

含水平热梯度和热传导的二维可压缩流体模型柯西问题的强解

周宏辉, 任永华*, 王旦霞

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年2月18日; 录用日期: 2026年3月11日; 发布日期: 2026年3月23日

摘 要

本文研究了受水平热梯度效应与热传导影响的二维可压缩流体模型的柯西问题。与现有文献中忽略热传导的简化模型不同, 热传导项的引入在真空远场条件下引发了新的困难: 如何控制温度梯度项的增长。为此, 本文通过构造合适的权重函数并建立关于温度及其时间导数的新先验估计, 有效克服了方程间的耦合效应。在适当的初值和相容性条件下, 我们证明了该模型强解的局部存在性和正则性。这一工作将现有理论推广至更一般的物理框架, 也为该模型在相关物理过程中的数值模拟与理论分析提供了坚实的数学基础。

关键词

可压缩流体模型, 强解, 柯西问题, 水平热梯度, 热传导

Strong Solutions to the 2D Cauchy Problem for a Compressible Fluid Model with Horizontal Thermal Gradient and Heat Conduction

Honghui Zhou, Yonghua Ren*, Danxia Wang

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: February 18, 2026; accepted: March 11, 2026; published: March 23, 2026

*通讯作者。

文章引用: 周宏辉, 任永华, 王旦霞. 含水平热梯度和热传导的二维可压缩流体模型柯西问题的强解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(3): 393-408. DOI: 10.12677/aam.2026.153114

Abstract

This paper investigates the Cauchy problem for a two-dimensional compressible fluid model subject to horizontal thermal gradient effects and heat conduction. In contrast to simplified models in the existing literature that neglect heat conduction, the inclusion of the heat conduction term introduces new challenges under vacuum far-field conditions—specifically, controlling the growth of temperature gradient terms. To address this, we construct suitable weight functions and establish novel a priori estimates for both the temperature and its time derivative, thereby effectively overcoming the strong coupling among the equations. Under appropriate initial conditions and compatibility assumptions, we prove the local existence and regularity of strong solutions to the model. This work extends the current theory to a more general physical framework and provides a rigorous mathematical foundation for numerical simulations and further theoretical analysis of related physical processes.

Keywords

Compressible Fluid Model, Strong Solutions, Cauchy Problem, Horizontal Thermal Gradient, Heat Conduction

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在众多动态流体现象中，垂直与水平温度梯度均可能诱发流体流动的不稳定性。本文聚焦于水平温度梯度的影响机制，这类梯度能够激发出多种复杂的流体动力学现象。例如，Yang [1]利用水平热梯度效应研究了龙卷风、飓风等极端气象事件的形成机制。为探究由水平热梯度驱动的可压缩流体运动，传统的可压缩流体模型无法直接适用。为此，Yang 与 Liu [2]构建了一个新的二维可压缩流体模型。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \tilde{\mu} \Delta \mathbf{u} + \tilde{\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta \theta \nabla \varphi - \delta \nabla \varphi - \beta \nabla \theta + \mathbf{F}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \tilde{k} \Delta \theta + Q(\mathbf{u}) - c_v^{-1} (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u} + h, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)(x, t)$ 是速度场， θ 为温度函数， $c_v > 0$ 为定容比热容， β 和 δ 为物理常数， $\tilde{\mu} = \mu e^{-\varphi(x, t)}$ ， $\tilde{\nu} = \nu e^{-\varphi(x, t)}$ ， $\varphi = \ln \rho$ 为密度函数 (ρ 为密度)， $\tilde{k} = k e^{-\varphi(x, t)}$ ， $\mathbf{F}$ 为外力， $h = c_v^{-1} H$ 为热源项， μ 、 ν 和 k 为非负的粘性系数。函数 $Q(\mathbf{u})$ 定义为：

$$Q(\mathbf{u}) = e^{-\varphi(x, t)} c_v^{-1} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T|^2 + \nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right]. \quad (2)$$

注意到由热梯度动力驱动模型(如飓风、热对流气体)其强烈的动力学变化往往集中在有限区域内，而在远离该区域的介质中流体状态将趋于稀疏、平静。因此本文考虑的柯西问题设定在无穷远处趋于真空条件。这一条件刻画了流体扰动在远场衰减至零的渐近行为，与物理观测中的特征一致。

现如今,可压缩流体模型在不同边界条件下解的性质已得到广泛研究。在多维空间中, Serrin [3]首次证明了非真空条件下热传导可压缩流体方程解的唯一性,而同一问题的局部存在性结果则由 Nash [4]和 Itaya [5]分别独立建立。随后, Chen [6]在初始数据存在大幅振荡且考虑自由边界奇点的情况下,证明了解的整体存在性。当初始数据允许真空时, Kim 和 Cho 等人[7]-[9]通过引入适当的初始相容性条件,建立了初边值问题强解与经典解的局部存在唯一性理论。在具有真空远场条件的二维全空间中, Li [10]通过引入权函数建立了强解的存在唯一性。在此框架下, Liang [11]建立了完全可压缩 Navier-Stokes 方程二维柯西问题强解的局部存在性。Chen 与 Zhong [12]进一步推导了二维可压缩液晶流模型柯西问题局部强解的存在唯一性。

近期, Liu [13]在忽略热传导效应(即 $\tilde{k} = 0$)这一简化条件下,研究了模型(1)的柯西问题。然而在实际的流体动力学过程中,热传导是能量守恒与耗散的关键机制。因此,在模型中恢复热传导项是将其应用于真实物理场景(如涉及显著热交换的流动)的必要步骤。尽管热传导项会促使温度分布趋于均匀,从而削弱热梯度的驱动效应。然而在短时间内热传导的影响尚未充分展开,其耗散作用相对于热梯度的驱动作用仍处于次要地位。此外,热传导项的加入导致能量方程与动量方程耦合更加复杂,同时也带来新的分析挑战,其核心难点在于:如何在远场真空条件下,对由此产生的温度梯度项进行有效估计。而这一估计问题在 Liu [13]的简化模型中并不存在,因此其分析框架无法直接适用。为克服这一困难,我们借鉴 Liang [11]的加权能量方法(引理 2.6),针对温度场及其时间导数建立新的先验估计(引理 3.5~3.7)。基于此,我们成功在全空间中建立起该模型强解的局部存在性与正则性理论,从而将 Liu [13]的结果推广至一个物理上更一般、更真实的模型框架。

在接下来的分析中,我们考虑 $\Omega = \mathbf{R}^2$ 的情形,并且令 $\mathbf{F} = \mathbf{h} = 0$,从而得到如下简化系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \tilde{\mu} \Delta \mathbf{u} + \tilde{\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta \theta \nabla \varphi - \delta \nabla \varphi - \beta \nabla \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \tilde{k} \Delta \theta + Q(\mathbf{u}) - c_v^{-1} (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

设定以下初始数据以及无穷远行为:

$$(\varphi, \mathbf{u}, \theta)(x, 0) = (\varphi_0, \mathbf{u}_0, \theta_0)(x), \quad x \in \mathbf{R}^2. \quad (4)$$

$$(\varphi, \mathbf{u}, \theta)(x, t) \rightarrow (-\infty, \mathbf{0}, 0), \quad \text{当 } |x| \rightarrow +\infty, t > 0 \text{ 时}. \quad (5)$$

定理 1.1 令常数 $\eta_0 > 0, q > 2, a > 1$ 并定义

$$\bar{x} = \left(e + |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ln^{1+\eta_0} \left(e + |x|^2 \right), \quad (6)$$

假设初值 $(\varphi_0, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ 满足

$$\begin{cases} e^{\eta_0} \bar{x}^a \in L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}, \\ \sqrt{e^{\eta_0}} \mathbf{u}_0 \in L^2, \quad \sqrt{e^{\eta_0}} \theta_0 \in L^2, \\ \nabla \mathbf{u}_0 \in H^1, \quad \nabla \theta_0 \in H^1. \end{cases} \quad (7)$$

且满足以下相容性条件: 存在 $g_1, g_2 \in L^2(\mathbf{R}^2)$, 使得

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_0 - \nu \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}_0) + \delta \nabla e^{\eta_0} + \beta \nabla (e^{\eta_0} \theta_0) = \sqrt{e^{\eta_0}} g_1, \\ -k \Delta \theta_0 - \nu (\operatorname{div} \mathbf{u}_0)^2 - \frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u}_0 + (\nabla \mathbf{u}_0)^{\operatorname{tr}}|^2 - e^{\eta_0} (\beta \theta_0 + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = \sqrt{e^{\eta_0}} g_2, \end{cases} \quad (8)$$

则存在 $T_0 \geq 0$, 使得模型(3)~(5)在 $\mathbf{R}^2 \times (0, T_0]$ 上存在强解 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 满足

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\varphi \bar{x}^a \in L^\infty(0, T_0; L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}), \\ \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u}, \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta, \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u}_t, \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t \in L^\infty(0, T_0; L^2), \\ \nabla \mathbf{u}, \nabla \theta \in L^\infty(0, T_0; H^1), \\ \nabla \mathbf{u}, \nabla \theta \in L^2(0, T_0; W^{1,q}), \\ \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u}_t, \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t, \nabla \mathbf{u}_t, \nabla \theta_t \in L^2(0, T_0; L^2), \end{cases} \quad (9)$$

并且存在常数 $N > 0$ (其中 $B_N := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < N\}$), 使得

$$\inf_{0 \leq t \leq T_0} \int_{B_N} \mathbf{e}^{\varphi(x,t)} dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{e}^{\varphi_0(x,t)} dx. \quad (10)$$

2. 预备知识

本节汇集了一些已知结果和基本不等式, 它们将在后续的分析中起到关键作用。标准的 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间定义如下: $L^r = L^r(B_R)$, $W^{k,r} = W^{k,r}(B_R)$, $H^k = W^{k,2}(B_R)$ 。

其中 $1 < r < \infty$, $R > 0$, $B_R := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < R\}$ 以及 $k \geq 0$ 。

引理 2.1 [2] 假设初始数据满足

$$(\varphi_0, \mathbf{u}_0, \theta_0) \in H^3, \quad \inf_{x \in B_R} \varphi_0(x) > \delta. \quad (11)$$

其中 $\delta \in \mathbf{R}$, 则存在一个 $T_R > 0$, 使得方程(3)在边界条件

$$\mathbf{u}|_{\partial B_R} = 0, \quad \theta|_{\partial B_R} = 0. \quad (12)$$

下存在唯一古典解 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 满足

$$\begin{cases} \varphi \in C([0, T_R], H^3), \quad \varphi_t \in C([0, T_R], H^2), \\ \mathbf{u}, \theta \in C([0, T_R], H_0^1 \cap H^2) \cap L^2(0, T_R; H^3), \\ \mathbf{u}_t, \theta_t \in L^\infty(0, T_R; L^2) \cap L^2(0, T_R; H^1). \end{cases} \quad (13)$$

引理 2.2 [14] 设 $f \in H^1(B_R)$, 且 $g \in L^r(B_R) \cap W^{1,q}(B_R)$, 其中 $r \in (1, \infty)$, $q \in (2, \infty)$ 。则存在一个与 R 无关的正常数 C 使得

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|f\|_{H^1}^{\frac{p-2}{p}}, \quad \forall p \in [2, \infty), \quad (14)$$

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C \|g\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2}^{\frac{q-2}{2(q-1)}} \|\nabla g\|_{L^q}^{\frac{q}{2(q-1)}}. \quad (15)$$

针对空间 $\tilde{D}^{1,2}(\Omega) \triangleq \{v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)\}$ 中的元素有下述加权 L^p 估计。

引理 2.3 [13] 设 $m \in [2, \infty)$ 且 $\theta \in \left(1 + \frac{m}{2}, \infty\right)$, 并且有 $\Omega = \mathbf{R}^2$ 或 $\Omega = B_R$ ($R \geq 1$) 则存在一个正的常数 C

对任意的 $v \in \tilde{D}^{1,2}(\Omega)$,

$$\left(\int_{\Omega} \frac{|v|^m}{(\mathbf{e} + |x|^2) \ln^\theta(\mathbf{e} + |x|^2)} dx \right)^{\frac{1}{m}} \leq C \|v\|_{L^2(B_1)} + C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (16)$$

引理 2.4 [10] 设 $\bar{x}$ 和 η_0 同(6)式中定义, Ω 同引理 2.3。若 $e^\varphi \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 满足

$$\int_{B_{N_1}} e^\varphi dx \geq M_1, \quad (17)$$

其中 M_1 与 $N_1 \geq 1$ 为正常数且 $B_{N_1} \subset \Omega$, 则对任意 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在仅依赖于 $\varepsilon, \eta, M_1, N_1$ 及 η_0 的常数 $C > 0$, 使得对一切 $v \in \tilde{D}^{1,2}(\Omega)$ 以及 $\tilde{\eta} = \min\{1, \eta\}$ 有

$$\|v\bar{x}^{-\eta}\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\tilde{\eta}}}(\Omega)} \leq C \|\sqrt{e^\varphi} v\|_{L^2(\Omega)} + C \left(1 + \|e^\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (18)$$

引理 2.5 [7] 设 $v, w \in W_0^{1,p}(B_R)$ ($p > 1$) 分别满足如下两个问题:

$$\begin{cases} \mu \Delta v + v \nabla \operatorname{div} v = F, & x \in B_R, \\ v = 0, & x \in \partial B_R, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \Delta w = G, & x \in B_R, \\ w = 0, & x \in \partial B_R, \end{cases} \quad (20)$$

若 $F, G \in L^p(B_R)$, 则存在一个与 R 无关的正常数 C , 使得

$$\|\nabla^2 v\|_{L^p(B_R)} \leq C \|F\|_{L^p(B_R)}, \quad \|\nabla^2 w\|_{L^p(B_R)} \leq C \|G\|_{L^p(B_R)}. \quad (21)$$

引理 2.6 [11] 设 (φ, u, θ) 是问题(3)的解则有

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla u + (\nabla u)^{\operatorname{tr}}|^2 + \nu (\operatorname{div} u)^2 \right] |x|^{b_1} dx \\ & \leq \int_{B_R} |c_v (e^\varphi \theta_t + e^\varphi u \cdot \nabla \theta) + e^\varphi (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} u| |x|^{b_1} dx. \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $b_1 > 0$ 。

3. 先验估计

在本章节中, 定义:

$$\int \cdot dx = \int_{B_R} \cdot dx, \quad L^r = L^r(B_R), \quad W^{k,r} = W^{k,r}(B_R), \quad H^k = W^{k,2}. \quad (23)$$

并设定 $(\varphi_0, u_0, \theta_0)$ 满足当 $R \geq 4N_0 \geq 4$ 且 $N_0 \geq 1$ 为固定常数时, 有

$$\frac{1}{2} \leq \int_{B_{N_0}} e^{\varphi_0(x)} dx \leq \int_{B_R} e^{\varphi_0(x)} dx \leq \frac{3}{2}. \quad (24)$$

令 $\bar{x}, \eta_0, a, q$ 如同定理 1.1 所设, 定义:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & 1 + \|\sqrt{e^\varphi} u\|_{L^2} + \|\sqrt{e^\varphi} \theta\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla \theta\|_{H^1} + \|\sqrt{e^\varphi} u_t\|_{L^2} \\ & + \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2} + \|\bar{x}^a e^\varphi\|_{L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}} + \|e^\varphi\|_{H^1 \cap W^{1,q}}. \end{aligned} \quad (25)$$

本章的核心目标是建立与截断半径 R 无关的一致先验估计, 以支持后续在 $\mathbf{R}^2$ 上构造强解。为此, 我们引入辅助能量泛函 $\psi(t)$, 并对其各组成部分进行逐项控制。引理 3.1~3.2 控制速度及其时间导数; 引理 3.3~3.4 处理密度有界性; 引理 3.5~3.7 则控制温度及其时间导数。所有估计最终被统一, 得到 $\psi(t)$ 在某固定时间区间上的上界, 且该界不依赖于 R 。于是证明了命题 3.1。

命题 3.1 假设初始数据 $(\varphi_0, u_0, \theta_0)$ 满足条件(11)和(24), 并令 (φ, u, θ) 成为由引理 2.1 在区域 $B_R \times (0, T_R]$

上所得到的(3)、(11)和(12)的解, 则存在仅依赖于 $\mu, \nu, q, a, \eta_0, N_0$ 和 E_0 的正常数 T_0 和 M_0 , 使得下述不等式成立

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \psi(t) + \int_0^{T_0} \left(\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^2 + \|\nabla^2 \theta\|_{L^q}^2 \right) dt \leq M. \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} E_0 \triangleq & \left\| \sqrt{\mathbf{e}^{\eta_0}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2} + \left\| \sqrt{\mathbf{e}^{\eta_0}} \theta_0 \right\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{H^1} + \|\nabla \theta_0\|_{H^1} + \left\| \mathbf{e}^{\eta_0} \bar{x}^a \right\|_{L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}} \\ & + \left\| \mathbf{e}^{\eta_0} \right\|_{H^1 \cap W^{1,q}} + \|g_1\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

命题 3.1 将在本节的最后得证。接下来做一些估计, 这将会在之后的引理证明中用到:

首先, 由基本的能量估计(参考[12]的 3.5 式)得出

$$\int \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^\varphi |\mathbf{u}|^2 + c_v \mathbf{e}^\varphi (\theta + \delta/\beta) \right) dx \leq \int \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^{\eta_0} |\mathbf{u}_0|^2 + c_v \mathbf{e}^{\eta_0} (\theta_0 + \delta/\beta) \right) dx, \quad t \geq 0. \quad (28)$$

令 $\phi_N \in C_0^\infty(B_N)$ 满足

$$0 \leq \phi_N \leq 1, \quad \phi_N(x) = 1, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{N}{2}, \quad |\nabla \phi_N| \leq 2N^{-1}. \quad (29)$$

其中 $N > 1$ 。根据(3)和(28)可以得出

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{e}^\varphi \phi_{2N_0} dx = \int \mathbf{e}^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_{2N_0} dx \geq -CN_0^{-1} \left\| \mathbf{e}^\varphi \right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u} \right\|_{L^2} \geq -C_1(E_0, N_0), \quad (30)$$

对(30)式积分并结合质量守恒定律可得

$$\inf_{0 \leq t \leq T_1} \int_{B_{2N_0}} \mathbf{e}^\varphi dx \geq \inf_{0 \leq t \leq T_1} \int \mathbf{e}^\varphi \phi_{2N_0} dx \geq \int \mathbf{e}^{\eta_0} \phi_{2N_0} dx - C_1 T_1 \geq \frac{1}{4}, \quad (31)$$

其中 $T_1 = \min \{1, (4C_1)^{-1}\}$ 。则有对任意 $t \in [0, T_1]$ 以及 $\varepsilon, \eta > 0$ 和 $v \in \tilde{D}^{1,2}(B_R)$, 由(18), (28)和(31)可得出

$$\left\| v \bar{x}^{-\eta} \right\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\eta}}}^2 \leq C(\varepsilon, \eta) \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} v \right\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon, \eta) (1 + \|\mathbf{e}^\varphi\|_{L^\infty}) \|\nabla v\|_{L^2}^2, \quad (32)$$

其中 $\tilde{\eta} = \min \{1, \eta\}$ 。于是参考[13]的(3.15)式可以推导出

$$\left\| \mathbf{e}^{\varphi \eta} \mathbf{u} \right\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\tilde{\eta}}}} + \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\eta} \right\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\tilde{\eta}}}} \leq C\psi^\alpha \left(\left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u} \right\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \right) \leq C\psi^\alpha, \quad (33)$$

$$\left\| \mathbf{e}^{\varphi \eta} \theta \right\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\tilde{\eta}}}} + \left\| \theta \bar{x}^{-\eta} \right\|_{L^{\frac{2+\varepsilon}{\tilde{\eta}}}} \leq C\psi^\alpha \left(\left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta \right\|_{L^2} + \|\nabla \theta\|_{L^2} \right) \leq C\psi^\alpha. \quad (34)$$

结合(14), (15)和(33)式以及 Young 不等式有

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^\infty} & \leq C \left(\left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^2} + \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \left\| \nabla \left(\mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right) \right\|_{L^3}^{\frac{3}{4}} \right) \\ & \leq C\psi^\alpha \left(\left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u} \right\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{1}{3}} \right) \leq C\psi^\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

类似地操作可以得到

$$\left\| \theta \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^\infty} \leq C\psi^\alpha. \quad (36)$$

在以上和下文的证明中, 出现的 C 表示一个仅依赖于 $\mu, \nu, q, a, \eta_0, N_0$ 和 E_0 的通用正常数, 但与 R 无关。此外, 下文出现的 $\alpha > 1$ 是一个通用常数, 其具体取值在不同行中可能有所变化。

引理 3.1 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 是问题(3), (11)和(12)的光滑解, 则存在 $T_1 = T_1(N_0, E_0) > 0$ 和常数 $\alpha > 1$ 使得对任意 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\| \sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}_s \right\|_{L^2}^2 ds \right) \leq C + C \int_0^t \psi^\alpha(s) ds. \quad (37)$$

证明: 1、对方程(3)的 1 式两边乘以 $e^\varphi \mathbf{u}_t$ 并使用分布积分可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right] dx + \int e^\varphi |\mathbf{u}_t|^2 dx \\ &= - \int e^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t dx + \beta \int e^\varphi \theta \operatorname{div} \mathbf{u}_t dx + \delta \int e^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u}_t dx \triangleq \sum_{i=1}^3 R_i. \end{aligned} \quad (38)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Holder 不等式结合(14)和(33)可得

$$R_1 \leq \frac{1}{2} \int e^\varphi |\mathbf{u}_t|^2 dx + C \left\| \sqrt{e^\varphi} \mathbf{u} \right\|_{L^6}^2 \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{H^1}^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{2} \int e^\varphi |\mathbf{u}_t|^2 dx + C\psi^\alpha. \quad (39)$$

根据(3), (25), (28), (33)和(34)并分布积分有

$$R_2 \leq \frac{d}{dt} \int \beta e^\varphi \theta \operatorname{div} \mathbf{u} dx - \beta \int (e^\varphi \theta)_t \operatorname{div} \mathbf{u} dx \leq \frac{d}{dt} \int \beta e^\varphi \theta \operatorname{div} \mathbf{u} dx + C\psi^\alpha, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} R_3 &\leq \frac{d}{dt} \int \delta e^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dx + C \left\| \nabla e^\varphi \bar{x}^a \right\|_{L^2} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-a} \right\|_{L^\infty} \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^2} + C \left\| e^\varphi \right\|_{L^\infty} \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{d}{dt} \int \delta e^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dx + C\psi^\alpha. \end{aligned} \quad (41)$$

将 R_1, R_2, R_3 代入(38)得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \nu \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \right) + \left\| \sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2}^2 \leq B'(t) + C\psi^\alpha. \quad (42)$$

其中 $B(t) = \int \beta e^\varphi \theta \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \int \delta e^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dx$ 满足

$$B(t) \leq \frac{\mu + \nu}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|e^\varphi \theta\|_{L^2}^2 + C \|e^\varphi\|_{L^2}^2. \quad (43)$$

接下来由(15)和(35), (44)和(37)分别可推出

$$\left\| e^\varphi \bar{x}^a \right\|_{L^\infty} \leq C \left\| e^\varphi \bar{x}^a \right\|_{L^2} + C \left\| e^\varphi \bar{x}^a \right\|_{L^2}^{\frac{q-2}{2q-2}} \left\| \nabla (e^\varphi \bar{x}^a) \right\|_{L^q}^{\frac{q}{2q-2}} \leq C\psi^\alpha. \quad (44)$$

$$\left\| \sqrt{e^\varphi} \mathbf{u} \right\|_{L^\infty} \leq \left\| e^\varphi \bar{x}^a \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^\infty} \leq C\psi^\alpha. \quad (45)$$

$$\left\| \sqrt{e^\varphi} \theta \right\|_{L^\infty} \leq C\psi^\alpha. \quad (46)$$

2、对方程(3)的 2 式两边同时乘以 $e^{2\varphi} \theta$ 并分布积分, 运用 Holder 不等式结合(46)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}^\vartheta \theta\|_{L^2}^2 &\leq C \int \mathbf{e}^\vartheta \theta |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + C \int \mathbf{e}^\vartheta \theta |\Delta \theta| dx \\ &\quad + C \int \mathbf{e}^{2\vartheta} \theta^2 |\operatorname{div} \mathbf{u}| dx + C \int \mathbf{e}^{2\vartheta} \theta |\operatorname{div} \mathbf{u}| dx \\ &\leq C \psi^\alpha, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|\mathbf{e}^\vartheta \theta\|_{L^2}^2 \leq C + C \int_0^t \psi^\alpha ds. \quad (48)$$

同理可以得到

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|\mathbf{e}^\vartheta\|_{L^2}^2 \leq C + C \int_0^t \psi^\alpha ds. \quad (49)$$

最后将(48) (49)代入(43), 所得结果结合对(42)求时间积分后可得到(37)得证。

引理 3.2. 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1, 则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left(\|\sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_s\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_s\|_{L^2}^2 ds \right) \leq C + C \int_0^t \psi^\alpha(s) ds. \quad (50)$$

证明: 对方程(3)的 1 式两边乘以 $\mathbf{e}^\vartheta$ 得

$$\mathbf{e}^\vartheta \mathbf{u}_t + \mathbf{e}^\vartheta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} + \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta \nabla \mathbf{e}^\vartheta \theta - \delta \nabla \mathbf{e}^\vartheta. \quad (51)$$

对(51)求时间导数再两边乘以 $\mathbf{u}_t$ 所得结果在 B_R 上积分可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{e}^\vartheta |\mathbf{u}_t|^2 dx + \mu \int |\nabla \mathbf{u}_t|^2 dx + \nu \int (\operatorname{div} \mathbf{u}_t)^2 dx \\ &\leq C \int (\mathbf{e}^\vartheta)_t |\mathbf{u}_t|^2 dx + C \int \mathbf{u}_t \mathbf{u}^2 \nabla \mathbf{e}^\vartheta \nabla \mathbf{u} dx + C \int \mathbf{e}^\vartheta \mathbf{u} \mathbf{u}_t |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \\ &\quad + C \int \mathbf{e}^\vartheta |\mathbf{u}_t|^2 \nabla \mathbf{u} dx + C \int \nabla (\mathbf{e}^\vartheta \theta + \mathbf{e}^\vartheta)_t \mathbf{u}_t dx \\ &= \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (52)$$

根据(14), (32), (33)和(45)结合 Cauchy-Schwarz 不等式, Young 不等式, Holder 不等式得

$$I_1 = C \int \mathbf{e}^\vartheta \mathbf{u} \mathbf{u}_t \nabla \mathbf{u}_t dx \leq C \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u} \right\|_{L^\infty} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \leq \frac{\mu + \nu}{8} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C \psi^\alpha, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &\leq C \left(\left\| \nabla \mathbf{e}^\vartheta \bar{x}^a \right\|_{L^q} \left\| \mathbf{u}_t \bar{x}^{-\frac{a}{3}} \right\|_{L^{\frac{4q}{q-2}}} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{3}} \right\|_{L^{\frac{8q}{q-2}}}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u} \right\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 \right) \\ &\leq \frac{\mu + \nu}{8} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C \psi^\alpha \end{aligned} \quad (54)$$

$$I_4 \leq C \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left(\left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2} + (1 + \|\mathbf{e}^\vartheta\|_{L^\infty}) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \right)^{\frac{3}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \frac{\mu + \nu}{8} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C \psi^\alpha, \quad (55)$$

$$I_5 \leq -C \int (\mathbf{e}^\vartheta (\theta + 1))_t \operatorname{div} \mathbf{u}_t dx \leq \frac{\mu + \nu}{8} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C \psi^\alpha. \quad (56)$$

将 I_1 - I_5 代入(52)得到

$$\frac{d}{dt} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\vartheta} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \leq C \psi^\alpha. \quad (57)$$

结合(3)和(8)有

$$\begin{aligned} \int e^\varphi |\mathbf{u}_t|^2(x, 0) dx &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \int e^{-\varphi} \left| \mu \Delta \mathbf{u} + \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \nabla e^\varphi (\beta \theta + \delta) - e^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right|^2 dx \\ &\leq \|g_1\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}(0) \right\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \mathbf{u}(0)\|_{L^2}^2 \leq C. \end{aligned} \quad (58)$$

最后对(57)在时间上积分结合(58)得到(50)，得证。

引理 3.3 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1，则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}} \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (59)$$

证明：1、对(3)的 3 式两边同时乘以 $e^\varphi \bar{x}^a$ 得

$$\partial_t (e^\varphi \bar{x}^a) + \mathbf{u} \cdot \nabla (e^\varphi \bar{x}^a) - a e^\varphi \bar{x}^a \mathbf{u} \cdot \nabla \ln \bar{x} + e^\varphi \bar{x}^a \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (60)$$

对上式分布积分并结合(33)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int e^\varphi \bar{x}^a dx &\leq C \int e^\varphi |\mathbf{u}| \bar{x}^{a-1} \ln^{1+\eta_0} (e + |x|^2) dx \\ &\leq C \left\| e^\varphi \bar{x}^{a-1+\frac{6}{6+a}} \right\|_{L^{\frac{6+a}{5+a}}} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{3}{6+a}} \right\|_{L^{6+a}} \leq C \left(1 + \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^1} \right) \psi^\alpha. \end{aligned}$$

上式结合 Gronwall 不等式得到

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^1} \leq C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\}. \quad (61)$$

2、对(60)两边同时作用 ∇ ，再同时乘以 $|\nabla (e^\varphi \bar{x}^a)|^{r-2} \nabla (e^\varphi \bar{x}^a)$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla (e^\varphi \bar{x}^a)\|_{L^r} &\leq C \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} + \|\mathbf{u} \cdot \nabla (\ln \bar{x})\|_{L^\infty} \right) \|\nabla (e^\varphi \bar{x}^a)\|_{L^r} \\ &\quad + C \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^\infty} \left(\|\nabla \mathbf{u} \nabla (\ln \bar{x})\|_{L^r} + \|\mathbf{u} \cdot \nabla^2 (\ln \bar{x})\|_{L^r} + \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^r} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

利用(15)推出

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{q-2}{2(q-1)}} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^{\frac{q}{2(q-1)}} \leq C \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^2 + C \psi^\alpha. \quad (63)$$

根据(35)，对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\|\nabla \mathbf{u} \nabla (\ln \bar{x})\|_{L^r} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^r} \|\bar{x}^{1-\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{2}{r}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{r-2}{r}} \leq C \psi^\alpha. \quad (64)$$

$$\|\mathbf{u} \cdot \nabla^2 (\ln \bar{x})\|_{L^r} \leq C \psi^\alpha. \quad (65)$$

将以上估计代入(62)结合(44)可得

$$\frac{d}{dt} \|\nabla e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^2 \cap L^q} \leq C \left(\psi^\alpha + \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^2 \right) \left(1 + \|\nabla e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^2} + \|\nabla e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^q} \right). \quad (66)$$

根据引理 2.5 从(3)推断出

$$\|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^r} \leq C \left(\|e^\varphi \mathbf{u}_t\|_{L^r} + \|e^\varphi \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|_{L^r} + \|\nabla e^\varphi \theta\|_{L^r} + \|\nabla e^\varphi\|_{L^r} \right). \quad (67)$$

当 $r = 2$ 时，由(33)，(34)可推出

$$\|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2} \leq C \left(\|e^\varphi \mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|e^\varphi \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla e^\varphi \theta\|_{L^2} + \|\nabla e^\varphi\|_{L^2} \right) \leq C \psi^\alpha + \frac{1}{2} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2}. \quad (68)$$

当 $r = q$ 时利用(14), (32), (33)得

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q} &\leq C\psi^\alpha \left(\|\sqrt{\mathbf{e}^\theta} \mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \right) + C\psi^\alpha \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{q}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{q-1}{q}} + C\psi^\alpha + C\psi^\alpha \|\nabla \theta\|_{L^2}^{\frac{2}{q}} \|\nabla \theta\|_{H^1}^{\frac{q-2}{q}} + C \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^q} \\ &\leq C\psi^\alpha \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} + C\psi^\alpha. \end{aligned} \quad (69)$$

上式结合(68), 利用 Gronwall 不等式得

$$\|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2} \leq C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\}, \quad (70)$$

$$\int_0^t \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^2 ds \leq C \int_0^t \psi^\alpha \left(\|\nabla \mathbf{u}_s\|_{L^2}^2 \right) ds + C \int_0^t \psi^\alpha ds \leq C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\}. \quad (71)$$

对(66)运用 Gronwall 不等式结合(70)和(71)可得

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \nabla \left(\mathbf{e}^\theta \bar{x}^a \right) \right\|_{L^2 \cap L^q} \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (72)$$

类似地, 对(60)两边同时乘以 $(\mathbf{e}^\theta \bar{x}^a)^{r-1}$ 并在 B_r 上积分可得

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \mathbf{e}^\theta \bar{x}^a \right\|_{L^2 \cap L^q} \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (73)$$

最后, (61), (72)和(73)推导出(59), 得证。

引理 3.4 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1, 则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \mathbf{e}^\theta \right\|_{H^1 \cap W^{1,q}} \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (74)$$

证明: 对 $\partial_t (\mathbf{e}^\theta) + \nabla \cdot (\mathbf{e}^\theta \mathbf{u}) = 0$ 两边同时作用 ∇ , 再同时乘以 $|\nabla \mathbf{e}^\theta|^{r-2} \nabla \mathbf{e}^\theta$ 得到

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^r} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^r} + C \|\mathbf{e}^\theta\|_{L^\infty} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^r} \leq C \left(\psi^\alpha + \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^r} \right) \left(1 + \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^r} \right). \quad (75)$$

利用 Sobolev 嵌入得到

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^2 \cap L^q} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^2 \cap L^q} + C \|\mathbf{e}^\theta\|_{L^\infty} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2 \cap L^q} \leq C \left(\psi^\alpha + \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2 \cap L^q} \right) \left(1 + \|\nabla \mathbf{e}^\theta\|_{L^2 \cap L^q} \right). \quad (76)$$

上式结合(70)和(71), 运用 Gronwall 不等式得到(74), 得证。

引理 3.5 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1, 则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\theta} \theta \right\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) ds \leq C + C \int_0^t \psi^\alpha ds. \quad (77)$$

证明: 取(22)中的 $b_1 \leq \frac{a}{2}$, 则当 $0 < b < \min \{b_1, 1\}$ 时, $\bar{x}^b \leq C(1 + |x|^{b_1}) < C\bar{x}^{\frac{a}{2}}$ 。再由(3)和(22)可得

$$\int \mathbf{e}^\theta Q(\mathbf{u}) \bar{x}^b dx \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \int \left(\mathbf{e}^\theta \theta_t + \mathbf{e}^\theta \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) + \mathbf{e}^\theta (\theta + 1) \operatorname{div} \mathbf{u} \left| x \right|^{b_1} dx \leq C\psi^\alpha. \quad (78)$$

对(3)中 2 式两边同时乘以 $\mathbf{e}^\theta \theta$ 并分部积分得

$$\frac{c_v}{2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{e}^\theta \theta^2 dx + k \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \leq \beta \int \mathbf{e}^\theta \theta^2 \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \delta \int \mathbf{e}^\theta \theta \operatorname{div} \mathbf{u} dx + c_v \int \mathbf{e}^\theta Q(\mathbf{u}) \theta dx. \quad (79)$$

利用(2), (34)和(78)可推出以下估计

$$\begin{aligned} \int e^\varphi \theta^2 \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \int e^\varphi \theta \operatorname{div} \mathbf{u} dx &\leq \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^4} \left\| \theta \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^8}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\sqrt{e^\varphi}\|_{L^\infty} \|\sqrt{e^\varphi} \theta\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \leq C\psi^\alpha, \\ \int e^\varphi Q(\mathbf{u}) \theta dx &\leq \left\| \theta \bar{x}^{-\frac{b}{2}} \right\|_{L^6} \left\| \sqrt{e^\varphi Q(\mathbf{u})} \bar{x}^{\frac{b}{2}} \right\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} \leq C\psi^\alpha \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{1}{3}} \leq C\psi^\alpha. \end{aligned}$$

以上两式代入到(79)中并对时间求积分得(77)，得证。

引理 3.6 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1，则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left(\|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{e^\varphi} \theta_s\|_{L^2}^2 \right) + \int_0^t \left(\|\sqrt{e^\varphi} \theta_s\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_s\|_{L^2}^2 \right) ds \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (80)$$

证明：1、在(3)的 2 式两边乘以 $e^\varphi \theta_t$ 得

$$\frac{k}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + c_v \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^2 = -c_v \int e^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \theta_t dx - \beta \int e^\varphi \theta \theta_t \operatorname{div} \mathbf{u} dx - \delta \int e^\varphi \theta_t \operatorname{div} \mathbf{u} dx + c_v \int e^\varphi Q(\mathbf{u}) \theta_t dx. \quad (81)$$

上式中各项可利用 Holder 不等式，(32)，(34)和(78)推导出

$$-c_v \int e^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \theta_t dx \leq C \|e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^q} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^{\frac{4q}{q-2}}} \left\| \theta_t \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^{\frac{4q}{q-2}}} \|\nabla \theta\|_{L^2} \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{8} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 \quad (82)$$

$$-\int e^\varphi (\beta \theta + \delta) \theta_t \operatorname{div} \mathbf{u} dx \leq C \left(\|\sqrt{e^\varphi} \theta\|_{L^\infty} + \|\sqrt{e^\varphi}\|_{L^\infty} \right) \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \leq C\psi^\alpha, \quad (83)$$

$$c_v \int e^\varphi Q(\mathbf{u}) \theta_t dx \leq C \left\| \sqrt{e^\varphi Q(\mathbf{u})} \bar{x}^{\frac{b}{2}} \right\|_{L^2} \left\| \theta_t \bar{x}^{-\frac{b}{2}} \right\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{8} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2. \quad (84)$$

将以上三式代入(81)得

$$\frac{k}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + c_v \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^2 \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{4} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2. \quad (85)$$

2、在(3)的 2 式两边乘以 e^φ 并求时间导数，之后再同时乘以 θ_t 得到

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{2} \frac{d}{dt} \int e^\varphi |\theta_t|^2 dx + k \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 &= -c_v \int (e^\varphi)_t |\theta_t|^2 dx - c_v \int (e^\varphi \mathbf{u})_t \nabla \theta \theta_t dx - \beta \int (e^\varphi \theta)_t \operatorname{div} \mathbf{u} \theta_t dx \\ &\quad - \delta \int (e^\varphi)_t \operatorname{div} \mathbf{u} \theta_t dx - \int e^\varphi (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_t \theta_t dx + c_v \int (e^\varphi Q(\mathbf{u}))_t \theta_t dx \\ &= \sum_{i=1}^6 J_i. \end{aligned} \quad (86)$$

由(3)和(45)，结合 Young 不等式可得

$$J_1 = -2c_v \int e^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_t \theta_t dx \leq C \|\sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2} \|\nabla \theta_t\|_{L^2} \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{10} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2. \quad (87)$$

利用(32)和(33)，结合 Holder 不等式可得以下估计

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \|\sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla \theta\|_{L^4} \|\sqrt{e^\varphi} \theta_t\|_{L^2} + C \|\nabla e^\varphi \bar{x}^a\|_{L^q} \left\| \mathbf{u} \bar{x}^{-\frac{a}{3}} \right\|_{L^{\frac{8q}{q-2}}} \left\| \theta_t \bar{x}^{-\frac{a}{3}} \right\|_{L^{\frac{4q}{q-2}}} \|\nabla \theta\|_{L^2} \\ &\quad + C \|e^\varphi\|_{L^\infty}^{\frac{1}{4}} \|\sqrt{e^\varphi} \bar{x}^a\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{e^\varphi} \mathbf{u}_t\|_{L^2} \left\| \theta_t \bar{x}^{-\frac{a}{2}} \right\|_{L^4} \|\nabla \theta\|_{L^4} \\ &\leq C\psi^\alpha + \frac{k}{10} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (88)$$

$$J_3 = \beta \int (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{e}^\varphi + \mathbf{e}^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u}) \theta \theta_t \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx - \beta \int \mathbf{e}^\varphi |\theta_t|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{10} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2, \quad (89)$$

$$J_4 \leq \delta \int (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{e}^\varphi + \mathbf{e}^\varphi \operatorname{div} \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{u} \theta_t \, dx \leq C\psi^\alpha + \frac{k}{10} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2. \quad (90)$$

利用 Cauchy 不等式和(46)可以得到

$$J_5 = -\int \mathbf{e}^\varphi (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_t \theta_t \, dx \leq C \left(\|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi}\|_{L^\infty} + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta\|_{L^\infty} \right) \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \leq C\psi^\alpha + \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2. \quad (91)$$

下面估计 J_6 , 利用 $c_v (\mathbf{e}^\varphi Q(\mathbf{u}))_t \leq C \sqrt{\mathbf{e}^\varphi Q(\mathbf{u})} |\nabla \mathbf{u}_t|$ 结合(59)和(78)推出

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi Q(\mathbf{u})} \bar{x}^{\frac{b}{2}} \right\|_{L^2}^2 &\leq C \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \bar{x}^{\frac{a}{2}} \right\|_{L^2 \cap L^\infty} \left(\|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2} + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^2} + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \right) \\ &\quad + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \right\} \right\} \left(1 + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2} + \|\nabla \theta\|_{L^2} \right), \end{aligned} \quad (92)$$

上式结合(32), 利用 Holder 不等式, Young 不等式可以得到

$$\begin{aligned} J_6 &\leq C \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi Q(\mathbf{u})} \bar{x}^{\frac{b}{2}} \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi Q(\mathbf{u})} \right\|_{L^8}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \left\| \theta_t \bar{x}^{-\frac{b}{4}} \right\|_{L^{\frac{16}{3}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \right\} \right\} \left(1 + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C\psi^\alpha + \frac{k}{10} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (93)$$

将 J_1 到 J_6 的估计代入(86), 并结合上一步的结果(85)得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(c_v \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^2 + k \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) &+ k \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + c_v \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \right\} \right\} \left(1 + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C\psi^\alpha. \end{aligned} \quad (94)$$

此外, 由(2), (8)和(45)可得

$$\begin{aligned} \int \mathbf{e}^\varphi \theta_t^2(x, 0) \, dx &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \int \mathbf{e}^{-\varphi} c_v^{-1} \left[k \Delta \theta + \frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T|^2 + \nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 - \mathbf{e}^\varphi (\beta \theta + \delta) \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{e}^\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right] \, dx \\ &\leq C \|g_2\|_{L^2}^2 + C \left\| \sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \mathbf{u}(x, 0) \right\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \theta(x, 0)\|_{L^2}^2 \leq C, \end{aligned} \quad (95)$$

结合(94)和(95), 运用 Gronwall 不等式和 Young 不等式可得, 对 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq s \leq t} \left(\|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_s\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) + \int_0^t \left(1 + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_s\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_s\|_{L^2}^2 \right) \, ds \\ &\leq C + C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \right\} \right\} \int_0^t \left(1 + \|\sqrt{\mathbf{e}^\varphi} \theta_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \, ds + C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \\ &\leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha \, ds \right\} \right\} \text{得证}. \end{aligned} \quad (96)$$

引理 3.7 设 $(\varphi, \mathbf{u}, \theta)$ 和 T_1 同引理 3.1, 则存在常数 $\alpha > 1$ 使得对任意的 $t \in (0, T_1]$ 有

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla^2 \theta\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla^2 \theta\|_{L^q}^2 ds \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}. \quad (97)$$

证明: 结合(3)的 2 式, 引理 2.5, (14)和(33)有

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \theta\|_{L^2} &\leq C \left(\|\mathbf{e}^\theta \theta_t\|_{L^2} + \|\mathbf{e}^\theta \mathbf{u} \cdot \nabla \theta\|_{L^2} + \|\mathbf{e}^\theta \theta \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{e}^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla^2 \theta\|_{L^2} + C \psi^\alpha, \end{aligned} \quad (98)$$

上式推出

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla^2 \theta\|_{L^2}^2 \leq C \psi^\alpha. \quad (99)$$

类似地, 利用引理 2.5, (3)的 2 式, (14)和(33)推出

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \theta\|_{L^q} &\leq C \left(\|\mathbf{e}^\theta \theta_t\|_{L^q} + \|\mathbf{e}^\theta \mathbf{u} \nabla \theta\|_{L^q} + \|\mathbf{e}^\theta \theta \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^q} + \|\mathbf{e}^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2q}}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|\mathbf{e}^\theta\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{\mathbf{e}^\theta} \theta_t\|_{L^q} + \|\mathbf{e}^\theta \mathbf{u}\|_{L^{2q}} \|\nabla \theta\|_{L^{2q}} + \|\mathbf{e}^\theta \theta\|_{L^{2q}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2q}} + \|\mathbf{e}^\theta\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{2}{q}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{2q-2}{q}} \right) \\ &\leq C \psi^\alpha \|\nabla \theta_t\|_{L^2} + C \psi^\alpha, \end{aligned} \quad (100)$$

上式结合引理 3.6 可以得到

$$\int_0^t \|\nabla^2 \theta\|_{L^q}^2 ds \leq C \int_0^t \left(\psi^\alpha + \|\nabla \theta_s\|_{L^2}^2 \right) ds \leq C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\}. \quad (101)$$

最后, (99)和(101) 结合便可推出(97), 得证。

证明命题 3.1 现在根据引理 3.1 至 3.7 可以推出命题 3.1。结合(28), (37), (50), (59), (74), (77), (80)和(97)可以控制 $\psi(t)$ 的各项进而得到

$$\psi(t) \leq C \exp \left\{ C \exp \left\{ C \int_0^t \psi^\alpha ds \right\} \right\}.$$

令 $M = C e^{C e}$ 以及 $T_0 = \min \left\{ T_1, (CM^\alpha)^{-1} \right\}$ 则有

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \psi(t) \leq M. \quad (102)$$

上式结合(50), (71), (80)和(97)推出(26), 命题 3.1 得证。

4. 证明定理 1.1

证明: $(\varphi_0, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ 同为定理 1.1 所设, 不妨设初始密度 φ_0 满足 $\int_{\mathbf{R}^2} e^{\varphi_0} dx = 1$, 则存在 $N_0 > 0$ 使得

$$\int_{B_{N_0}} e^{\varphi_0} dx \geq \frac{3}{4} \int_{\mathbf{R}^2} e^{\varphi_0} dx = \frac{3}{4}. \quad (103)$$

1、设 $e^{\varphi_0^R} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, 构造 $e^{\varphi_0^R} = e^{\hat{\varphi}_0^R} + R^{-1} e^{-|\mathbf{x}|^2}$ 使得 $\int_{B_{N_0}} e^{\hat{\varphi}_0^R} dx \geq \frac{1}{2}$,

且当 $R \rightarrow \infty$ 时 $\bar{x}^\alpha e^{\hat{\varphi}_0^R}$ 在 $L^1(\mathbf{R}^2) \cap H^1(\mathbf{R}^2) \cap W^{1,q}(\mathbf{R}^2)$ 上趋于 $\bar{x}^\alpha e^{\varphi_0}$ 。

考虑以下 $\mathbf{u}_0^R$ 的椭圆系统

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_0^R - \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_0^R + \nabla e^{\varphi_0} + \nabla (e^{\varphi_0} \theta_0^R) + e^{\varphi_0} \mathbf{u}_0^R = \sqrt{e^{\varphi_0}} h_1^R & \text{在 } B_R \text{ 内,} \\ \mathbf{u}_0^R|_{\partial B_R} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (104)$$

其中 $h_1^R = (\sqrt{e^{\varphi_0}} \mathbf{u}_0 + \mathbf{g}_1)^* j_{1/R}$, 这里 j_δ 是宽度为 δ 的标准磨光子。将 $\mathbf{u}_0^R$ 在 B_R 外延拓为零, 从而定义其在 $\mathbf{R}^2$ 上的延拓并记为 $\tilde{\mathbf{u}}_0^R$ 。则 $\tilde{\mathbf{u}}_0^R$ 也是(104)的解。通过和[13]类似的步骤可以推出

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\left\| \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_0^R - \mathbf{u}_0) \right\|_{H^1(\mathbf{R}^2)} + \left\| \sqrt{e^{\varphi_0^R}} \tilde{\mathbf{u}}_0^R - \sqrt{e^{\varphi_0}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \right) = 0. \quad (105)$$

接下来考虑 θ_0^R 的椭圆方程

$$\begin{cases} -k\Delta\theta_0^R + e^{\varphi_0^R}\theta_0^R = \frac{\mu}{2} \left| \mathbf{u}_0^R + (\nabla \mathbf{u}_0^R)^{tr} \right|^2 + \nu(\operatorname{div} \mathbf{u}_0)^2 + \sqrt{e^{\varphi_0}} h_2^R & \text{在 } B_R \text{ 内,} \\ \theta_0^R|_{\partial B_R} = 0, \end{cases} \quad (106)$$

其中 $h_2^R = (\sqrt{e^{\varphi_0}} \theta_0 + \mathbf{g}_2)^* j_{1/R}$, 这里 j_δ 是宽度为 δ 的标准磨光子。将 θ_0^R 在 B_R 外延拓为零, 从而定义其在 $\mathbf{R}^2$ 上的延拓并记为 $\tilde{\theta}_0^R$ 。参考[11]的证明, 可以得到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\left\| \nabla \tilde{\theta}_0^R - \nabla \theta_0 \right\|_{H^1(\mathbf{R}^2)} + \left\| \sqrt{e^{\varphi_0^R}} \tilde{\theta}_0^R - \sqrt{e^{\varphi_0}} \theta_0 \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \right) = 0. \quad (107)$$

至此, 我们已构造出原始初始数据 $(\varphi_0, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ 的逼近序列 $(\varphi_0^R, \mathbf{u}_0^R, \theta_0^R)$ 。相应地, 以该逼近序列为初值、满足条件(12)的方程(3)的解 $(\varphi^R, \mathbf{u}^R, \theta^R)$ 满足第3节中所建立的所有先验估计。

2、接下来设定 $L^p = L^p(\mathbf{R}^2)$, $W^{k,p} = W^{k,p}(\mathbf{R}^2)$, $H^k = W^{k,2}$ 。将 $(\varphi^R, \mathbf{u}^R, \theta^R)$ 延拓至 $\mathbf{R}^2$ 得到 $(\tilde{\varphi}^R, \tilde{\mathbf{u}}^R, \tilde{\theta}^R)$

根据(26)可以推出

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}^R \right\|_{L^2} + \left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\theta}^R \right\|_{L^2} \right) \leq \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \sqrt{e^{\varphi^R}} \mathbf{u}^R \right\|_{L^2(B_R)} + \left\| \sqrt{e^{\varphi^R}} \theta^R \right\|_{L^2(B_R)} \right) \leq C, \quad (108)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \nabla \tilde{\mathbf{u}}^R \right\|_{H^1} + \left\| \nabla \tilde{\theta}^R \right\|_{H^1} + \left\| e^{\tilde{\varphi}^R} \right\|_{L^2 \cap L^q} \right) \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \nabla \mathbf{u}^R \right\|_{H^1(B_R)} + \left\| \nabla \theta^R \right\|_{H^1(B_R)} + \left\| e^{\varphi^R} \right\|_{L^2(B_R) \cap L^q(B_R)} \right) \leq C, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| e^{\tilde{\varphi}^R} \bar{x}^a \right\|_{L^1 \cap L^\infty} \leq C. \quad (110)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}_t^R \right\|_{L^2} + \left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\theta}_t^R \right\|_{L^2} \right) + \int_0^{T_0} \left(\left\| \nabla \tilde{\mathbf{u}}_t^R \right\|_{L^2}^2 + \left\| \nabla \tilde{\theta}_t^R \right\|_{L^2}^2 \right) dt \\ & + \int_0^{T_0} \left(\left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}_t^R \right\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{e^{\tilde{\varphi}^R}} \tilde{\theta}_t^R \right\|_{L^2}^2 + \left\| \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^R \right\|_{L^q}^2 + \left\| \nabla^2 \tilde{\theta}^R \right\|_{L^q}^2 \right) dt \leq C. \end{aligned} \quad (111)$$

接下来, 结合(59), (74)和(26), 对于 $p \in [2, q]$, 有

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \nabla (e^{\tilde{\varphi}^R}) \bar{x}^a \right\|_{L^p} + \left\| \nabla (e^{\tilde{\varphi}^R}) \right\|_{L^p} \right) \\ & \leq C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \nabla (e^{\varphi^R} \bar{x}^a) \right\|_{L^p(B_R)} + R^{-1} \left\| e^{\varphi^R} \bar{x}^a \right\|_{L^p(B_R)} \right) + C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| \nabla (e^{\varphi^R}) \right\|_{L^p(B_R)} + R^{-1} \left\| e^{\varphi^R} \right\|_{L^p(B_R)} \right) \\ & \leq C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\left\| e^{\varphi^R} \bar{x}^a \right\|_{H^1(B_R) \cap W^{1,p}(B_R)} + \left\| e^{\varphi^R} \right\|_{H^1(B_R) \cap W^{1,p}(B_R)} \right) \leq C. \end{aligned} \quad (112)$$

同样地, 由(26)和(35)可推出

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \left\| \bar{x} \partial_t \left(e^{\tilde{\phi}^R} \right) \right\|_{L^p}^2 dt &\leq C \int_0^{T_0} \left\| \bar{x}^{1-a} \mathbf{u}^R \right\|_{L^\infty(B_R)}^2 \left\| \bar{x}^a \nabla e^{\phi^R} \right\|_{L^p(B_R)}^2 dt \\ &\quad + C \int_0^{T_0} \left\| \operatorname{div} \mathbf{u}^R \right\|_{L^\infty(B_R)}^2 \left\| \bar{x}^a e^{\phi^R} \right\|_{L^p(B_R)}^2 dt \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (113)$$

综上所述, 由(108)~(113)可知, 序列 $(\tilde{\phi}^R, \tilde{\mathbf{u}}^R, \tilde{\theta}^R)$ 在适当的弱拓扑意义下存在子列收敛于 $(\phi, \mathbf{u}, \theta)$ 使得 $e^\phi \bar{x}^a \in L^\infty(0, T_0; L^1)$, $\inf_{0 \leq t \leq T_0} \int_{B_{2N_0}} e^{\phi(x,t)} dx \geq \frac{1}{4}$, 且当 $R \rightarrow \infty$ 时以下收敛关系成立

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\phi}^R} \bar{x}^a &\rightarrow e^\phi \bar{x}^a, e^{\tilde{\phi}^R} \rightarrow e^\phi && \text{在 } C(\overline{B_N} \times [0, T_0]) \text{ 对任意 } N > 0 \text{ 成立,} \\ e^{\tilde{\phi}^R} \bar{x}^a &\rightharpoonup e^\phi \bar{x}^a, e^{\tilde{\phi}^R} \rightharpoonup e^\phi && \text{在 } L^\infty(0, T_0; L^1 \cap H^1 \cap W^{1,q}) \text{ 上弱*收敛,} \\ \nabla \tilde{\mathbf{u}}^R &\rightharpoonup \nabla \mathbf{u}, \nabla \tilde{\theta}^R \rightharpoonup \nabla \theta && \text{在 } L^\infty(0, T_0; H^1) \text{ 上弱*收敛,} \\ \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}^R &\rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \mathbf{u}, \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\theta}^R \rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \theta && \text{在 } L^\infty(0, T_0; L^2) \text{ 上弱*收敛,} \\ \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^R &\rightharpoonup \nabla^2 \mathbf{u}, \nabla^2 \tilde{\theta}^R \rightharpoonup \nabla^2 \theta && \text{在 } L^2(0, T_0; L^q) \text{ 上弱收敛,} \\ \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}_t^R &\rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \mathbf{u}_t, \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\theta}_t^R \rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \theta_t && \text{在 } L^\infty(0, T_0; L^2) \text{ 上弱*收敛,} \\ \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\mathbf{u}}_t^R &\rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \mathbf{u}_t, \sqrt{e^{\tilde{\phi}^R}} \tilde{\theta}_t^R \rightharpoonup \sqrt{e^\phi} \theta_t && \text{在 } L^2(0, T_0; L^2) \text{ 上弱收敛.} \end{aligned} \quad (114)$$

取任意测试函数 $\xi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \times (0, T_0])$ 作为方程(3)在初值 $(\phi_0^R, \mathbf{u}_0^R, \theta_0^R)$ 和(12)条件下的测试函数可以得出: 当 $R \rightarrow \infty$ 时, $(\phi, \mathbf{u}, \theta)$ 满足(3)-(5), 并满足(9)和(10). 定理 1.1 得证.

5. 进一步讨论

在后续研究中为了刻画解的奇异性, 可建立如下形式的爆破准则: 若解在有限时间 T 内爆破, 则有

$$\int_0^T (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} + \|\nabla \theta\|_{L^\infty}) dt = +\infty$$

这表明解的爆破必然伴随速度或温度梯度的剧烈聚集. 其证明可基于本文的加权能量估计框架, 通过对耦合项进行更精细的能量估计完成. 进一步地, 若初始数据足够小的同时控制密度的衰减速率, 且能证明此时非线性项的增长可被耗散项长期控制, 则可通过反证法获得整体强解. 这一结果将体现系统在近平衡态下的稳定性, 并为模型在物理应用中的有效性提供理论支持.

6. 结论与展望

本文建立了含水平热梯度与热传导的二维可压缩流体模型柯西问题局部强解的存在性理论. 可以得出, 尽管热传导项的引入增强了动量方程与能量方程间的耦合性, 但通过加权能量方法与对温度方程的精细估计, 系统仍具备良好的局部适定性. 与 Liu [13] 忽略热传导的简化模型相比, 本文将热传导纳入该水平热梯度驱动模型, 使模型更符合实际物理过程中能量耗散与传递的规律, 并克服了由此带来的分析难题. 未来可进一步研究整体解的存在性与爆破机制、将模型推广至三维讨论以及进行数值模拟探究该模型在实际气象预测与工程上的应用.

参考文献

- [1] Yang, J. and Liu, R. (2022) A New Fluid Dynamical Model Coupling Horizontal Heat with an Application to Interior

- Separations. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **102**, e202000145.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000145>
- [2] Yang, J. and Liu, R. (2018) The Existence Results for a New 2-D Compressible Fluid Model with the Horizontal Thermal Gradient Effect. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **98**, 1302-1319.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201700176>
 - [3] Serrin, J. (1959) On the Uniqueness of Compressible Fluid Motions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **3**, 271-288. <https://doi.org/10.1007/bf00284180>
 - [4] Nash, J. (1962) Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **79**, 487-497. <https://doi.org/10.24033/bsmf.1586>
 - [5] Itaya, N. (1971) On the Cauchy Problem for the System of Fundamental Equations Describing the Movement of Compressible Viscous Fluid. *Kodai Mathematical Journal*, **23**, 60-120. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138846265>
 - [6] Chen, G. and Kratka, M. (2002) Global Solutions to the Navier-Stokes Equations for Compressible Heat-Conducting Flow with Symmetry and Free Boundary. *Communications in Partial Differential Equations*, **27**, 907-943.
 - [7] Cho, Y., Choe, H.J. and Kim, H. (2004) Unique Solvability of the Initial Boundary Value Problems for Compressible Viscous Fluids. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **83**, 243-275.
<https://doi.org/10.1016/j.matpur.2003.11.004>
 - [8] Cho, Y. and Kim, H. (2006) On Classical Solutions of the Compressible Navier-Stokes Equations with Nonnegative Initial Densities. *Manuscripta Mathematica*, **120**, 91-129. <https://doi.org/10.1007/s00229-006-0637-y>
 - [9] Cho, Y. and Kim, H. (2006) Existence Results for Viscous Polytopic Fluids with Vacuum. *Journal of Differential Equations*, **228**, 377-411. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.05.001>
 - [10] Li, J. and Liang, Z. (2014) On Local Classical Solutions to the Cauchy Problem of the Two-Dimensional Barotropic Compressible Navier-Stokes Equations with Vacuum. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **102**, 640-671.
<https://doi.org/10.1016/j.matpur.2014.02.001>
 - [11] Liang, Z. and Shuai, J. (2021) Existence of Strong Solution for the Cauchy Problem of Fully Compressible Navier-Stokes Equations in Two Dimensions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **26**, 5383-5405.
<https://doi.org/10.3934/dcdsb.2020348>
 - [12] Chen, H. and Zhong, X. (2022) Local Well-Posedness to the 2D Cauchy Problem of Nonhomogeneous Heat-Conducting Navier-Stokes and Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum at Infinity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **45**, 4698-4726. <https://doi.org/10.1002/mma.8065>
 - [13] Liu, R., Wu, C. and Yang, J. (2025) On the Cauchy Problem of 2D Compressible Fluid Model with the Horizontal Thermal Gradient Effect. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **541**, Article 128722.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128722>
 - [14] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'tseva, N.N. (1968) Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society.