

具有重置的扩散行为

涂泽宇

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年2月3日; 录用日期: 2026年2月26日; 发布日期: 2026年3月4日

摘要

连续时间随机游走模型是研究反常扩散的重要工具, 本文在此基础上引入了随机重置。传统的CTRW模型广泛用于描述反常扩散过程, 但其在非平衡稳态、弛豫过程及遍历性破缺等方面的描述能力有限。为此, 我们引入了一个具有状态依赖重置的CTRW框架, 其中扩散等待时间与重置等待时间分别服从不同参数的指数分布, 跳跃步长服从高斯分布。通过傅里叶-拉普拉斯变换方法, 我们推导了粒子位置的概率密度函数及其各阶矩的解析表达式。数值模拟结果表明, 系统在不同时间尺度上呈现出三个阶段的行为: 初始扩散主导的线性增长、中间由重置与扩散竞争主导的弛豫阶段, 以及最终达到由重置速率和噪声强度共同决定的非平衡定态。本文模型为理解随机重置在扩散系统中的调控作用提供了新的理论工具, 适用于最优搜索、生物分子运动、网络恢复等多领域建模。

关键词

连续时间随机游走, 随机重置, 指数分布, 傅里叶-拉普拉斯变换

Diffusion Behavior with Resetting

Zeyu Tu

School of Mathematical Science, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: February 3, 2026; accepted: February 26, 2026; published: March 4, 2026

Abstract

The continuous-time random walk (CTRW) model is an important tool for studying anomalous diffusion. This paper introduces stochastic resetting on this basis. Traditional CTRW models are widely used to describe anomalous diffusion processes, but their ability to describe non-equilibrium steady states, relaxation processes, and ergodicity breaking is limited. Therefore, we propose a CTRW framework with state-dependent resetting, where the diffusion waiting time and resetting waiting time follow exponential distributions with different parameters, and the jump length follows a Gaussian distribution. Using the Fourier-Laplace transform method, we derive analytical

expressions for the probability density function of particle positions and their moments at various orders. Numerical simulation results show that the system exhibits three behavioral stages at different time scales: initial linear growth dominated by diffusion, an intermediate relaxation stage governed by the competition between resetting and diffusion, and ultimately the attainment of a non-equilibrium steady state determined jointly by the resetting rate and noise intensity. This model provides a new theoretical tool for understanding the regulatory role of stochastic resetting in diffusion systems and is applicable to modeling in various fields such as optimal search, biomolecular motion, and network recovery.

Keywords

Continuous-Time Random Walk, Stochastic Resetting, Exponential Distribution, Fourier-Laplace Transform

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几年里，反常扩散现象越来越受到人们的关注，在物理学和相关科学的各个领域都观察到了这一现象，反常扩散的特征是均方位移的幂函数形式，这与著名的布朗运动的扩散性质不同。根据反常指数 α ，反常扩散可分为次扩散($0 < \alpha < 1$)、超扩散($1 < \alpha < 2$)、弹道扩散($\alpha = 2$)和超弹道扩散($\alpha > 2$) [1]。连续时间随机游走(CTRW)是研究异常扩散的有效而有力的方法。它在物理、生物、化学等领域的应用取得了显著的成功，其特征是粒子的等待时间和跳跃长度分布不同，它们都是由联合概率密度函数(PDF) $\psi(x, t)$ 。这里， $\lambda(x) = \int_0^\infty dt \psi(x, t)$ 表示跳跃步长 PDF， $\omega(x) = \int_{-\infty}^\infty dx \psi(x, t)$ 表示等待时间 PDF。

随机重置机制的引入使该模型能够更好地描述粒子在进化过程中突然重置状态的场景。这打破了传统随机游动的平移对称性，引入了非平衡定态，为研究非平衡系统的统计性质(如松弛和遍历破缺)提供了新的范式。通过对随机重置过程的分析，我们对系统的动力学性质和演化规律有了更深刻的认识。这种方法有助于应对传统方法难以应对的挑战。例如：在最优搜索策略中，随机重置可以显著减少首次通过时间，为无人机巡逻和靶向药物递送等应用提供理论指导[2]；在生物物理和化学中，带重置的连续时间随机游走解释分子马达步进、蛋白质折叠中的退火过程或化学反应路径中的重置现象[3]；在金融学和网络科学中，它们可以建模中断后的市场恢复或故障后的节点重新启动，从而增强系统的稳健性分析[4]。

目前 CTRW 的研究已经相当深入，在随机重置机制的引入和理论分析方面取得了一系列重要的成果。随机重置对粒子扩散行为的影响以及如何通过数学模型准确刻画这些影响一直是研究的重点，例如，在网络科学中，学者们使用更新方法推导出每个节点的静态占用概率和任意两个节点之间的平均首次通过时间的精确表达式。这些结果为分析网络上的随机游走过程提供了理论基础。Evans 和 Majudar 的开创性工作证明了具有指数重置的布朗运动呈现稳态分布，首次通过时间服从 Gumbel 分布[5]。鲁文尼的“重置 - 加速搜索”理论，证明了存在一个普适的最优重置率[6]。PAL 和 Ruveni 关于重置到非 Poisson 过程的推广[7] (例如，幂重置区间)。然而，较少的研究考察了随机重置系统中重置时间分布与等待时间分布不同的场景。

基于这些考虑，本文将随机重置机制引入到我们先前提出的相关[8]的 CTRW 模型中，研究了相关 CTRW 中的扩散。本文的结构如下：第二节提出了带随机重置的相关 CTRW 框架；第三节分析和讨论了

指数时间分布下的扩散行为；第四节给出了结束语。

2. 随机重置模型

具有随机重置的相关连续时间随机游动(CTRW)是一个经典的更新过程。粒子初始位置在 x_0 处,粒子的起始状态(重置或扩散)由重置概率 r 概率确定,同时,用于重置的等待时间为 $\omega_r(t)$,用于扩散的等待时间为 $\omega_d(t)$ 。在跳跃过程中,粒子要么执行由跳跃长度概率密度函数 $\lambda(x)$ 控制的瞬时跳跃,要么以概率 $r \in (0,1)$ 重置到预设的位置 x_r ,在每次操作(跳跃或重置)之后,系统会更新粒子的位置和状态,生成新的等待期和跳跃长度,并迭代地继续这个动态过程。该框架通过引入状态依赖的随机重置来推广标准的CTRW,其中不同的等待时间分布 $\omega_r(t)$ 和 $\omega_d(t)$ 使得能够对复杂的非平衡现象进行建模[9],同时通过由重置或跳跃事件划分的统计独立的历来保持基本的更新特征。

类似于传统的CTRW模型,我们可以推导出粒子在时间 t 位于位置 x 的概率密度函数,

$$P(x,t) = \int_0^t dt' \Phi(t') \eta(x,t-t') \quad (1)$$

这里,生存概率 $\Phi(t) = 1 - r \int_0^t dt' \omega_r(t') - (1-r) \int_0^t dt' \omega_d(t')$ 表示在时间 t 之前没有跳跃发生的概率。这个量在随机重置的连续时间随机游走模型中起着关键作用,因为它量化了粒子在经历重置或跳跃事件之前保持当前状态的可能性。 $\eta(x,t)$ 指的是在时间 t 刚刚到达位置 x 的粒子,它满足

$$\begin{aligned} \eta(x,t) = & \delta(t) \delta(x-x_0) + (1-r) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \eta(x-x',t-t') \psi(x',t') \\ & + r \delta(x-x_r) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \eta(x',t-t') \omega_r(t') \end{aligned} \quad (2)$$

在这个表达式中,右侧的第一项表示初始条件。第二项描述了粒子在时间 t' 从位置 x' 跃迁到时间 t 的 x 而不经历重置(概率为 $1-r$)的情况,其中 $\psi(x,t) = \lambda(x) \omega_d(t)$ 表示该过程的联合概率密度函数。第三项明确说明了只有在跳转完成后才能进行重置的情况。

考虑 $\eta(k=0,s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \eta(x,s)$, 傅里叶-拉普拉斯空间中的方程(2)可表示为

$$\eta(k,s) = \frac{e^{-ikx_0} + r e^{-ikx_r} \eta(k=0,s) \omega_r(s)}{1 - (1-r) \psi(k,s)} \quad (3)$$

在公式(3)中令 $k=0$ 并同时考虑 $\psi(0,s) = \omega_d(s)$ 后,可以得到:

$$\eta(0,s) = \frac{1}{1 - (1-r) \omega_d(s) - r \omega_r(s)} \quad (4)$$

并且将公式(4)代入公式(3)中可以得到:

$$\eta(k,s) = \frac{e^{-ikx_0}}{1 - (1-r) \psi(k,s)} + \frac{r e^{-ikx_r} \omega_r(s)}{[1 - (1-r) \psi(k,s)] \cdot [1 - (1-r) \omega_d(s) - r \omega_r(s)]} \quad (5)$$

然后对方程(1)利用傅里叶-拉普拉斯变换,同时考虑方程(5),我们得到了:

$$P(k,s) = \Phi(s) \eta(k,s) = \frac{1}{s} \frac{e^{ikx_0} [1 - r \omega_r(s) - (1-r) \omega_d(s)] + r e^{ikx_r} \omega_r(s)}{1 - (1-r) \psi(k,s)} \quad (6)$$

方程(6)可用归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x,t) = \mathcal{L}_{s \rightarrow t}^{-1} \{P(k=0,s)\} = 1$ 进行验证,这是引入随机重置机制后得到的传播子,当 $r=0$ 时, $P(k,s)$ 表示标准CTRW模型的传播子。

3. 指数时间分布下的反常扩散

在具有指数分布等待时间和高斯跳跃长度的系统中引入随机重置机制，可以将正常扩散转化为非平稳状态。在本文中，随机等待时间和重置等待时间分别服从于参数不同的指数分布 (λ_r 和 λ_d)，即 $\omega_r(t) = \lambda_r e^{-\lambda_r t}$ 和 $\omega_d(t) = \lambda_d e^{-\lambda_d t}$ ；而跳跃步长服从于高斯分布 $\lambda(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ 。

扩散行为可以利用其传播子和以下公式计算其各阶矩来表示 $\langle x^n(t) \rangle = i^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^n P(k,s)}{\partial k^n} \right\}_{k=0}$ ，包括：

$$\langle x(t) \rangle = i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial P(k,s)}{\partial k} \right\}_{k=0} \quad (7)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 P(k,s)}{\partial k^2} \right\}_{k=0} \quad (8)$$

还有均方位移(MSD)：

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (9)$$

分别将随机等待时间，重置等待时间和跳跃步长分布在 Laplace 空间下的表示 $\omega_d(s) = \frac{\lambda_d}{s + \lambda_d}$ 、 $\omega_r(s) = \frac{\lambda_r}{s + \lambda_r}$ 、 $\lambda(k) = e^{-\sigma^2 k^2/2}$ 代入到式(6)，并利用方程(7)可以得到模型在 Laplace 空间下的一阶矩：

$$\langle x(s) \rangle = \frac{x_r}{s} + \frac{r(\lambda_d - \lambda_r)}{\lambda_r - r\lambda_d} \cdot \frac{x_r - x_0}{s + \lambda_r} + \frac{\lambda_r(1-r)}{\lambda_r - r\lambda_d} \cdot \frac{x_r - x_0}{s + r\lambda_d} \quad (10)$$

然后可以通过对(10)式进行逆 Laplace 变换得到一阶矩：

$$\langle x(t) \rangle = x_r + \frac{(x_r - x_0)}{r\lambda_d - \lambda_r} \left[r(\lambda_r - \lambda_d) e^{-\lambda_r t} + \lambda_r(1-r) e^{-r\lambda_d t} \right] \quad (11)$$

一阶矩的分析表明，重置速率 λ_r 和扩散速率 λ_d 共同控制着系统向稳态的松弛动力学。当 λ_r 超过 λ_d 时，系统行为主要受重置控制；反之，当 d 占主导地位时，扩散起决定性作用。无论参数值如何，系统总是稳定在重置位置 x_r 。由重置和扩散之间的相对强度确定的特征松弛速率 $\max(\lambda_r, r\lambda_d)$ 决定了系统接近该稳态的速度。图 1 为一阶矩的模拟分析图：

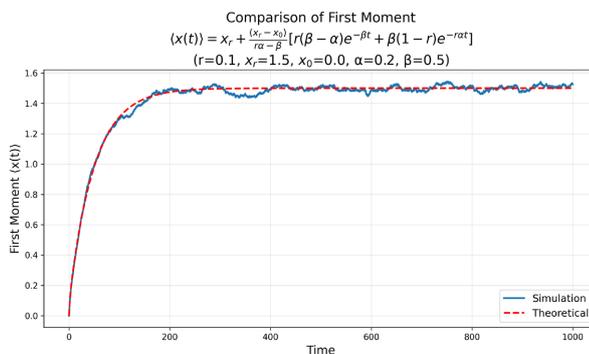


Figure 1. First-order moment fitting plot, with the parameters as follows: Reset probability $r = 0.1$, Reset position $x_r = 1.5$, Initial position $x_0 = 0$, Waiting time parameter $\alpha = 0.2$, Reset time parameter $\beta = 0.5$

图 1. 一阶矩拟合图，其中参数为：重置概率 $r = 0.1$ ，重置位置 $x_r = 1.5$ ，初始位置 $x_0 = 0$ ，等待时间参数 $\alpha = 0.2$ ，重置时间参数 $\beta = 0.5$

类似地，拉普拉斯空间中的二阶矩可以从式(8)中得到：

$$\langle x^2(s) \rangle = \frac{1}{s} \left[x_0^2 - r(x_0^2 - x_r^2) \frac{\lambda_r(\lambda_d + s)}{(\lambda_r + s)(r\lambda_d + s)} + \frac{(1-r)\lambda_d\sigma^2}{r\lambda_d + s} \right] \quad (12)$$

对式(12)进行逆 Laplace 变换可得到时间域中二阶矩的显式表达式：

$$\langle x^2(t) \rangle = x_0^2 - (x_0^2 - x_r^2) \left(1 + \frac{r(\lambda_r - \lambda_d)}{r\lambda_d - \lambda_r} e^{-\lambda_r t} + \frac{\lambda_r(1-r)}{r\lambda_d - \lambda_r} e^{-r\lambda_d t} \right) + \frac{(1-r)\sigma^2}{r} (1 - e^{-r\lambda_d t}) \quad (13)$$

类似地，重置速率 λ_r 和扩散系数 λ_d 共同确定向稳定状态的松弛速率。保证系统最终达到非平衡定态，此时扩散噪声 σ^2 增强了二阶矩的涨落。图 2 为二阶矩模拟拟合图：

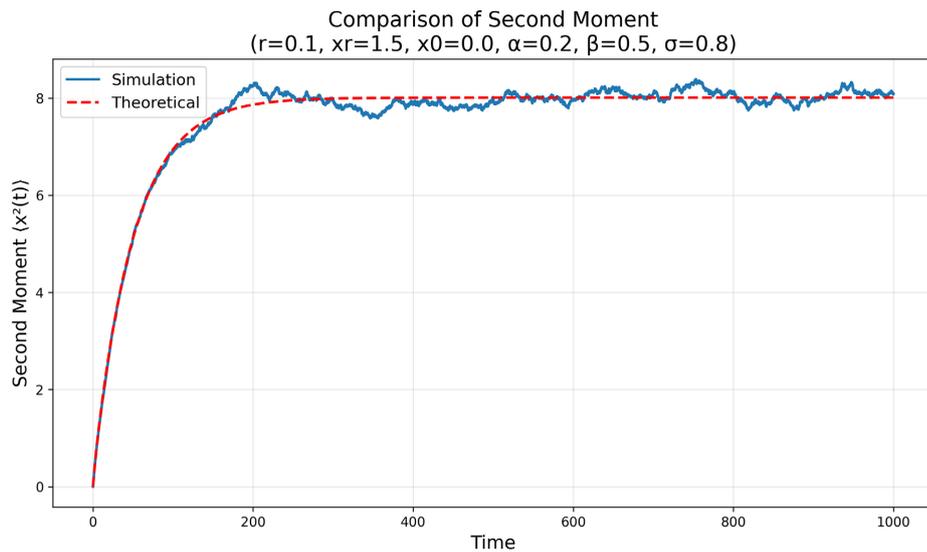


Figure 2. Second-order moment fitting plot, with the parameters as follows: Reset probability $r = 0.1$, Reset position $x_r = 1.5$, Initial position $x_r = 0$, Waiting time parameter $\alpha = 0.2$, Reset time parameter $\beta = 0.5$

图 2. 二阶矩拟合图，其中参数为：重置概率 $r = 0.1$ ，重置位置 $x_r = 1.5$ ，初始位置 $x_r = 0$ ，等待时间参数 $\alpha = 0.2$ ，重置时间参数 $\beta = 0.5$

方差可以通过式(9)，利用一阶矩和二阶矩得到：

$$\begin{aligned} \text{MSD} = & \frac{(1-r)\sigma^2}{r} (1 - e^{-r\lambda_d t}) - \frac{(x_0 - x_r)^2 r (\lambda_r - \lambda_d)}{r\lambda_d - \lambda_r} e^{-\lambda_r t} \\ & - \frac{(x_0 - x_r)^2 r^2 (\lambda_r - \lambda_d)^2}{(r\lambda_d - \beta)^2} e^{-2\lambda_r t} - 2 \frac{(x_0 - x_r)^2 r (\lambda_r - \lambda_d) \lambda_r (1-r)}{(r\lambda_d - \beta)^2} e^{-(\lambda_r + r\lambda_d)t} \\ & - \frac{(x_0 - x_r)^2 \lambda_r^2 (1-r)^2}{(r\lambda_d - \lambda_r)^2} e^{-2r\lambda_d t} \end{aligned} \quad (14)$$

分析揭示了随机重置过程的三个特征区域：首先呈现由扩散系数 λ_d 控制的线性增长，然后是由松弛速率 $\max(\lambda_r, r\lambda_d)$ 控制的中间衰变阶段，最后达到稳定平台，其值由噪声强度 σ^2 和重置速率 r 之间的相互作用决定。这种三部分的时间演化展示了扩散扩展和重置驱动的局部化之间的竞争如何在不同的时间尺度上塑造系统的统计特性。图 3 为方差模拟拟合图：

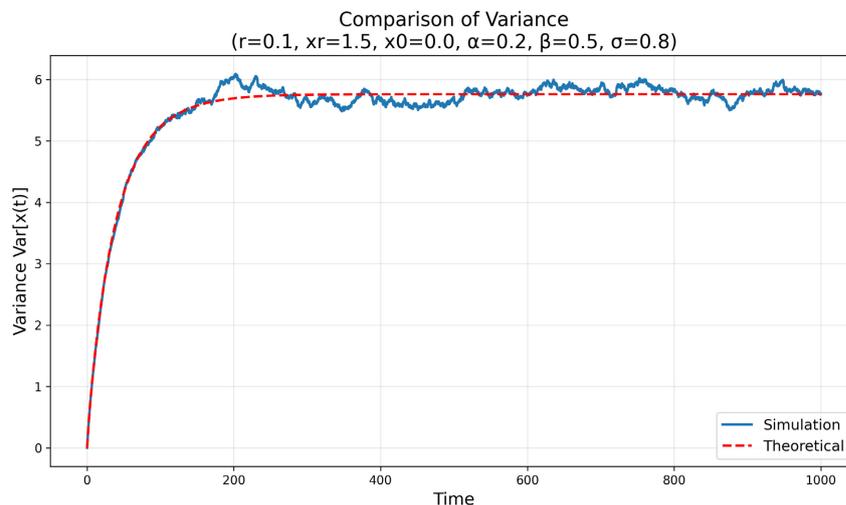


Figure 3. Variance fitting plot, with the parameters as follows: Reset probability $r = 0.1$, Reset position $x_r = 1.5$, Initial position $x_0 = 0$, Waiting time parameter $\alpha = 0.2$, Reset time parameter $\beta = 0.5$

图 3. 方差拟合图, 其中参数为: 重置概率 $r = 0.1$, 重置位置 $x_r = 1.5$, 初始位置 $x_0 = 0$, 等待时间参数 $\alpha = 0.2$, 重置时间参数 $\beta = 0.5$

4. 结论

本文通过在随机游走的基础上引入随机重置, 并且推导了重置时间分布与扩散时间分布的参数不同的情况, 系统研究了其在不同参数的指数等待时间与高斯跳跃步长假设下的扩散行为。理论推导表明, 系统的统计特性由重置速率与扩散速率的相对强度共同决定: 当重置速率占优时, 系统行为主要由重置事件主导; 反之, 则由扩散过程控制。数值模拟进一步验证了理论预测, 并揭示出系统演化呈现三个典型阶段: 初始扩散阶段、中间弛豫阶段和最终稳态阶段。该模型不仅拓展了传统 CTRW 的理论框架, 也为实际系统中存在重置行为的扩散过程(如靶向药物递送、网络节点恢复等)提供了可量化的分析工具。未来工作可考虑非指数重置时间、非高斯跳跃以及空间非均匀重置位置等更一般情形。

参考文献

- [1] Evans, M.R. and Majumdar, S.N. (2011) Diffusion with Stochastic Resetting. *Physical Review Letters*, **106**, Article ID: 160601. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.160601>
- [2] Pal, A. and Reuveni, S. (2017) First Passage under Restart. *Physical Review Letters*, **118**, Article ID: 030603. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.030603>
- [3] Reuveni, S. (2016) Optimal Stochastic Restart Renders Fluctuations in First Passage Times Universal. *Physical Review Letters*, **116**, Article ID: 170601. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.170601>
- [4] Montroll, E. (2013) Random Walks on Lattices. *Scientific Programming*, 2013, 333-368.
- [5] Metzler, R. and Klafter, J. (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, **339**, 1-77. [https://doi.org/10.1016/s0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(00)00070-3)
- [6] Kusmierz, L., Majumdar, S.N., Sabhapandit, S. and Schehr, G. (2014) First Order Transition for the Optimal Search Time of Lévy Flights with Resetting. *Physical Review Letters*, **113**, Article ID: 220602. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.220602>
- [7] Redner, S. and Dorfman, J.R. (2002) A Guide to First-Passage Processes. *American Journal of Physics*, **70**, 1166. <https://doi.org/10.1119/1.1509421>
- [8] Baeumer, B., Benson, D.A., Meerschaert, M.M. and Wheatcraft, S.W. (2001) Subordinated Advection-Dispersion Equation for Contaminant Transport. *Water Resources Research*, **37**, 1543-1550. <https://doi.org/10.1029/2000wr900409>
- [9] Slinn, W.G.N. and Gibbs, A.G. (1971) The Stochastic Growth of a Rain Droplet. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **28**, 973-982. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1971\)028<0973:tsgoar>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1971)028<0973:tsgoar>2.0.co;2)