

# 非线性阻尼薛定谔方程的高阶紧致有限差分算法

薛志超<sup>1</sup>, 云丹瑶<sup>1</sup>, 何斯日古楞<sup>2</sup>, 王桂霞<sup>1,3,4\*</sup>

<sup>1</sup>内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

<sup>2</sup>呼和浩特民族学院数学与大数据学院, 内蒙古 呼和浩特

<sup>3</sup>内蒙古自治区应用数学中心, 内蒙古 呼和浩特

<sup>4</sup>无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2026年2月4日; 录用日期: 2026年2月27日; 发布日期: 2026年3月9日

## 摘要

非线性阻尼薛定谔方程刻画光脉冲在吸收型非线性光纤中的传输等有着广泛应用。本文基于阻尼方程空间六阶紧致差分格式, 结合阻尼项的分裂方程和Strang分裂法, 构造了一种高阶紧致差分格式。利用能量估计法分析了所提格式的能量和质量的衰减性质。进而, 证明了所提格式的时间二阶、空间六阶误差估计结果。最后, 通过数值算例验证了该格式的有效性与可靠性。

## 关键词

薛定谔方程, 阻尼, 紧致差分格式, 收敛性, 误差估计

# A High-Order Compact Finite Difference Scheme for the Nonlinear Damped Schrödinger Equation

Zhichao Xue<sup>1</sup>, Danyao Yun<sup>1</sup>, Siriguleng He<sup>2</sup>, Guixia Wang<sup>1,3,4\*</sup>

<sup>1</sup>College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

<sup>2</sup>School of Mathematics and Big Data, Hohhot Minzu University, Hohhot Inner Mongolia

<sup>3</sup>Inner Mongolia Center for Applied Mathematical Science, Hohhot Inner Mongolia

<sup>4</sup>Key Laboratory of Infinite Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application, Ministry of Education, Hohhot Inner Mongolia

Received: February 4, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 9, 2026

\*通讯作者。

文章引用: 薛志超, 云丹瑶, 何斯日古楞, 王桂霞. 非线性阻尼薛定谔方程的高阶紧致有限差分算法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(3): 188-200. DOI: 10.12677/aam.2026.153098

## Abstract

The nonlinear damped Schrödinger equation has been widely applied in modeling the propagation of optical pulses in absorptive nonlinear optical fibers. In this paper, a high-order compact finite difference scheme is constructed by employing a sixth-order compact finite difference discretization in space for the damped equation, combined with a splitting formulation of the damping term and the Strang splitting method. The energy and mass decay properties of the proposed scheme are analyzed using the energy estimate method. Furthermore, second-order accuracy in time and sixth-order accuracy in space are rigorously established. Finally, numerical experiments are presented to verify the effectiveness and reliability of the proposed scheme.

## Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Damped, Compact Finite Difference Scheme, Convergence, Error Estimates

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

非线性薛定谔(NLS)方程是物理学中极具影响力的经典方程,在光孤子传输、Bose-Einstein 凝聚体动力学、等离子体 Langmuir 波包演化以及深水域小波陡重力波调制不稳定性等研究领域已有广泛应用。目前求解 NLS 方程的数值方法[1]-[11],主要包括物理信息神经网络(PINN)方法、Fourier 方法、多辛方法及(紧致)有限差分法。然而,在实际应用中能量耗散及阻尼效应不可避免。为此,本文研究非线性阻尼项薛定谔方程(DNLS)的初边值问题[12]-[14]

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u + i \eta u &= 0, x \in (a, b), t \in (0, T], \\ u(a, t) &= u(b, t), t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in [a, b], \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha$  为色散项系数,  $\beta$  为非线性项系数,  $\eta$  为阻尼项系数。 $\eta = 0$  时,方程(1)退化为经典的 NLS 方程。

[12]基于耗散的非线性薛定谔方程的一些共形守恒律,利用 Strang 分裂方法,构造了一种高阶紧致共形多辛方法、一种保局部共形动量方法和一种分裂共形多辛 Fourier 拟谱方法。文献[13]提出并分析一个求解耗散薛定谔方程的线性化紧致差分格式。通过引入一个新的变量来消除耗散项,原方程可化为一个保持总质量和总能量的守恒系统,继而对这个守恒系统提出了一个高效的紧致差分格式。文献[14]将非线性项的系数函数光滑截断为一个全局 Lipschitz 连续函数,并结合标准的能量方法,在对网格比没有任何要求的前提下建立了格式在最大模意义下的最优误差估计。但是,文献[12]、[13]和[14]的空间误差阶没有超过四阶,没有达到更高的误差阶。为此,本文将空间收敛阶提升到六阶,结合阻尼项的分裂方程和 Strang 分裂法,构造了一种高阶紧致差分格式,采用 MATLAB 中的 fsolve 优化工具箱进行数值求解迭代,使得该方程的差分格式有了更好的精度。Strang 分裂法在每个时间步内进行了两次评估,增加了

瞬时计算负担,但得益于算法的对称结构,相邻步间的半步算子可以合并为全步,从而在长时仿真中使计算开销与一阶分裂法相当。更重要的是,该方法允许在保持相同数值误差的前提下选取更大的时间步长,显著提升了整体的计算效率。

本文的结构安排如下:第1节引言。第2节构造有限差分格式,时间方向采用中心差分格式离散,空间方向各阶导数则通过六阶逆紧致算子进行离散。第3节先验估计与收敛性分析。第4节通过数值实例,验证该格式的有效性。

## 2. 差分格式的构造

针对求解区域  $x \in [a, b], t \in [0, T]$  进行网格剖分,取时间步长  $\tau = T/N$ ,空间步长  $h = (b-a)/J$ ,其中  $J, N$  为正整数。记网格点  $x_j = a + jh, (0 \leq j \leq J)$ ,  $t_n = n\tau, (0 \leq n \leq N)$ 。 $\bar{u}(x, t)$  为  $u(x, t)$  的共轭,用  $U_j^n$  表示网格点  $(x_j, t_n)$  处的精确值。 $u_j^n$  表示其近似值,  $I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_J\}$  表示区间  $[a, b]$  上的节点集合。 $Z_h$  表示在离散网格点上定义的函数集合。 $H_E^1$  表示定义在  $I_h$  上的一组网格函数  $u$ , 满足  $u(x_0, t_n) = u(x_1, t_n) = u(x_{J-1}, t_n) = u(x_J, t_n)$ 。

为使后续表述清晰,根据文献[11]的约定,本文所采用六阶紧致差分格式涉及的算子进行定义如下。

$$D_t^\eta u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} - e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{\tau}, \quad A_t^\eta u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{2},$$

当  $\eta = 0$  时,这些算子退化为标准算子。

算子  $\delta_x^1, \delta_x^2, P_x, Q_x$  如下

$$\delta_x^* = \frac{u_{j+2}^n + 28u_{j+1}^n - 28u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{36h}, \quad \delta_x^2 = \frac{3u_{j+2}^n + 48u_{j+1}^n - 102u_j^n - 48u_{j-1}^n - 3u_{j-2}^n}{44h^2}, \quad (2)$$

$$P_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + 3u_j^n + u_{j-1}^n}{3}, \quad Q_x u_j^n = \frac{2u_{j+1}^n + 11u_j^n + 2u_{j-1}^n}{11}. \quad (3)$$

六阶紧致差分格式中,满足

$$P_x \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n = \delta_x^* U_j^n + O(h^6), \quad Q_x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n = \delta_x^2 U_j^n + O(h^6). \quad (4)$$

由式(3)可知  $P_x, Q_x$  是对角占优的,所以可逆,从而有

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n = D_1 U_j^n + O(h^6), \quad \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n = D_2 U_j^n + O(h^6), \quad (5)$$

其中  $D_1 = P_x^{-1} \delta_x^*$ ,  $D_2 = Q_x^{-1} \delta_x^2$ 。

进一步,对于任意的网格函数  $f^n, g^n \in Z_h$ , 定义如下离散内积和范数

$$(f^n, g^n) = h \sum_{j=1}^{J-1} f_j^n g_j^n, \quad \|f^n\| = \sqrt{(f^n, f^n)}, \quad \|f^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |f_j^n|.$$

基于上述引进算子,在空间使用六阶紧致差分方法对 DNLS 方程进行处理,得到半离散系统

$$i \frac{d}{dt} u_j + \alpha (D_2 u)_j + \beta |u_j|^2 u_j + i \eta u_j = 0. \quad (6)$$

将方程(6)进行分裂为

$$i \frac{d}{dt} u_j + \alpha (D_2 u)_j + \beta |u_j|^2 u_j = 0, \quad (7)$$

和方程

$$i \frac{d}{dt} u_j + i \eta u_j = 0. \quad (8)$$

对于方程(7), 时间方向 Crank-Nicolson 格式进行离散可得

$$i \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \alpha \left( D_2 u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{\beta}{2} \left( |u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2 \right) u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (9)$$

而方程(8)容易求得解析解

$$u_j(t) = e^{-i\eta t} u_j(0). \quad (10)$$

进一步, 采用 Strang 分裂法得到 DNLS 方程的全离散格式

$$i D_t^{\frac{\eta}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{\beta}{2} \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) A_t^{\frac{\eta}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0. \quad (11)$$

### 3. 先验估计与收敛性分析

首先分析离散格式(11)的能量衰减律和质量衰减律。

**定理 1** 对于任意的  $n \geq 0$ , 格式(11)满足离散的能量和质量衰减律, 即

$$E^{n+1} = e^{-2\eta\tau} E^n + o(h^6), \quad Q^{n+1} = e^{-2\eta\tau} Q^n + o(h^6), \quad (12)$$

其中

$$E^n = \alpha \|D_1 u^n\|^2 - \frac{\beta}{2} \|u^n\|_4^4, \quad Q^n = \|u^n\|^2. \quad (13)$$

证明 式(11)与  $-D_t^{\frac{\eta}{2}} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}$  作内积, 并分别分析第一项、第二项和第三项如下

$$\begin{aligned} i \left( D_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}, -D_t^{\frac{\eta}{2}} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) &= -i \left\| D_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2, \\ \alpha \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}, -D_t^{\frac{\eta}{2}} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) &= -\alpha \left( D_2 \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{2}, \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^{n+1} - e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^n}{\tau} \right) \\ &= \alpha \left( D_1 \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{2}, D_1 \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^{n+1} - e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^n}{\tau} \right) + o(h^6) \\ &= \frac{\alpha}{2\tau} \left( \left\| D_1 e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \left\| D_1 e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 \right) + o(h^6), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \beta A_t^{\frac{\eta}{2}} (|u|^2)^{n+\frac{1}{2}} A_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}, -D_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&= -\beta h \sum_{j=1}^{J-1} A_t^{\frac{\eta}{2}} (|u|^2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^{n+1} - e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^n}{\tau} \\
&= -\beta \frac{h}{2\tau} \sum_{j=1}^{J-1} A_t^{\frac{\eta}{2}} (|u|^2)^{n+\frac{1}{2}} \left( e^{\eta\tau} (|u|^2)^{n+1} - e^{-\eta\tau} (|u|^2)^n \right) \\
&= -\beta \frac{1}{4\tau} \left( \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|_4^4 - \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|_4^4 \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

整理式(14), (15), (16), 取实部得

$$\frac{\alpha}{2\tau} \left( \left\| D_1 e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \left\| D_1 e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 \right) - \frac{\beta}{4\tau} \left( \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|_4^4 - \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|_4^4 \right) + o(h^6) = 0,$$

因而

$$\alpha \left\| D_1 e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \frac{\beta}{2} \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|_4^4 = \alpha \left\| D_1 e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 - \frac{\beta}{2} \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|_4^4 + o(h^6),$$

所以

$$E^{n+1} = e^{-2\eta\tau} E^n + o(h^6).$$

式(11)与  $A_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}$  作内积, 并分别分析第一项、第二项和第三项如下

$$i \left( D_t^2 u^{n+\frac{1}{2}}, A_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) = i \left( \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} - e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n}{\tau}, \frac{e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}^n}{2} \right) = i \frac{1}{2\tau} \left( \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 \right), \tag{17}$$

$$\alpha \left( D_2 A_t^2 u^{n+\frac{1}{2}}, A_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) = -\alpha \left( \left\| D_1 e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \left\| D_1 e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 \right) + o(h^6), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\left( \beta A_t^{\frac{\eta}{2}} (|u|^2)^{n+\frac{1}{2}} A_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}, A_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \beta \sum_{j=1}^{J-1} A_t^{\frac{\eta}{2}} (|u|^2)^{n+\frac{1}{2}} A_t^{\frac{\eta}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} A_t^2 \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} = \beta A_t^2 (|u|^4)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \beta \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|_4^4 - \beta \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|_4^4,
\end{aligned} \tag{19}$$

整理式(17), (18), (19), 取虚部得

$$\frac{1}{2\tau} \left( \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^{n+1} \right\|^2 - \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|^2 \right) + o(h^6) = 0,$$

因而

$$\|u^{n+1}\|^2 = e^{-2\eta\tau} \|u^n\|^2 + o(h^6),$$

所以

$$Q^{n+1} = e^{-2\eta\tau} Q^n + o(h^6).$$

进一步, 结合定理 1 的结论和文献[15]中先验误差估计技巧, 可得如下先验误差估计结果。

**定理 2** 存在正常数  $C$ ，使得格式(11)的数值解  $u^n$  满足

$$\left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u^n \right\|_{\infty} \leq C.$$

由[16]中的解析解分析，可知存在正常数  $C$ ，使得方程(1)的解  $u(x,t)$ ，有  $\|u\|_{L_{\infty}} \leq C$ 。

**定理 3** 设初始条件  $u^0 \in H_E^1[a,b]$ ， $u^n$  和  $U^n$  分别是格式(11)的数值解和初边值问题(1)的精确解，则存在与时间步长和空间步长无关的正常数  $C$ ，使得

$$\|u^n - U^n\| \leq C(\tau^2 + h^6).$$

证明 因为  $U^n$  是初边值问题(1)的精确解，故令  $A_t^{\frac{\eta}{2}} \theta_j^n = A_t^{\frac{\eta}{2}} u_j^n - A_t^{\frac{\eta}{2}} U_j^n$ ，

$$iD_t^{\frac{\eta}{2}} U_j^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{\beta}{2} \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) \left( A_t^{\frac{\eta}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + r_j^n = 0, \quad (20)$$

由式(11)减式(20)得

$$\begin{aligned} & iD_t^{\frac{\eta}{2}} \theta_j^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} \theta^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{i}{4} \beta \left( \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right) \right. \\ & \left. - \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right) \right) + r_j^n = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

即

$$\begin{aligned} r_j^n = & iD_t^{\frac{\eta}{2}} \theta_j^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} \theta^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{i}{4} \beta \left( \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right) \right. \\ & \left. - \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

在式(22)同乘  $hA_t^{\frac{\eta}{2}} \bar{\theta}_j^n$ ，同时对  $j$  从 1 到  $J-1$  求和

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^{n-1} r_j^n \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}} = & ih \sum_{j=1}^{n-1} D_t^{\frac{\eta}{2}} \theta_j^{n+\frac{1}{2}} \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}} + \alpha h \sum_{j=1}^{n-1} \left( D_2 A_t^{\frac{\eta}{2}} \theta^{n+\frac{1}{2}} \right)_j \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\beta}{4} h \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right) \right. \\ & \left. - \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) \left( e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right) \right] \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} & \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) u_j^{n+\frac{1}{2}} - \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) U_j^{n+\frac{1}{2}} \\ & = \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) \theta_j^{n+\frac{1}{2}} + \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 - \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} U_j^{n+1} \right|^2 - \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} U_j^n \right|^2 \right) u_j^{n+\frac{1}{2}} \\ & = \left( \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} \right|^2 + \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n \right|^2 \right) \theta_j^{n+\frac{1}{2}} + \left( e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^n e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}_j^n + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{\theta}_j^n + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^{n+1} e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{u}_j^{n+1} + e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{\theta}_j^{n+1} \right) u_j^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

在式(23)两端取虚部

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\tau} \left( \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^{n+1} \right\|^2 - \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^n \right\|^2 \right) \\
 & \leq \frac{|\beta|}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} \left| \left( e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^n e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{U}_j^n + e^{-\frac{\eta}{2}\tau} u_j^n e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \bar{\theta}_j^n + e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^{n+1} e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{U}_j^{n+1} + e^{\frac{\eta}{2}\tau} u_j^{n+1} e^{\frac{\eta}{2}\tau} \bar{\theta}_j^{n+1} \right) u_j^{n+\frac{1}{2}} \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + h \sum_{j=1}^{J-1} \left| r_j^n \bar{\theta}_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \\
 & \leq \frac{|\beta|}{2} (c_2 + c_0) c_2 h \sum_{j=1}^{J-1} \left( \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^n \right| + \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^{n+1} \right| \right) \left| e^{n+\frac{1}{2}} \right| + h \sum_{j=1}^{J-1} \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} r_j^n \right| \left| \theta_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \\
 & \leq \frac{|\beta|}{2} (c_2 + c_0) c_2 h \sum_{j=1}^{J-1} \left( \left| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^n \right|^2 + \left| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta_j^{n+1} \right|^2 \right) + \frac{1}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} |r_j^n|^2 + \frac{1}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} \left| A_t^2 \theta_j^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 \\
 & \leq \left[ \frac{1}{4} + \frac{|\beta|}{2} (c_2 + c_0) c_2 \right] \left( \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta^n \right\|^2 + \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^{n+1} \right\|^2 \right) + c \|r^n\|^2 \\
 & \leq c \left( \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta^n \right\|^2 + \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^{n+1} \right\|^2 \right) + c \|r^n\|^2,
 \end{aligned}$$

所以, 有

$$\left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^n \right\|^2 - \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta^{n-1} \right\|^2 \leq c\tau \left\| e^{\frac{\eta}{2}\tau} \theta^n \right\|^2 + c\tau \left\| e^{-\frac{\eta}{2}\tau} \theta^{n-1} \right\|^2 + c\tau \|r^{n-1}\|^2,$$

求和, 得

$$\left\| e^{n\tau} \theta^n \right\|^2 \leq \left\| \theta^0 \right\|^2 + c\tau \sum_{n=1}^{J-1} \left\| e^{n\tau} \theta^n \right\|^2 + c\tau \sum_{n=1}^{J-1} \left\| e^{n\tau-1} \theta^{n-1} \right\|^2 + c\tau \sum_{n=1}^{J-1} \|r^{n-1}\|^2,$$

根据 Gronwall 不等式, 有

$$(1 - c\tau) \left\| e^{n\tau} \theta^n \right\|^2 \leq \left\| \theta^0 \right\|^2 + o(\tau^4 + h^2),$$

当  $\tau$  充分小, 整理得

$$\left\| \theta^n \right\|^2 \leq \left\| e^{n\tau} \theta^n \right\|^2 \leq \left\| \theta^0 \right\|^2 + o(\tau^4 + h^2),$$

注意到  $\theta^0 = 0$  时

$$\left\| \theta^n \right\| \leq c(\tau^2 + h^6).$$

从而定理得证。

#### 4. 数值实例

记能量和质量分别为

$$E^{n+1} = e^{-2\eta\tau} E^n, \quad Q^{n+1} = e^{-2\eta\tau} Q^n.$$

时间方向上与空间方向上的收敛阶如下

$$Order_t = \log_{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \frac{err(\tau_1, h)}{err(\tau_2, h)}, \quad Order_h = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{err(\tau, h_1)}{err(\tau, h_2)},$$

其中  $err(\tau, h) = \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n - U^n\|$ 。

**算例 4.1** 为分析所提格式的收敛性, 本算例考虑方程(1)取  $\alpha = 1, \beta = 2, \eta = 0$  时, 退化为具有精确解

$u(x,t) = M \operatorname{sech}(x-4t)e^{(2ix-3it)}$  的 NLS 方程初边值问题。此时，我们取边界条件为  $u(-20,t) = u(20,t)$ 。

当  $M = 1$  时，计算误差阶，时间方向上的收敛阶如表 1 所示，空间方向上的收敛阶如表 2 所示。

**Table 1.** When  $T = 1, h = 40/600$ , maximum norm error and convergence order in the time direction

**表 1.**  $T = 1, h = 40/600$  时，时间方向最大模误差与收敛阶

$\tau$	$err(\tau, h)$	$Order_\tau$
0.1	0.1370	—
0.05	0.0331	2.0493
0.025	0.0083	1.9956
0.0125	0.0021	1.9827

**Table 2.** When  $T = 1, h = 0.001$ , maximum norm error and convergence order in the spatial direction

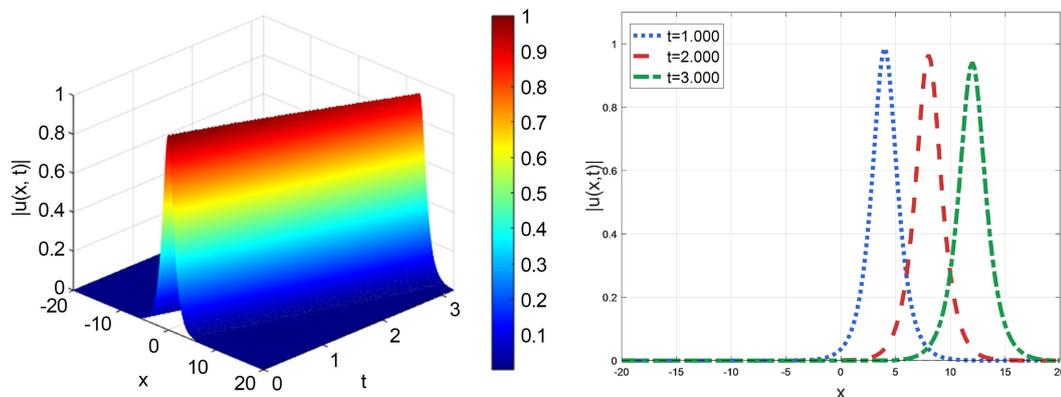
**表 2.**  $T = 1, h = 0.001$  时，空间方向最大模误差与收敛阶

$h$	$err(\tau, h)$	$Order_h$
40/160	$4.8656 \times 10^{-4}$	—
40/200	$1.2449 \times 10^{-4}$	6.1088
40/250	$3.2213 \times 10^{-5}$	6.0582
40/300	$1.0772 \times 10^{-5}$	6.0082

固定某一方向剖分步长充分小时，表 1 和表 2 分别展示了时间方向和空间方向最大模计算误差及其收敛阶。如表 1 与表 2 所示，数值格式的收敛阶与理论预期高度吻合：时间方向呈现二阶精度，空间方向达到六阶精度，这一结果与理论分析结论一致。

**算例 4.2** 考虑  $\alpha = 1, \beta = 2$ ，且  $\eta$  取不同值时，DNLS 方程初边值问题。

首先，讨论初始条件  $u(x,0) = e^{2ix} \operatorname{sech} x$  且边界条件为  $u(-20,t) = u(20,t)$  时，阻尼系数对单孤立波的影响。图 1 和图 2 分别展示了  $t \in [0, 3.2]$  内， $\eta = 0.01$  和  $\eta = 0.1$  时孤立波的演化过程。从图 1 和图 2 可知，随着阻尼项的变大，波的振幅下降显著。图 3 和图 4 分别描述了  $t \in [0, 3.2]$  内， $\eta = 0.01$  时质量和能量耗散图形。图 5 和图 6 分别描述了  $t \in [0, 3.2]$  内， $\eta = 0.1$  时质量和能量耗散图形。图 3~6 表明，数值质量和能量的耗散与理论分析结果高度吻合。



**Figure 1.** The evolution process of a single wave ( $\eta = 0.01$ )

**图 1.** 单孤立波演化 ( $\eta = 0.01$ )

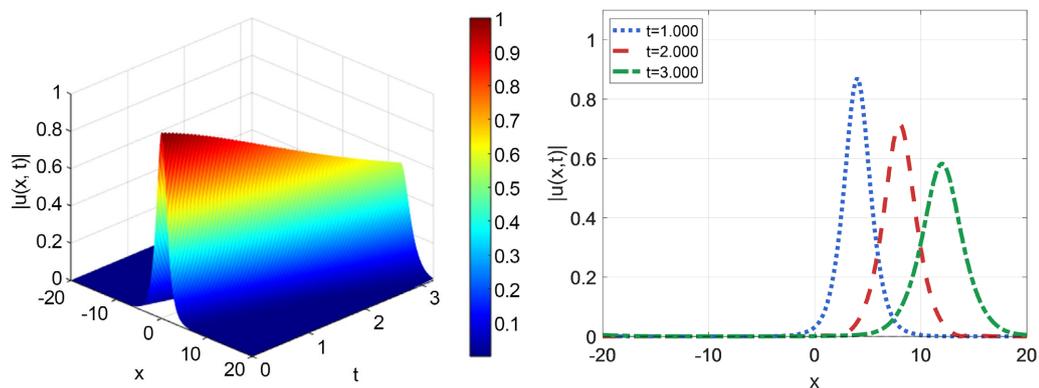


Figure 2. The evolution process of a single wave ( $\eta = 0.1$ )

图 2. 单孤立波演化( $\eta = 0.1$ )

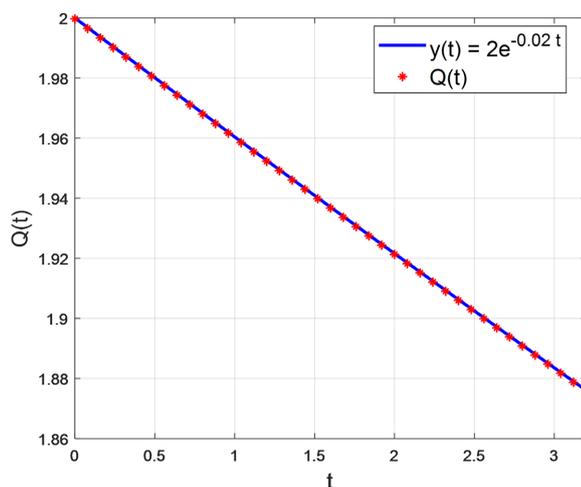


Figure 3. The numerical quality from  $T = 3.2$  ( $\eta = 0.01$ )

图 3.  $T = 3.2$  时质量( $\eta = 0.01$ )

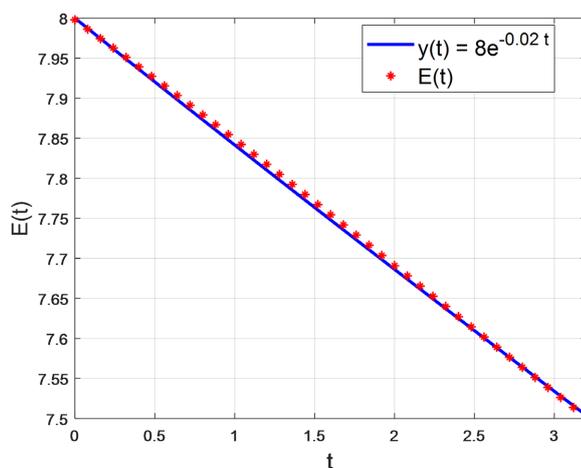
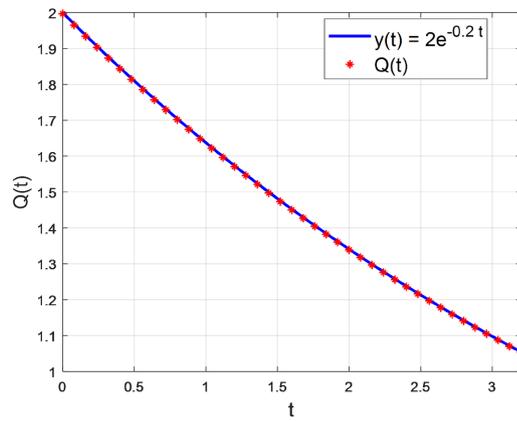


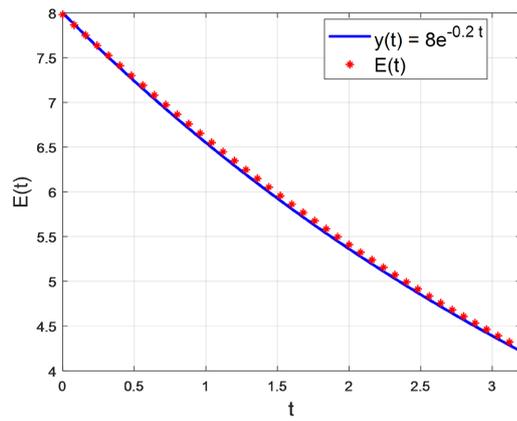
Figure 4. The numerical energy from  $T = 3.2$  ( $\eta = 0.01$ )

图 4.  $T = 3.2$  时能量( $\eta = 0.01$ )



**Figure 5.** The numerical quality from  $T = 3.2$  ( $\eta = 0.1$ )

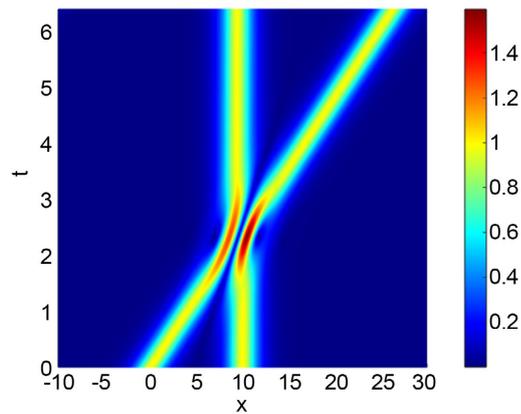
**图 5.**  $T = 3.2$  时质量( $\eta = 0.1$ )



**Figure 6.** The numerical energy from  $T = 3.2$  ( $\eta = 0.1$ )

**图 6.**  $T = 3.2$  时能量( $\eta = 0.1$ )

当时间长度  $T = 60$ ，初始条件取  $u(x, 0) = \text{sech}(x - 20)e^{0.5ix} + \text{sech}(x - 45)e^{0.05i(x-10)}$  时阻尼项系数对双孤立波的振幅、质量和能量影响，模拟结果如图 7~12 所示。



**Figure 7.** Double-wave collision ( $\eta = 0.01$ )

**图 7.** 双波碰撞( $\eta = 0.01$ )

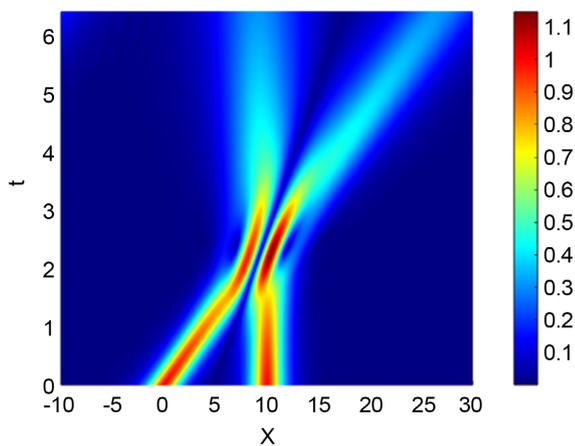


Figure 8. Double-wave collision ( $\eta = 0.1$ )

图 8. 双波碰撞( $\eta = 0.1$ )

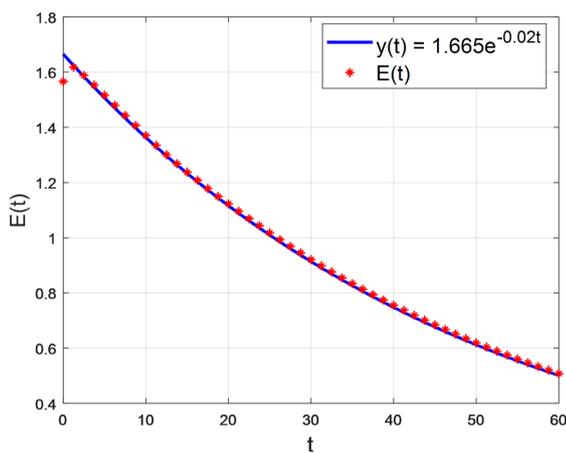


Figure 9. Double-wave collision energy ( $\eta = 0.01$ )

图 9. 双波碰撞能量( $\eta = 0.01$ )

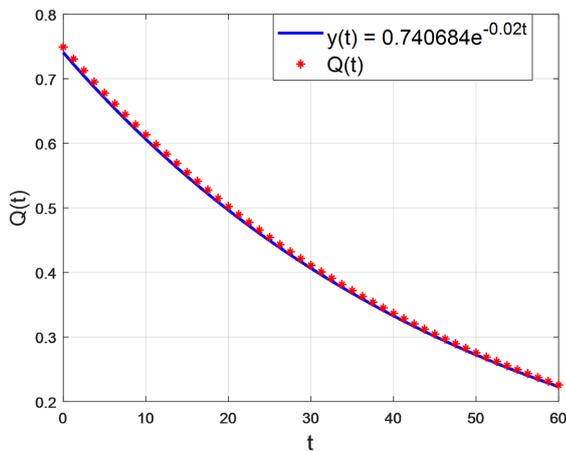


Figure 10. Double-wave collision mass ( $\eta = 0.01$ )

图 10. 双波碰撞质量( $\eta = 0.01$ )

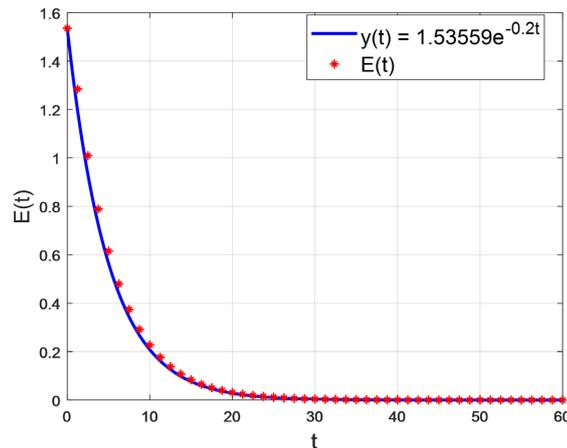


Figure 11. Double-wave collision energy ( $\eta = 0.1$ )

图 11. 双波碰撞能量( $\eta = 0.1$ )

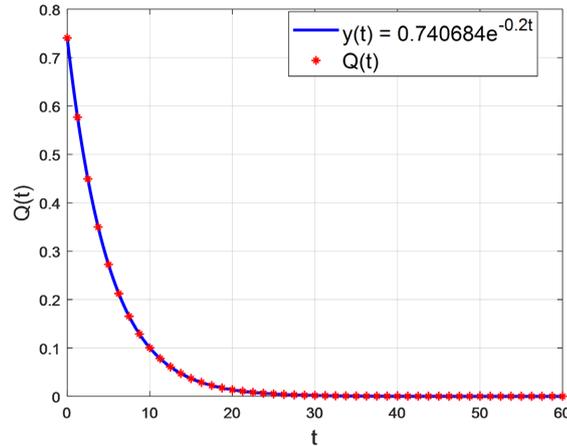


Figure 12. Double-wave collision mass. ( $\eta = 0.1$ )

图 12. 双波碰撞质量( $\eta = 0.1$ )

从图 7~12 可知, 阻尼系数对双孤立演化过程的影响与单孤立波的影响相似。随着阻尼系数  $\eta$  的增大, 孤立波的振幅、能量和质量均呈现衰减现象与理论分析相吻合。

## 5. 小结

对非线性阻尼薛定谔方程初边值问题, 引入阻尼项的分裂方程和 Strang 分裂技术, 提出了一种高阶紧致差分格式, 并分析了格式的质量和能量耗散性质, 进而证明了格式的时间二阶、空间六阶收敛精度。利用所提格式通过模拟非线性阻尼薛定谔方程数值解发现, 经过长时间传播演化, 随着阻尼项的增强, 波的振幅下降显著, 与理论分析结果相符合。

## 基金项目

国家自然科学基金(62161045); 教育部重点实验室开放课题项目(2023KFZDO1); 内蒙古自治区自然科学基金(2023LHMS01007); 内蒙古自治区“揭榜挂帅”项目(2024JBGS0010-1); 内蒙古师范大学基本科研经费项目(2022JBQN074)。

## 参考文献

- [1] 王一辰, 王桂霞, 李骞. 基于物理信息神经网络算法的海洋内孤立波研究[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学科学版), 2025, 54(2): 198-206.
- [2] Lo, E. and Mei, C.C. (1985) A Numerical Study of Water-Wave Modulation Based on a Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 150, 395-416. <https://doi.org/10.1017/s0022112085000180>
- [3] Gao, Z. and Xie, S. (2011) Fourth-Order Alternating Direction Implicit Compact Finite Difference Schemes for Two-Dimensional Schrödinger Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 61, 593-614. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2010.12.004>
- [4] Kong, L., Duan, Y., Wang, L., Yin, X. and Ma, Y. (2012) Spectral-Like Resolution Compact ADI Finite Difference Method for the Multi-Dimensional Schrödinger Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 55, 1798-1812. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.036>
- [5] Caplan, R.M. and Carretero-González, R. (2013) Numerical Stability of Explicit Runge-Kutta Finite-Difference Schemes for the Nonlinear Schrödinger Equation. *Applied Numerical Mathematics*, 71, 24-40. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2013.04.002>
- [6] Wang, T., Guo, B. and Xu, Q. (2013) Fourth-Order Compact and Energy Conservative Difference Schemes for the Nonlinear Schrödinger Equation in Two Dimensions. *Journal of Computational Physics*, 243, 382-399. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.03.007>
- [7] Wang, T. (2014) Optimal Point-Wise Error Estimate of a Compact Difference Scheme for the Klein-Gordon-Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412, 155-167. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.038>
- [8] Wang, B., Liang, D. and Sun, T. (2018) The Conservative Splitting High-Order Compact Finite Difference Scheme for Two-Dimensional Schrödinger Equations. *International Journal of Computational Methods*, 15, Article 1750079. <https://doi.org/10.1142/s0219876217500797>
- [9] Eskar, R., Feng, X. and Huang, P. (2018) Fourth-Order Compact Split-Step Finite Difference Method for Solving the Two- and Three-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equations. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 10, 879-895. <https://doi.org/10.4208/aamm.0a-2017-0162>
- [10] Eskar, R., Huang, P. and Feng, X. (2018) A New High-Order Compact ADI Finite Difference Scheme for Solving 3D Nonlinear Schrödinger Equation. *Advances in Difference Equations*, 2018, Article No. 186. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1700-1>
- [11] 王二艳. 多辛哈密顿系统的高阶紧致保结构算法[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2016.
- [12] 傅浩. 共形 Hamilton 系统的若干保结构算法研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 2018.
- [13] 王廷春, 王国栋, 张雯. 求解耗散 Schrödinger 方程的一个无条件收敛的线性化紧致差分格式[J]. 应用数学学报, 2017, 40(1): 1-15.
- [14] 王廷春, 王国栋, 张雯. 非线性耗散 Schrödinger 方程的紧致差分格式[J]. 工程数学学报, 2018, 35(6): 693-706.
- [15] Jiang, C., Cai, W. and Wang, Y. (2018) Optimal Error Estimate of a Conformal Fourier Pseudo-Spectral Method for the Damped Nonlinear Schrödinger Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 34, 1422-1454. <https://doi.org/10.1002/num.22264>
- [16] Tsutsumi, M. (1990) On Global Solutions to the Initial-Boundary Value Problem for the Damped Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 145, 328-341. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(90\)90403-3](https://doi.org/10.1016/0022-247x(90)90403-3)