情况划分出“亚类”；最终通过构造方程，根据方程根的特征对“型”进行界定，据此确定了 58 个不同型的三次曲线。本节将以第一类标准型为例，详细阐释牛顿三次曲线分类的具体过程，以方便读者深入了解牛顿分类的方法和思路。

2.1. 牛顿的坐标变换

首先，牛顿构造出一条三次曲线，设直线 BC 以给定角度在固定直线 AB 上移动，同时 BC 上的某点 C 描绘出曲线 EC (如图 1 所示)。牛顿称 BC 为纵坐标，AB 为横坐标，$\angle ABC$ 为二者之间的角度。牛顿强调了，当上述的角度发生变化时，曲线的大小和位置也会随之改变，但曲线的类型不发生改变。在 AB 上取某个固定点 A，表示 AB 与 BC 之间关系的方程，称为曲线 EC 的特征方程，即关于 z 与 v 的函数表达式。设 $AB = z$， $BC = v$，那么在 (z,v) 坐标系下，曲线的特征方程为：

$$av^3 + bzv^2 + cz^2v + dz^3 + ev^2 + fzv + gz^2 + hv + kz + l = 0.$$

构造平行四边形 βGBH、βGCD 和 αNHF,使得 ΔAPQ 与 $\Delta \beta GC$ 相似，ΔAMR 与 $\Delta \alpha F\beta$ 相似。设 $PQ = AM = 1$， $AP = q$， $MR = p$， $AN = r$， $N\alpha = s$， $CG = y$， $\alpha F = x$，通过相似三角形的性质可以得到以下关系：

$$AM:MR=\alpha F:F\beta \text{，即} 1:p=x:F\beta \text{，得到} F\beta = px$$

且 $GC+\beta F+\alpha N=CB$，即 $v=y+px+s$；

同样，

$$PQ:PA=CG:\beta G \text{，即} 1:q=y:\beta G \text{，得到} \beta G=qy \text{，}$$

且 $G\beta+F\alpha+NA=BA$，即 $z=qy+x+r$；

将 $v=y+px+s$ 和 $z=qy+x+r$ 代入特征方程，可以得到：

$$\begin{aligned}
&\left(a+bq+cq^2+dq^3\right)y^3+\left(3ap+b+2bpq+cpq^2+2cq+3dq^2\right)xy^2\\
&+\left(3ap^2+2bp+bp^2q+2cpq+c+3dq\right)x^2y+\left(ap^3+bp^2+cp+d\right)x^3\\
&+\left(3as+2bqs+cq^2s+br+2cqr+3dqqr+e+fq+gq^2\right)y^2\\
&+\left(6aps+2bpqs+2bs+2cqs+2bpr+2cpqr+2cr+6dqr+2ep+f+fpq+2gq\right)xy\\
&+\left(3ap^2s+2bps+cs+bp^2r+2cpr+3dr+ep^2+fp+g\right)x^2\\
&+\left(3as^2+bqs^2+2brs+2cqrs+cr^2+3dqr^2+2es+fqs+fr+2gqr+h+kq\right)y\\
&+\left(3aps^2+bs^2+2bprs+2crs+cpr^2+3dr^2+2eps+fs+fpr+2gr+hp+k\right)x\\
&+as^3+brs^2+cr^2s+dr^3+es^2+frs+gr^2+hs+kr+l=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

通过坐标变换，将 (z,v) 坐标系下的曲线方程，变换到 (x,y) 坐标系下，由此得到 αF 和 GC 之间的关系。由此可以看出，无论坐标系如何选择，三次曲线特征方程的形式不会发生改变，曲线性质也不会发生改变。

得到这样的曲线方程后，牛顿继续通过坐标变换将曲线方程(1)变换为型如以下 9 个表达式：

$$\begin{aligned}
&1.\ bxy^2=dx^3+gx^2+hy+kx+l.\\
&2.\ bxy^2=-dx^3+gx^2+hy+kx+l\\
&3.\ bxy^2=gx^2+hy+kx+l.\\
&4.\ bxy^2=hy+kx+l.\\
&5.\ bxy^2=hy-kx+l.\\
&6.\ bxy^2=hy+l.\\
&7.\ ey^2=dx^3+kx+l.\\
&8.\ fxy=dx^3+l.\\
&9.\ hy=dx^3.
\end{aligned}$$

下面以(1)化简为标准型 1 为例，梳理牛顿的变换过程。

要从(1)化简为型如 $bxy^2=dx^3+gx^2+hy+kx+l$ 的标准型，就需要将方程(1)中的第 1、3、5、6 项，即 y^3，x^2y，y^2，xy 项消去。牛顿设置关系式 $p=\dfrac{3dq^2+cq}{bq+3a}$，$\pi=3a+2bq+cq^2$，$\sigma=e+fq+gq^2$，$\rho=b+2cq+3dq^2$，$r=\dfrac{q(s\rho+\tau)}{-\pi p}=\dfrac{\pi s+\sigma}{-\rho}$，$s=\dfrac{r\rho+\sigma}{-\pi}$，怀特赛德对关系式的设置已做出解释[2]。将这些关系式代入后，能够消去(1)中的第 1、3、5、6 项(见附录)，从而得到型如 $bxy^2=dx^3+gx^2+hy+kx+l$ 的式子。

综上，牛顿通过构造相似三角形、坐标变换等方法消去三次曲线一般方程中的一些项，成功将方程

简化为 9 类标准型，并且在坐标变换下曲线原本的性质并不发生改变，这一过程为后续进一步分类提供了依据。

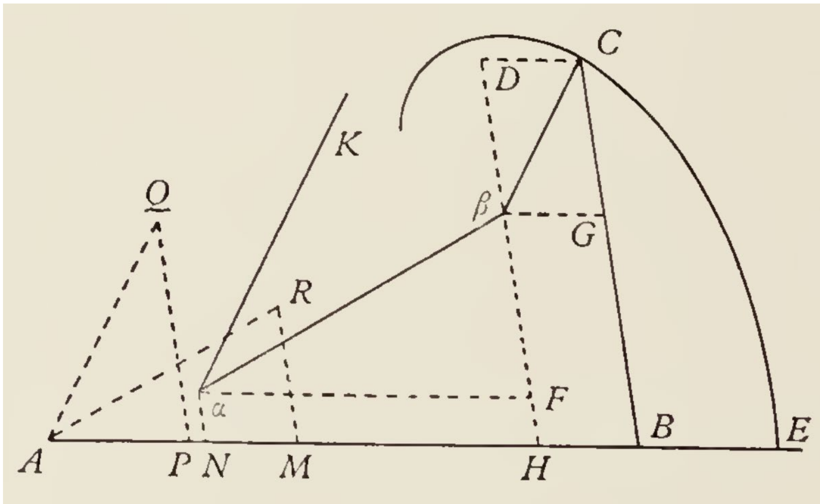

Figure 1. Newton's diagram for constructing cubic curves
图 1. 牛顿构造三次曲线示意图[4]

2.2. 牛顿划分“子类”的标准

完成坐标变换得到 9 类标准型后，牛顿的分类工作继续深入。由于标准型的系数特征直接关系到曲线的渐近线数量、位置关系以及直径的存在性，牛顿将这些几何属性作为划分“子类”的核心依据。通过分析渐近线与曲线的交点数量、直径的退化情况，可将每一类进一步拆解为“子类”，这一步既承接了坐标变换的成果，又为后续更精细的“亚类”的划分明确了分类维度。

对于标准型 1 来说，如果系数 b、d 的符号相同，那么这一标准型的曲线有三条渐近线，并且任意两条渐近线互不平行。曲线无限分支的延伸方向是根据曲线方程的高次项决定的，即由 $bxy^2-dx^3=0$ 决定(当 x 趋于无穷时，方程的低次项可以忽略不计)，那么存在渐近线平行于 $x=0$ 和 $y=\pm\sqrt{d/b}x$，显然 $x=0$ 是一条渐近线，设 $y=\pm\sqrt{d/b}x+K$ 为另外两条渐近线方程，因为渐近线在无穷远处与曲线相切，所得 x^2 的系数为零，可以得到截距 $K=\pm\frac{g}{2\sqrt{bd}}$，由此得到三条渐近线方程 $x=0$ 和 $y=\pm\sqrt{d/b}x+\frac{g}{2\sqrt{bd}}$。那么 $Ad=+\frac{g}{2\sqrt{bd}}$、$A\delta=-\frac{g}{2\sqrt{bd}}$，取 $AD=-\frac{g}{2d}$，连接 Dd、$D\delta$，这两条是曲线的渐近线(如图 2 所示)。将渐近线带入曲线方程，可以得到渐近线与曲线的三个交点。与 $x=0$ 相交于点 S，得到 $AS=-l/h$，即点 S 的横坐标，与 $y=\sqrt{d/b}x+\frac{g}{2\sqrt{bd}}$ 相交于点 σ，得到点 σ 的横坐标，即

$$A\theta=\left(4dl+2gh\sqrt{d/b}\right)\Big/\left(g^2-4dk-4dh\sqrt{d/b}\right),$$

与 $y=-\sqrt{d/b}x+\frac{g}{2\sqrt{bd}}$ 相交于点 s，得到点 s 的横坐标，即

$$A\vartheta=\left(4dl-2gh\sqrt{d/b}\right)\Big/\left(g^2-4dk+4dh\sqrt{d/b}\right),$$

那么可以得到：

(1) 当 $h \neq 0$ 且 $g^2 - 4dk \neq \pm 4dh\sqrt{d/b}$ 时，曲线与渐近线有三个交点，这是第一子类曲线；

(2) 当 $h = 0$ 且 $g^2 - 4dk \neq \pm 4dh\sqrt{d/b}$ 或者 $h \neq 0$ 且 $g^2 - 4dk = \pm 4dh\sqrt{d/b}$ 时，曲线与渐近线有两个交点，此为第二子类；

(3) 当 $h = 0$ 并且 $g^2 - 4dk = \pm 4dh\sqrt{d/b}$ 时，曲线与渐近线无交点，此为第三子类。

接着来讨论曲线直径，牛顿所提到的曲线直径概念是曲线与给定方向直线交点的算术平均值的轨迹，并且这个轨迹是一条直线。那么与 y 轴平行的直线 BC 与曲线 $bxy^2 = dx^3 + gx^2 + hy + kx + l$ 相交于两点 C 和 c (设 $BC = y_1$， $BE = y_2$)，使得

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{h}{2bx} \pm \frac{1}{2bx}\sqrt{h^2 + 4bx\left(dx^3 + gx^2 + kx + l\right)},$$

如果用 Y 表示 Cc 的中点 K 的纵坐标，那么 $Y = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right) = h/2bx$，所以点 K 在曲线 $2bxy = h$ 上，即双曲线 ΦX (如图 2 所示)，同样的方法可以求出双曲线 $\xi h\Phi\chi$ 的方程为

$$by^2 = -2\sqrt{bd}\,xy + 3dx^2 + 2gx + k + h\frac{\sqrt{bd}}{b},$$

以及双曲线 $KxI\phi$ 的方程为

$$by^2 = 2\sqrt{bd}\,xy + 3dx^2 + 2gx + k - h\frac{\sqrt{bd}}{b}。$$

可以得到：

(1) 当 $h \neq 0$ 且 $g^2 - 4dk \neq \pm 4dh\sqrt{d/b}$ 时，上述曲线无法退化为直线，因此第一子类曲线是没有直径的；

(2) 当 $h = 0$ 时，双曲线 ΦX 会退化成一条直线 AB，其余双曲线保持不变，直线 AB 为三次曲线的直径，这是第二子类曲线，只有一条直径存在；

(3) 当 $h = 0$ 并且 $g^2 = 4dk$ 时，上述三条曲线都会退化为直线，这是第三子类曲线，有三条直径。

可见，牛顿以标准型渐近线与曲线交点的数量、直径的存在性为核心依据，将 9 类标准型进一步拆解为具有几何差异的“子类”，其本质是通过渐近线和直径的几何属性，实现对标准型的初步分类。

2.3. 牛顿划分“亚类”的标准

在通过渐近线与直径特征完成“子类”的划分后，牛顿发现，同一子类下，标准型中某些特定系数是否存在决定着渐近线交点的具体情况，会导致曲线呈现出截然不同的几何形态。因此，以这些关键系数的存在与否作为判断标准，可将“子类”进一步划分为“亚类”。

在第一类标准型的第一子类中，当 $g \neq 0$ 时，渐近线两两相交围成了 $\Delta Dd\delta$，此种情形为第一亚类(如图 2 所示)；当 $g = 0$， $l \neq 0$，渐近线交于点 A，此种情形为第二亚类；当 $g = 0$， $l = 0$ 时，点 A 同时还是曲线的中心，过点 A 且两端都落在曲线上的任意直线都被点 A 平分，因为三次曲线如果有中心，那么曲线图形就存在对称性，所有的偶次项都必须为零，此种情况为第三亚类。

这里需要注意的是，不是所有的子类都能够划分为“亚类”，由上述描述可知，区分种的核心关键点在于曲线是否存在中心。这里存在三个特殊情况，第 3、7、8 类所体现出来的曲线分支为抛物型，因此，这三类标准型不存在“亚类”的划分。

牛顿在“子类”划分的基础上，通过分析标准型特定系数的存在情况来判断渐近线交点的特殊情形，将“子类”进一步细分为 3 个“亚类”，明确了同一“子类”下三次曲线形态的差异性。

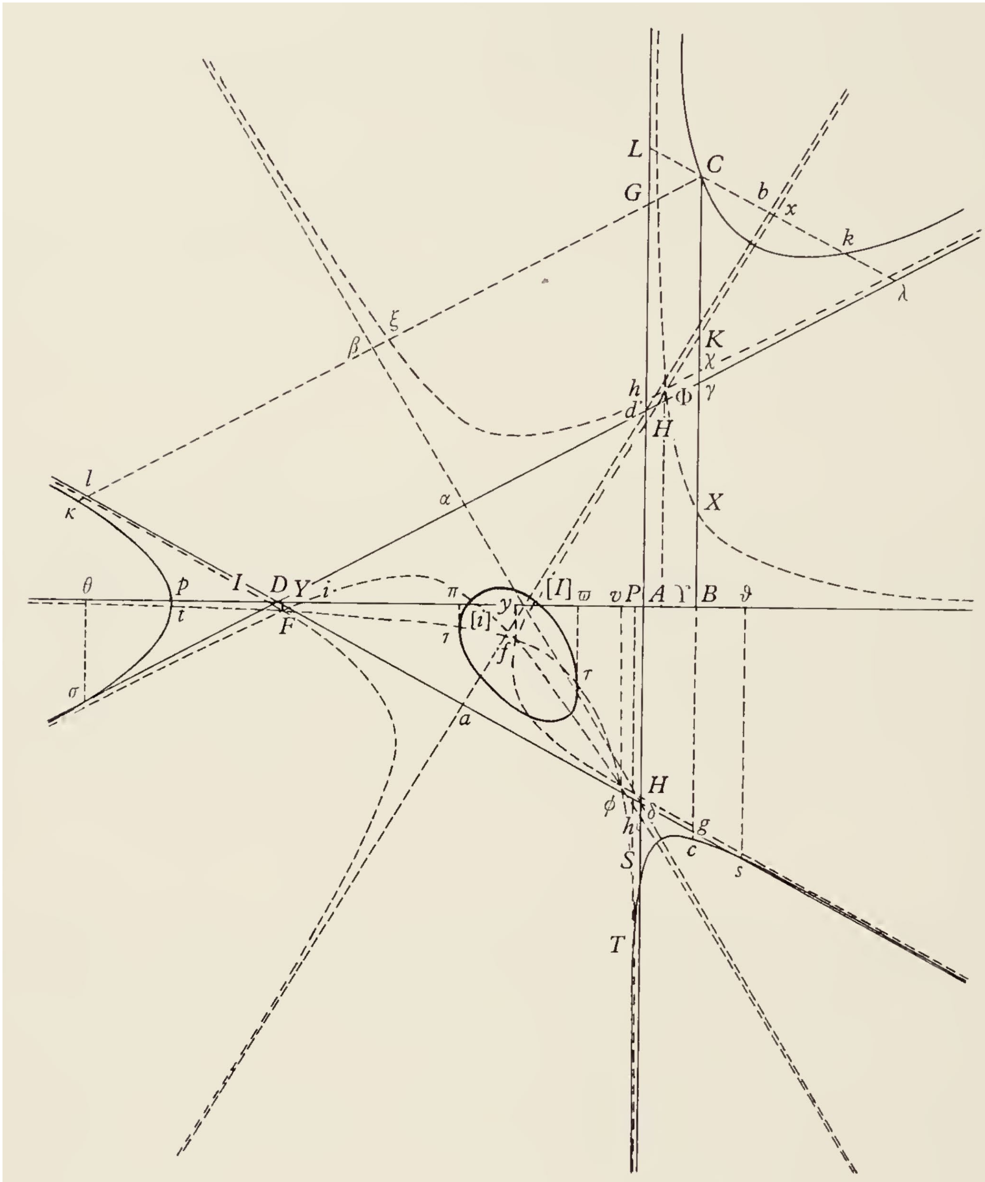

Figure 2. D. T. Whiteside's reconstruction of the graphical figures in Newton's manuscripts [4]
图 2. D. T. Whiteside 对牛顿手稿中曲线图的重构[4]

2.4. 牛顿划分“型”的标准

“亚类”的划分已经明确了曲线的基本形态，但同一“亚类”下曲线的具体形态仍然存在着细节差异，需要通过更精准的代数分析来完成最终界定。牛顿注意到，三次曲线与相关双曲线的交点情况由方程根的不同情形(如根的虚实性、符号、是否等值)直接决定。因此，通过构造交点方程并分析其根的不同情形，可将“亚类”进一步细分为“型”。

牛顿通过使三次曲线与双曲线 ΦX[1]相交构造方程 $dx^4+gx^3+kx^2+lx+h^2/4b=0$，考虑方程根的不同情形，来对曲线的具体形态进行划分，第一类中的第一子类的第一亚类共划分了 6 个型(如表 1 所示)，这里

[1]双曲线 ΦX 的推导过程已在 2.2 节详细说明。

以形式第 1、6 型为例。假设方程的根为 AP， $A\varpi$， $A\pi$， Ap。

第 1 型：如果所有的根都是同号的不等实根，那么三次曲线的图形有三个三次双曲线分支，每个分支都有两条渐近线，且带有一个卵形，并且卵形总是位于 $\Delta Dd\delta$ 中(如图 3 所示)。

第 6 型：如果方程的根全为虚根，或者全为实根且两正根、两负根，当所有根均为虚根时，gl 是其渐近线(如图 4 所示)；当所有根都是实根时，GL 是渐近线(如图 5 所示)，三次曲线会围绕渐近线扭转，在渐近线的两侧向相反方向延伸至无穷远，称其为扭转蚌线。

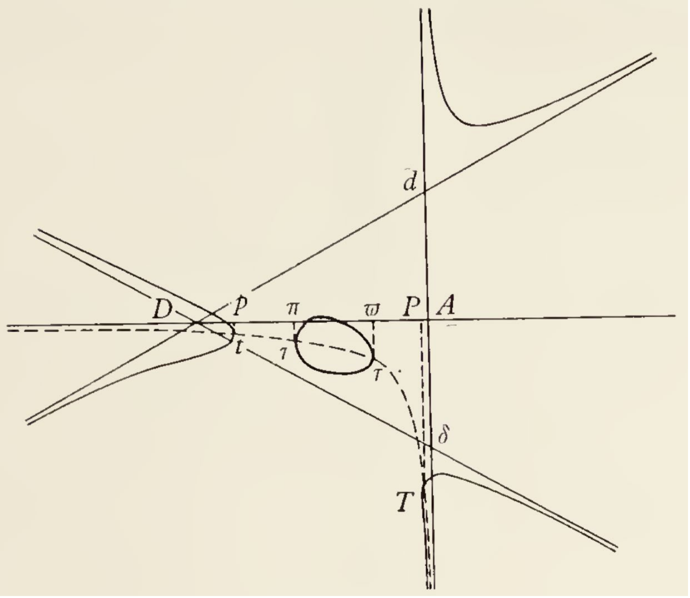

Figure 3. Type 1 diagram [4]
图 3. 第 1 型图示[4]

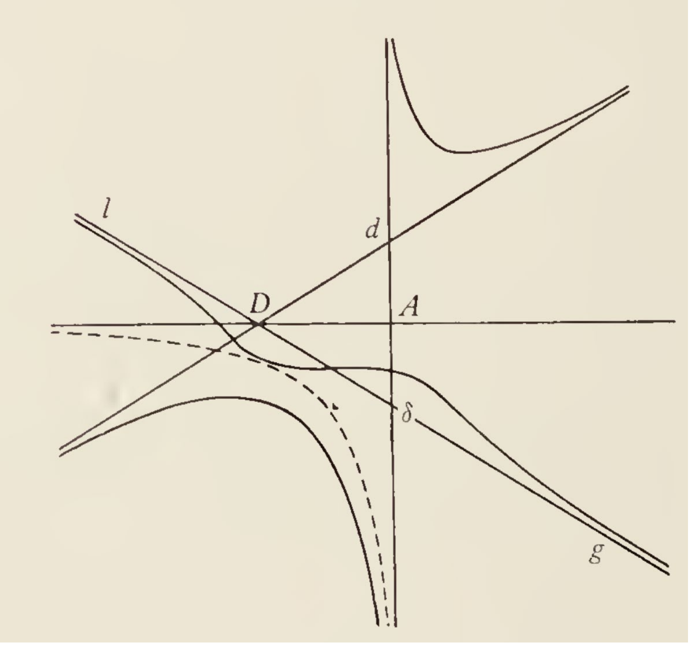

Figure 4. Type 6 diagram [4]
图 4. 第 6 型图示[4]

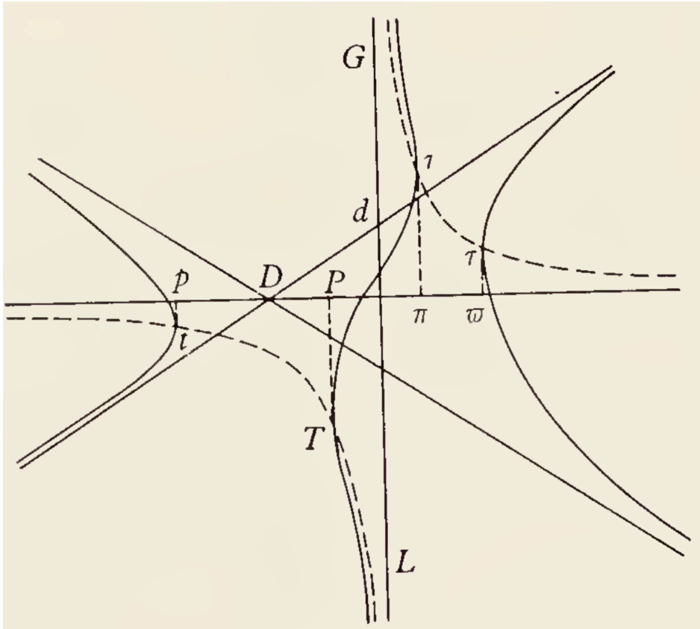

Figure 5. Type 6 diagram [4]
图 5. 第 6 型图示[4]

Table 1. The correspondence between roots and curve morphology
表 1. 根与曲线形态的对应关系

型	根的情况	曲线形态
第 1 型	全实根、不相等、同号	三个双曲线分支，一个卵形
第 2 型	两极值根/两中间根相等 ($AP = A\varpi$ 或 $A\pi = Ap$)	一个双曲线分支与卵形交于一点
第 3 型	三根相等 ($AP = A\varpi = A\pi$ 或 $A\varpi = A\pi = Ap$)	一个双曲线分支形成一个尖点，卵形消失
第 4 型	中间根相等($A\varpi = A\pi$)/两根是虚根且与两实根不相等	三个双曲线分支，卵形消失
第 5 型	两根相等($AP = A\varpi$)且另外两根为虚根/另外两根为实根且与相等根异号	两个双曲线分支相交于一点，卵形消失
第 6 型	全为虚根/全为实根且两正根、两负根	扭转蚌线

不难看出，牛顿通过构造三次曲线与双曲线 ΦX 的交点方程，以根的实虚性、符号情况以及是否相等的代数特征，精准对应曲线的形态差异，最终将“亚类”划分为“型”。牛顿通过从整体到局部的方法，建立了“类－子类－亚类－型”四层递进的分类结构，最终划分出 58 个不同型的三次曲线。

需要指出的是，牛顿在原始手稿中划分出了 58 个型，且在第 1、2、3、7 类的型中绘制出了多个对应的曲线图形。尽管原始手稿中未对这些曲线图形进行更加细致的划分，仅依据各曲线根的共性笼统的将其归属于同一“型”的范畴，但牛顿此时已完成了与 1704 年出版的《枚举》完全对应的 72 种曲线图形的绘制，这些图形呈现了各型曲线的渐近线分布、分支形态、结点和尖点位置及卵形、共轭点等几何特征。在 1704 年出版的《枚举》中，牛顿对原始手稿中笼统合并的“型”，按图形呈现的几何细节差异进行逐一拆分，例如第 3 类的第 1 子类的第 4 型，在原始手稿中，牛顿将两个根均为相等实根，或者两

个根均为虚根都归属于第 4 型当中，并且这两个不同情况分别对应不同的曲线图形。而在 1704 年出版的《枚举》中，牛顿将这两个不同情况划分为了不同的两种曲线，即第四十九种和第五十种曲线[13]。在这样更加细致的拆分下，牛顿最终划分出 72 种三次曲线，具体分类结果如表 2 所示。

Table 2. Newton's cubic curves: classification hierarchy number comparison table
表 2. 牛顿三次曲线分类层级数量对照表

类	子类	亚类	型	种
第 1 类	3	7	23	32
第 2 类	2	2	10	12
第 3 类	2	0	10	11
第 4 类	2	2	4	4
第 5 类	2	2	3	3
第 6 类	2	0	2	2
第 7 类	1	0	4	6
第 8 类	1	0	1	1
第 9 类	1	1	1	1
共计	**16**	**14**	**58**	**72**

3. 结语

本文以牛顿三次曲线分类的拉丁语手稿及怀特赛德的英译版本为核心研究素材，通过文本考据、逻辑梳理的研究方法，系统梳理了牛顿早期对三次曲线的分类逻辑。研究表明，牛顿以“类－子类－亚类－型”为框架进行四层递式分类，还原了其通过坐标变换简化曲线一般方程至 9 类标准型，奠定了分类体系的基础；再依据曲线与渐近线交点数量、直径的存在性划分“子类”；在此基础上，以表达式中关键系数的存在情况为判断标准，进一步将“子类”划分为“亚类”；最终根据方程根的形态界定“型”的方法，明确划分出 58 个不同型的三次曲线，完整呈现了牛顿各类三次曲线的分类由来。

牛顿在 1704 年出版的《枚举》中仅系统呈现了三次曲线分类结果，未提供分类过程中的完整推导和证明，使读者感到晦涩难懂，引发了历史上的诸多学者的不满，他们认为牛顿的分类缺乏严谨的推导支撑，难以被学者理解。但本文通过对牛顿原始手稿的深度梳理，清晰地呈现出牛顿的分类体系是建立在坐标变换、渐近线与曲线的几何关系、方程根的代数特征的基础之上，回应了莱布尼茨、克拉默等学者对寻求分类逻辑的诉求。此外，现有学术界关于牛顿三次曲线分类的研究，多聚焦于 1704 年出版的《枚举》，对 1667~1668 年牛顿早期研究阶段的原始手稿关注较少。本文以原始手稿为核心研究对象，对牛顿早期三次曲线分类思路的还原，也弥补了现有研究多聚焦于 1704 年出版版本，较少关注到原始手稿的不足，为理解牛顿分类思想提供了参考。

牛顿的三次曲线分类工作，不仅开创了高次曲线系统化分类的先河，也促进了后续高次曲线研究的发展与进步，是数学分类思想的实践。其分类体系所蕴含的代数与几何的思维方式，对后世高次曲线研究有着重要的启发意义，值得我们持续关注与深入研究。

致　谢

感谢西北大学赵继伟副教授对作者的有益指导！

参考文献

[1] 张立国. 数学中的分类思想研究[J]. 沈阳工业大学学报, 2000, 22(6): 525-527.

[2] Klein, F. (1872) Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Verlag von Andreas Deichert.

[3] 李文林. 数学史概论[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2021: 246-247.

[4] Whiteside, D.T. (1968) The Mathematical Papers of Isaac Newton. II. 1667-1670. Cambridge University Press, 10-85.

[5] de Malves, G. (1740) Usages de l'Analyse de Descartes. Briasson et Piget, 11-12.

[6] Jones, W. and Senex, J. (1711) Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, Ac Differentias: Cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis. Ex Officina Pearsoniana.

[7] Riccati, V. and Saladini, G. (1765) Institutiones Analyticae. 2 Volume. Ex Typographia Sancti Thomae Aquinatis, 1765-1767.

[8] Cramer, G. (1750) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraiques. Chez les Frères Cramer & Cl. Philibert.

[9] Stirling, J. (1797) Lineae Tertii Ordinis Neutonianae. J.B.M. Duprat, 32-198.

[10] Euler (1988) Introduction to Analysis of the Infinite. Springer, 9. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1021-4

[11] Guicciardini, N. (2009) Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method. The MIT Press, 109-136. https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262013178.001.0001

[12] 吴红丹. 三次曲线牛顿分类法的研究[J]. 中国农业大学学报, 2000, 5(6): 23-28.

[13] Whiteside, D.T. (1976) The Mathematical Papers of Isaac Newton. VII. 1691-1695. Cambridge University Press, 624-625.

附　录

本附录旨在补充 2.1 节中，牛顿在化简(1)式至标准型 1 的推导过程，以方便读者理解。

要从(1)化简至 $bxy^2 = dx^3 + gx^2 + hy + kx + l$，就需要将方程(1)中的第 1、3、5、6 项，即 y^3，x^2y，y^2，xy 项消去。牛顿设置关系式：

$$p = \frac{3dq^2 + cq}{bq + 3a} \tag{2}$$

$$\pi = 3a + 2bq + cq^2 \tag{3}$$

$$\sigma = e + fq + gq^2 \tag{4}$$

$$\rho = b + 2cq + 3dq^2 \tag{5}$$

$$r = \frac{q(s\rho + \tau)}{-\pi p} = \frac{\pi s + \sigma}{-\rho} \tag{6}$$

$$s = \frac{r\rho + \sigma}{-\pi} \tag{7}$$

首先消去(1)中的第 1 项 y^3，牛顿直接设置 y^3 的系数为 0，即 $dq^3 + cq^2 + bq + a = 0$。即可消去第 1 项。

接着消去(1)中的第 3 项 x^2y，其系数为 $3ap^2 + 2bp + bp^2q + 2cpq + c + 3dq$，合并同类项可得：$p^2(3a + bq) + p(2b + 2cq) + (c + 3dq)$。

将(2)代入 $p^2(3a + bq)$ 项，初步代换得到 $p(3dq^2 + cq)$，原系数变为

$p(3dq^2 + cq) + p(2b + 2cq) + (c + 3dq)$，即

$$p(3dq^2 + 2b + 3cq) + (c + 3dq) \tag{8}$$

联立方程 $dq^3 + cq^2 + bq + a = 0$ 与(2)，可以得到 $3a + bq = -q(2b + 3cq + 3dq^2)$，代入(2)中，原关系式变为 $p = -\frac{3dq + c}{2b + 3cq + 3dq^2}$；代入(8)中，$-(3dq + c) + (c + 3dq) = 0$，系数项为 0，消去第 3 项 x^2y。

其次消去(1)中的第 5 项 y^2，其系数为：

$$3as + 2bqs + cq^2s + br + 2cqr + 3dqqr + e + fq + gq^2 .$$

合并同类型可得 $s(3a + 2bq + cq^2) + r(b + 2cq + 3dq^2) + (e + fq + gq^2)$，代入关系式(3) (4) (5)化简得到 $s\pi + r\rho + \sigma$；接着代入(7)，$-\sigma - \rho r + \rho r + \sigma = 0$，系数项为 0，消去第 5 项 y^2。

最后消去消去(1)中的第 6 项 xy，其系数为

$$6aps + 2bpqs + 2bs + 2cqs + 2bpr + 2cpqr + 2cr + 6dqr + 2ep + f + fpq + 2gq$$

合并同类项得到 $2s(3ap + bpq + b + cq) + 2r(bp + cpq + c + 3dq) + 2\tau$，对前两项进行单独化简。首先对 $2s(3ap + bpq + b + cq)$，整理可得：

$$2sp(3a + bq) + 2s(b + cq) = 2s(3dq^2 + 2cq + b) = 2s\rho = -\frac{2\sigma\rho + \rho^2 r}{\pi} \tag{9}$$

接着对 $2r(bp + cpq + c + 3dq)$，整理可得：

$$2r\left[p(b + cq) + (c + 3dq)\right] = (3dq + c)\frac{\rho}{\rho + b + cq}2r \tag{10}$$

将(9) (10)代入 $2s\left(3ap+bpq+b+cq\right)+2r\left(bp+cpq+c+3dq\right)+2\tau$，得到：

$$-\frac{2\sigma\rho+\rho^{2}r}{\pi}+\left(3dq+c\right)\frac{\rho}{\rho+b+cq}2r+2\tau \tag{11}$$

联立方程 $dq^{3}+cq^{2}+bq+a=0$ 与(3)，得到：

$$\pi=-q\rho \tag{12}$$

联立(7) (12)得到：

$$r=\frac{\rho\sigma q+q^{2}\rho\tau}{pq^{2}\rho^{2}-\rho^{2}q}=\frac{\sigma+q\tau}{\rho\left(qp-1\right)} \tag{13}$$

将(2) (12) (13)代入(11)，得到 $-\frac{2\left(\sigma+q\tau\right)}{q}+\frac{2\sigma}{q}+2\tau=\frac{-2\sigma-2q\tau+2\sigma+2\tau q}{q}=0$，系数项为 0，消去第 6 项 xy。

至此，牛顿通过复杂的代数变换消去目标项，最终得到标准型 1。