Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(3), 225-236
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.153101

基于最小度条件的弱奇泛圈性

江　平[*]，王　健

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2026年2月5日；录用日期：2026年2月28日；发布日期：2026年3月11日

摘　要

奇围长是一个图中所有奇圈的长度的最小值。2024年，Yuan与Peng证明了如果一个n顶点非二部图G的最小度大于$n/6$，那么G包含从11到$2\lfloor n/21000 \rfloor+1$之间的所有长度的奇圈。在本文中，我们证明了如果一个n顶点非二部图G的奇围长为l且最小度大于$n/(2(2l+1))$，那么G包含从$2l+1$到$2\left\lfloor n/\left(128(2l+1)^4\right)\right\rfloor+1$之间的所有长度的奇圈。同时，这里的最小度条件是最好可能的。

关键词

圈，泛圈性，最小度

Weakly Odd Pancyclicity Threshold for the Minimum Degree

Ping Jiang[*], Jian Wang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: February 5, 2026; accepted: February 28, 2026; published: March 11, 2026

Abstract

The odd girth of a graph is the minimum length of its odd cycles. In 2024, Yuan and Peng proved that if an n-vertex non-bipartite graph G has minimum degree greater than $n/6$, then G contains odd cycles of all lengths from 11 to $2\lfloor n/21000 \rfloor+1$. In this paper, we show that if an n-vertex non-bipartite graph G has odd girth l and minimum degree greater than $n/(2(2l+1))$, then G

[*]通讯作者。

文章引用: 江平, 王健. 基于最小度条件的弱奇泛圈性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(3): 225-236.
DOI: 10.12677/aam.2026.153101

contains odd cycles of all lengths from $2l+1$ to $2\left\lfloor n/\left(128(2l+1)^4\right)\right\rfloor+1$. Furthermore, the minimum degree condition is best possible.

Keywords

Cycle, Pancyclicity, Minimum Degree

1. 引言

令 H 为一个图。如果一个图 G 不包含 H 作为子图，则称该图 G 是 H -禁止的(H -free)。我们用 $\mathrm{ex}(n,H)$ 表示 H 的 Turán 数，即一个 n 顶点 H -禁止图中的最大边数。确定给定图 H 的 Turán 数是极值图论中最核心的研究问题之一。令 $T_r(n)$ 表示 Turán 图，即具有 r 个部集(每个部集的大小为 $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ 或 $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ 的完全 r -部图，并令 $t_r(n)=e(T_r(n))$。经典的 Turán 定理[1]表明，$T_r(n)$ 是所有 n 个顶点的 K_{r+1} -禁止图中唯一达到最大边数的图。Erdős [2]和 Simonovits [3]证明了如果 G 是一个具有 $t_r(n)-o(n^2)$ 条边的 K_{r+1} -禁止图，那么一定可以通过添加或删除至多 $o(n^2)$ 条边将 G 变成 Turán 图 $T_r(n)$。

令 G 为一个图。对于 $S\subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示由 S 诱导的 G 的导出子图。对于不相交的 $X,Y\subseteq V(G)$，$G[X,Y]$ 表示由 X 和 Y 诱导的 G 的二部子图，即 $G[X,Y]$ 的边集由所有一端在 X 中、另一端在 Y 中的边组成。令 $N_S(v)$ 表示 v 在 $G[S]$ 中的邻点集合，$d_S(v)$ 表示 v 在 S 中的邻点个数。对于 $T\subseteq V(G)$，令 $G-T$ 表示由 $V(G)-T$ 诱导的子图，$N_G(T)$ 表示 T 中所有顶点在 G 中的邻域的并集。我们用 $e(S)$ 表示 $G[S]$ 中的边数，$e(X,Y)$ 表示 $G[X,Y]$ 中的边数。在本文中令 P_k 表示具有 k 个顶点的路，C_k 表示具有 k 个顶点的圈，我们将连接 C_k 中任意两个不相邻顶点的边称为弦。

令 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。1974 年，Andrásfai、Erdős 和 Sós [4]证明了如下结果。

定理 1.1 [4]对于每个具有 n 个顶点的非二部图 G，若满足

$$\delta(G)>\frac{2n}{2k+1},$$

则图 G 包含一个长度至多为 $2k-1$ 的奇圈。

保证图中圈存在性的最小度条件已经得到了广泛的研究(见[5]-[11]等)。在[8]中，Häggkvist 得到了以下结果。

定理 1.2 [8]令 G 为 n 个顶点的非二部图，并且满足

$$n>\binom{k+1}{2}(2k+1)(3k-1)$$

且

$$\delta(G)>\frac{2n}{2k+1}.$$

那么，要么 G 包含一个 C_{2k-1}，要么 G 不包含长度大于 $k/2$ 的奇圈。

2024 年，Yuan 和 Peng [12]考虑了保证 C_{2k+1}-禁止图是二部图的最优最小度条件。

定理 1.3 [12]令 $k\ge 5$ 且 $n\ge 21000k$ 为整数。令 G 为 n 个顶点的非二部图。如果

$$\delta(G)\ge \frac{n}{6}+1,$$

则 G 包含从 11 到 $2\lfloor n/21000\rfloor+1$ 之间的所有长度的奇圈。

在此背景下，Györi、Nikiforov 和 Schelp [13]证明了在某些给定条件下，具有较大最小度的图 G 中圈长的集合包含任意长的连续奇数区间。

定理 1.4 [13]令 k，m 为正整数。存在 $n_0=n_0(k,m)$ 和 $c=c(k,m)$，使得对于每个 $n>n_0$ 个顶点的非二部图 G，若其最小度满足

$$\delta(G)>\frac{n}{2(2k+1)}+c,$$

且对于某个 $k\le s\le 4k+1$，有 $C_{2s+1}\subset G$，则对每个 $j\in[m]$，有 $C_{2s+2j+1}\subset G$。

2004 年，Nikiforov 和 Schelp [10]证明了若一个图 G 的最小度相对较大时，那么 G 中出现的圈的阶数的间隔是有界的。

定理 1.5 [10]假设 c 是一个满足 $0<c<1$ 的实数。存在 $n_0=n_0(c)$ 和 $k=k(c)$，使得对于每个图 G，若 $n>n_0$ 且最小度 $\delta(G)>cn$，如果对于某个 $t\ge 2k$ 有 $C_t\subset G$，则对于某个正整数 $s\le k$，有 $C_{t-2s}\subset G$。

在本文中，我们针对 Györi、Nikiforov 和 Schelp 的结果，通过将最小度条件放宽到 $\delta(G)>\frac{n}{2(2l+1)}$，并在此条件下证明了以下定理。

定理 1.6 令 l，k 为正整数。对每个 $n>128k(2l+1)^4$ 个顶点的非二部图 G，若其最小度满足 $\delta(G)>\frac{n}{2(2l+1)}$，且最短奇圈 $C_{2l+1}\subset G$，则对 $l\le k\le\left\lfloor n/\left(128(2l+1)^4\right)\right\rfloor$，有 $C_{2k+1}\subset G$。

定理 1.6 中的最小度条件是最好可能的。极值构造如下：取 $2l+1$ 个顶点互不相交的 $K_{\frac{n}{2(2l+1)},\frac{n}{2(2l+1)}}$，在每个 $K_{\frac{n}{2(2l+1)},\frac{n}{2(2l+1)}}$ 中选取一个顶点，并将选中的顶点相连成 C_{2l+1}，如图 1。

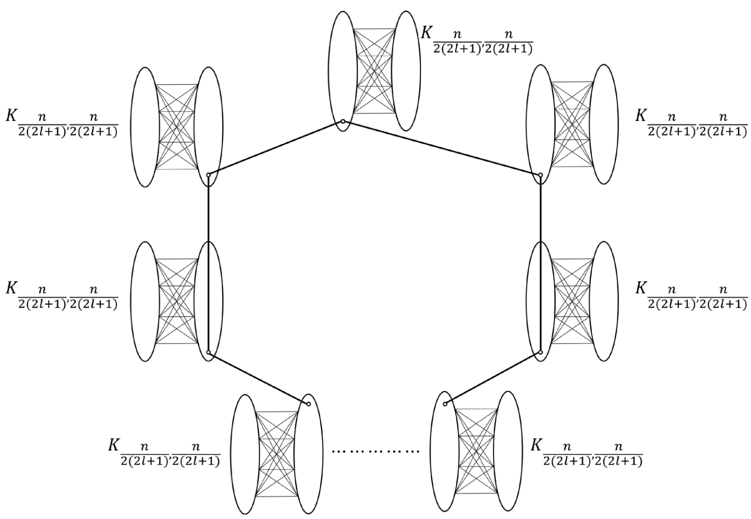

Figure 1. The extremal construction
图 1. 极值构造

当奇围长变大时，圈上每个点所在的二部图的点数会相应减少，整体结构并未发生本质变化。

2. 定理 1.6 的证明

在证明过程中，我们将应用以下两个结果。第一个(定理 2.1)是 Erdős 和 Gallai [14]关于路的 Turán 数的经典结果。第二个(引理 2.2)保证每个图 G 都包含一个最小度至少为 G 平均度的一半的子图。

定理 2.1 [14]对于 $k\ge 1$，有 $\mathrm{ex}\left(n,P_{k+1}\right)\le\dfrac{(k-1)n}{2}$。

引理 2.2 [12]如果 G 有 m 条边和 n 个顶点，那么 G 包含一个子图 H，满足 $\delta(H)\ge\dfrac{m}{n}$。

定理 1.6 的证明： 反证法，假设 G 不包含 C_{2k+1}。令 $C_{2l+1}=v_1v_2\cdots v_{2l+1}v_1$ 为 G 的一个最短奇圈。令 $Z=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_{2l+1}\right\}$，$G'=G-Z$。

断言 2.3 [12]对于任意顶点 $v\in V(G')$，如果 $l\ge 2$，则 $d_Z(v)\le 2$。

我们将 $V(G')$ 划分为三部分：

$$\begin{cases} S_i=\left\{N_{G'}(v_i),i\in[2l+1]\right\} \text{ 且 } S=\bigcup\limits_{i=1}^{2l+1}S_i, \\ T_i=\left\{N_{G'-S}(S_i),i\in[2l+1]\right\} \text{ 且 } T=\bigcup\limits_{i=1}^{2l+1}T_i, \\ R=V(G')-S-T. \end{cases}$$

对于 $i,j\in[2l+1]$ 且 $i\ne j$，如果我们沿着 C_{2l+1} 顺时针观察从 v_i 到 v_j 的路和沿着 C_{2l+1} 逆时针观察从 v_i 到 v_j 的路，那么其中一条路的阶数(顶点数)为偶数，另一条为奇数。在本文中我们将阶数为偶数的路记为 P_{ij}^{even}，其阶数记为 p_{ij}^{even}，将阶数为奇数的路记为 P_{ij}^{odd}，其阶数记为 p_{ij}^{odd}。

断言 2.4 令 $i,j\in[2l+1]$ 且 $i\ne j$。则

(i) 在 G' 中不存在两端都在 S_i 的 P_{2k}；

(ii) 在 G' 中不存在一端在 S_i、另一端在 S_j 的 $P_{2k+1-p_{ij}^{odd}}$；

(iii) 在 G' 中不存在一端在 $S_i\setminus S_j$、另一端在 T_j 的 $P_{2k-p_{ij}^{even}}$；

(iv) 在 G' 中不存在一端在 $T_i\setminus T_j$、另一端在 T_j 的 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$。

断言 2.4 的证明： (i) 如果在 G' 中存在一条两端都在 S_i 的 P_{2k}，那么这条路与 v_i 一起形成一个 C_{2k+1}，矛盾。

(ii) 如果在 G' 中存在一条一端 x 在 S_i、另一端 y 在 S_j 的 $P_{2k+1-p_{ij}^{odd}}$，那么这条路与边 xv_i、yv_j 以及路 P_{ij}^{odd} 一起形成一个 C_{2k+1}，矛盾。

(iii) 如果在 G' 中存在一条一端 x 在 $S_i\setminus S_j$、另一端 y 在 T_j 的 $P_{2k-p_{ij}^{even}}$，那么这条路与边 xv_i、路 yzv_j (其中 $z\ne x$ 是 S_j 中与 y 相邻的顶点)以及路 P_{ij}^{even} 一起形成一个 C_{2k+1}，矛盾。

(iv) 如果在 G' 中存在一条一端 x 在 $T_i\setminus T_j$、另一端 y 在 T_j 的 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$，那么这条路与路 $xx'v_i$ 和 $yy'v_j$ (其中 x' 是 S_i 中与 x 相邻的顶点，y' 是 S_j 中与 y 相邻的顶点)以及路 P_{ij}^{odd} 一起形成一个 C_{2k+1}，矛盾。

断言 2.4 证毕。

以下观察对于获得 G 的结构信息很重要。

断言 2.5 对于 $i,j\in[2l+1]$ 且 $i\ne j$，有 $\left|S_i\cap S_j\right|<\dfrac{n}{16(2l+1)^2}$。

断言 2.5 的证明：反证法，假设存在 $i,j\in[2l+1]$ 且 $i\neq j$，使得 $\left|S_i\cap S_j\right|\geq\frac{n}{16(2l+1)^2}$。令 $S_{ij}=S_i\cap S_j$，$N_T\left(S_{ij}\right)=T_{ij}$，则 $\left|S_{ij}\right|\geq\frac{n}{16(2l+1)^2}$。对于每个顶点 $v\in V\left(S_{ij}\right)$，由于 $d(v)\geq\delta(G)>\frac{n}{2(2l+1)}$ 且断言 2.3 成立，我们有 $d_{G'}(v)\geq\frac{n}{2(2l+1)}-3$。那么

$$\left|S_{ij}\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-3\right)\leq\sum_{v\in S_{ij}}d_{G'}(v)\leq e\left(S_{ij},T_{ij}\right)+\sum_{t=1}^{2l+1}e\left(S_{ij},S_t-S_{ij}\right)+2e\left(S_{ij}\right). \tag{2.1}$$

由断言 2.4 (ii)，对于每个 $t\in[2l+1]$，$G\left[S_{ij},S_t-S_{ij}\right]$ 是 $P_{2k+1-p_{ij}^{odd}}$-禁止的。由断言 2.4 (i)，$G\left[S_{ij}\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。那么应用定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{2l+1}e\left(S_{ij},S_t-S_{ij}\right)+2e\left(S_{ij}\right)&\leq\frac{2k-2}{2}\left[\sum_{t=1}^{2l+1}\left(\left|S_{ij}\right|+\left|S_t-S_{ij}\right|\right)\right]+2\cdot\frac{2k-2}{2}\left|S_{ij}\right|\\&\leq(k-1)\left[(2l+1)\left|S_{ij}\right|+2\left|S_{ij}\right|+\sum_{t=1}^{2l+1}\left(\left|S_t-S_{ij}\right|\right)\right]\\&\leq(k-1)\left[(2l+3)\left|S_{ij}\right|+(2l+1)n\right].\end{aligned} \tag{2.2}$$

由不等式(2.1)和(2.2)以及 $n>128k(2l+1)^4$，我们有

$$\begin{aligned}e\left(S_{ij},T_{ij}\right)&\geq\left|S_{ij}\right|\left(\frac{n}{2(2l+1)}-3\right)-(k-1)\left[(2l+3)\left|S_{ij}\right|+(2l+1)n\right]\\&\geq\left|S_{ij}\right|\left[\frac{n}{2(2l+1)}-3-(k-1)(2l+3)\right]-(k-1)(2l+1)n\\&>\frac{n}{16(2l+1)^2}\cdot\frac{n}{4(2l+1)}-(2l+1)kn\\&>\frac{n^2}{128(2l+1)^3}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

由(2.3)我们可以知道 $G\left[S_{ij},T_{ij}\right]$ 中含有较多的边，这会导致其中一部分边和圈上的边构成一个 C_{2k+1}。根据引理 2.2，我们可以找到一个子图 $F\subseteq G\left[S_{ij},T_{ij}\right]$，使得 $\delta(F)>\frac{n}{128(2l+1)^3}>2k$，因此我们可以贪心地找到 F 中一条两端均在 S_{ij} 的 $P_{2k+1-p_{ij}^{even}}$，那么这条路与路 P_{ij}^{even} 一起形成一个 C_{2k+1}，矛盾。断言 2.5 证毕。

断言 2.6 $|R|<\frac{n}{4(2l+1)}$。

断言 2.6 的证明：对于每个 $i\in[2l+1]$，我们令

$$S_i^*=S_i-\bigcup_{\substack{j\in[2l+1]\\i\neq j}}\left(S_i\cap S_j\right),\ T_i^*=T_i-\bigcup_{\substack{j\in[2l+1]\\i\neq j}}\left(T_i\cap T_j\right).$$

由 S_i^* 和 T_i^* 的定义可以知道对于 $j\in[2l+1]\setminus\{i\}$，有 $S_i^*\cap S_j=\varnothing$，且 $T_i^*\cap T_j=\varnothing$。对于每个顶点 $v\in S_i^*$，有 $N_Z(v)=\{v_i\}$，所以 $d_{G'}(v)>\frac{n}{2(2l+1)}-1$。那么

$$\left|S_i^*\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-1\right)<\sum_{v\in S_i^*}d_{G'}(v)\leq e\left(S_i^*,T_i^*\right)+\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\t\neq i}}e\left(S_i^*,S_t\right)+\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\t\neq i}}e\left(S_i^*,T_t\right)+2e\left(S_i^*\right). \tag{2.4}$$

由断言 2.4 (ii)，$G\left[S_i^*,S_t\right]$是 $P_{2k+1-p_{it}^{odd}}$-禁止的。由断言 2.4 (iii)，$G\left[S_i^*,T_t\right]$是 $P_{2k-p_{it}^{even}}$-禁止的。由断言 2.4 (i)，$G\left[S_i^*\right]$是 P_{2k}-禁止的。因此由定理 2.1，我们有

$$\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\ t\neq i}} e\left(S_i^*,S_t\right)+\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\ t\neq i}} e\left(S_i^*,T_t\right)+2e\left(S_i^*\right)\le(4l+2)kn. \tag{2.5}$$

由不等式(2.4)和(2.5)，我们有

$$\begin{aligned} e\left(S_i^*,T_i^*\right)&>\left|S_i^*\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-1\right)-\left(\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\ t\neq i}} e\left(S_i^*,S_t\right)+\sum_{\substack{t\in[2l+1]\\ t\neq i}} e\left(S_i^*,T_t\right)+2e\left(S_i^*\right)\right)\\ &>\left|S_i^*\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-1\right)-(4l+2)kn. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由断言 2.5，对于 $i,j\in[2l+1]$，有 $\left|S_i\cap S_j\right|<\dfrac{n}{16(2l+1)^2}$。再由断言 2.3，$G'$ 中的点最多与 Z 中 2 点相邻，因此，只有当 $j=i\pm2$ 时 $S_i\cap S_j$ 非空，当 $j\neq i\pm2$ 且 $j\neq i$ 时 $S_i\cap S_j$ 为空集。此外，对于 $i\in[2l+1]$，有 $\left|S_i\right|\ge\dfrac{n}{2(2l+1)}-2$，因此我们有

$$\begin{aligned} \left|S_i^*\right|&=\left|S_i-\bigcup_{\substack{j\in[2l+1]\\ i\neq j}}\left(S_i\cap S_j\right)\right|\\ &>\frac{n}{2(2l+1)}-2-2\cdot\frac{n}{16(2l+1)^2}\\ &=\frac{n(8l+3)-16(2l+1)^2}{8(2l+1)^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

由于 $e\left(S_i^*,T_i^*\right)\le\left|S_i^*\right|\left|T_i^*\right|$ 那么

$$\begin{aligned} \left|T_i^*\right|&\ge\frac{e\left(S_i^*,T_i^*\right)}{\left|S_i^*\right|}\\ &>\left(\frac{n}{2(2l+1)}-1\right)-\frac{2(2l+1)kn}{\left|S_i^*\right|}\\ &>\frac{n}{2(2l+1)}-1-\frac{2(2l+1)kn}{\dfrac{n}{2(2l+1)}-2-2l\cdot\dfrac{n}{16(2l+1)^2}}\\ &=\frac{(n-4l-2)\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]-32kn(2l+1)^4}{2(2l+1)\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

根据(2.7)和(2.8)我们可以知道互不相交的集合 S_i^* 和 T_i^* 的下界，其中 $i\in[2l+1]$。再根据 S_i^* 和 T_i^* 的定义我们可以知道 $S_i^*\subseteq S_i$ 并且 $T_i^*\subseteq T_i$，而 $S=\bigcup_{i=1}^{2l+1}S_i$ 并且 $T=\bigcup_{i=1}^{2l+1}T_i$，那么我们可以得到 S 和 T 两个集合大小之和的下界，即

$$\begin{aligned}|S|+|T| &\ge \sum_{i=1}^{2l+1}\left(\left|S_i^*\right|+\left|T_i^*\right|\right)\\ &> \frac{\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]\left[(16l+7)n-24(2l+1)^2\right]-128kn(2l+1)^5}{8(2l+1)\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

根据定义我们可以知道 R 是 G' 去掉 S 和 T 剩下的点的集合，并且 $Z=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2l+1}\}$， $G'=G-Z$，所以由不等式(2.9)，我们有

$$\begin{aligned}|R| &\le n-|S|-|T|-|Z|\\ &< n-\frac{\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]\left[(16l+7)n-16(2l+1)^2\right]-128kn(2l+1)^5}{8(2l+1)\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]}\\ &= \frac{\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]\left[n+16(2l+1)^2\right]+128kn(2l+1)^5}{8(2l+1)\left[n(8l+3)-16(2l+1)^2\right]}\\ &< \frac{n}{4(2l+1)}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

断言 2.6 证毕。

以下断言对定理 1.6 的证明至关重要。

断言 2.7 令 $i\in[2l+1]$。则

(i) 对于每个顶点 $v\in S_i$，有 $d_{T_i}(v)\ge 2k$；

(ii) 对于每个顶点 $v\in T_i$，有 $d_{S_i}(v)\ge 2k$。

断言 2.7 的证明：(i) 反证法，假设存在一个顶点 $x\in S_i$，使得 $d_{T_i}(x)<2k$，那么

$$d(x)-d_{T_i}(x)-d_Z(x)>\frac{n}{2(2l+1)}-2k-(2l+1).$$

根据平均值原理，必然存在某个 S_j，使得

$$d_{S_j}(x)>\left(\frac{n}{2(2l+1)}-2k-(2l+1)\right)\Big/(2l+1).$$

令 $S_j'=N_{S_j}(x)$，则

$$\left|S_j'\right|>\frac{n}{2(2l+1)^2}-\frac{2k+2l+1}{2l+1}>\frac{n}{4(2l+1)^2}. \tag{2.11}$$

由于 $\delta(G)>\dfrac{n}{2(2l+1)}$，对于任意顶点 $v\in S_j'$，我们有 $d_{G'}(v)\ge\dfrac{n}{2(2l+1)}-3$。那么

$$\left|S_j'\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-3\right)\le\sum_{v\in S_j'}d_{G'}(v)=e\left(S_j',T_j\right)+\sum_{t=1}^{2l+1}e\left(S_j',S_t-S_j'\right)+2e\left(S_j'\right). \tag{2.12}$$

对于 $t\ne j$，由断言 2.4 (ii)，$G\left[S_j',S_t-S_j'\right]$ 是 $P_{2k+1-p_{jt}^{odd}}$-禁止的。对于 $t=j$，由断言 2.4 (i)，$G\left[S_j',S_j-S_j'\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。由断言 2.4 (i)，$G\left[S_j'\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。因此，由不等式(2.12)和定理 2.1，我们有

$$
\begin{aligned}
e\left(S_j',T_j\right) &\ge \left|S_j'\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-3\right)-\left(\sum_{t=1}^{2l+1}e\left(S_j',S_t-S_j'\right)+2e\left(S_j'\right)\right)\\
&> \frac{n}{4(2l+1)^2}\cdot\frac{n}{4(2l+1)}-(2l+3)kn\\
&\ge \frac{n^2}{16(2l+1)^3}-\frac{n^2}{32(2l+1)^3}\\
&\ge \frac{n^2}{32(2l+1)^3}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

因为$\left|S_j'\right|>\dfrac{n}{4(2l+1)^2}$ (见不等式(2.11))且$n>128k(2l+1)^4$。由引理 2.2，存在一个子图$K\subseteq G\left[S_j',T_j\right]$，使得$\delta(K)>\dfrac{n}{32(2l+1)^3}>2k$。如果$j=i$，那么我们可以贪心地找到$K$中一条两端均在$S_i'$的阶数为$2k-1$的路$P$，使得$P+\{x,v_i\}$形成一个长度为$2k+1$的圈，矛盾。如果$j\ne i$，我们可以贪心地找到$K$中一条两端均在$S_j'$的阶数为$2k-p_{ij}^{even}$的路$P$，使得$P+\{x\}$与$C_{2l+1}$的偶长弧$v_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$一起形成一个长度为$2k+1$的圈，矛盾。

(ii) 反证法，假设存在一个顶点$y\in T_i$，使得$d_{S_i}(y)<2k$。由于$y\in T_i$，存在一个顶点$y'\in S_i$使得$yy'\in E(G)$。由于$\delta(G)>\dfrac{n}{2(2l+1)}$，我们有

$$
d(y)-d_{S_i}(y)-|R|>\frac{n}{2(2l+1)}-2k-|R|. \tag{2.14}
$$

由于$n>128k(2l+1)^4$，根据(2.14)和断言 2.6，我们有

$$
d(y)-d_{S_i}(y)-|R|>\frac{n}{2(2l+1)}-2k-\frac{n}{4(2l+1)}>\frac{n}{4(2l+1)}-2k.
$$

根据平均值原理，要么存在某个S_j且$j\ne i$，使得

$$
d_{S_j}(y)>\frac{n}{8(2l+1)^2}-\frac{k}{2l+1},
$$

要么存在某个T_j，使得

$$
d_{T_j}(y)>\frac{n}{8(2l+1)^2}-\frac{k}{2l+1}.
$$

情况 1. 存在某个S_j且$j\ne i$，使得$d_{S_j}(y)>\dfrac{n}{8(2l+1)^2}-\dfrac{k}{2l+1}$。

我们令$S_j''=N_{S_j}(y)$，则$\left|S_j''\right|>\dfrac{n}{8(2l+1)^2}-\dfrac{k}{2l+1}$。由于$\delta(G)>\dfrac{n}{2(2l+1)}$，对于任意顶点$v\in S_j''$，我们有$d_{G'}(v)\ge\dfrac{n}{2(2l+1)}-3$。那么

$$
\left|S_j''\right|\cdot\left(\frac{n}{2(2l+1)}-3\right)\le\sum_{v\in S_j''}d_{G'}(v)=e\left(S_j'',T_j\right)+\sum_{t=1}^{2l+1}e\left(S_j'',S_t-S_j''\right)+2e\left(S_j''\right). \tag{2.15}
$$

对于 $t \neq j$，由断言 2.4(ii)，$G\left[S_j'', S_t - S_j''\right]$ 是 $P_{2k+1-p_{jt}^{odd}}$-禁止的。对于 $t = j$，由断言 2.4 (i)，$G\left[S_j'', S_j - S_j''\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。由断言 2.4(i)，$G\left[S_j''\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。因此，由不等式(2.15)和定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
e\left(S_j'', T_j\right) &\geq \left|S_j''\right| \cdot \left(\frac{n}{2(2l+1)} - 3\right) - \left(\sum_{t=1}^{2l+1} e\left(S_j'', S_t - S_j''\right) + 2e\left(S_j''\right)\right) \\
&> \left|S_j''\right| \cdot \left(\frac{n}{2(2l+1)} - 3\right) - (2l+3)kn \\
&\geq \frac{n^2}{32(2l+1)^3} - \frac{n^2}{64(2l+1)^3} \\
&\geq \frac{n^2}{64(2l+1)^3}
\end{aligned}$$

因为 $\left|S_j''\right| > \frac{n}{8(2l+1)^2} - \frac{k}{2l+1}$ 且 $n > 128k(2l+1)^4$。由引理 2.2，存在一个子图 $L \subseteq G\left[S_j'', T_j\right]$，使得 $\delta(L) > \frac{n}{64(2l+1)^3} > 2k$。那么我们可以贪心地找到 L 中一条两端均在 S_j'' 的阶数为 $2k-1-p_{ij}^{odd}$ 的路 P，使得 $P+\{y, y'\}$ 与 C_{2l+1} 中的奇长弧 $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情况 2. 存在某个 T_j，使得 $d_{T_j}(y) > \frac{n}{8(2l+1)^2} - \frac{k}{2l+1}$。

令 $T_j' = N_{T_j}(y)$，则 $\left|T_j'\right| > \frac{n}{8(2l+1)^2} - \frac{k}{2l+1}$。由于 $\delta(G) > \frac{n}{2(2l+1)}$ 且 $|R| < \frac{n}{4(2l+1)}$，对于任意顶点 $v \in T_j'$，我们有

$$d_{G'-R}(v) \geq \frac{n}{2(2l+1)} - |R| > \frac{n}{4(2l+1)}.$$

那么

$$\begin{aligned}
\left|T_j'\right| \cdot \frac{n}{4(2l+1)} &< \sum_{v \in T_j'} d_{G'-R}(v) \\
&= e\left(S_j, T_j'\right) + \sum_{t \neq j} e\left(T_j', T_t - T_j'\right) + \sum_{t \neq j} e\left(T_j', S_t - S_j\right) \\
&\quad + e\left(T_j', T_j - T_j'\right) + 2e\left(T_j'\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

对于 $t \neq j$，由断言 2.4 (iii)，$G\left[T_j', S_t - S_j\right]$ 是 $P_{2k-p_{jt}^{even}}$-禁止的，且由断言 2.4 (iv)，$G\left[T_j', T_t - T_j'\right]$ 是 $P_{2k-1-p_{jt}^{odd}}$-禁止的。因为 $T_j' = N_{T_j}(y)$，所以 $G\left[T_j'\right]$ 是 P_{2k}-禁止的。那么由不等式(2.16)，定理 2.1 以及 $n > 128k(2l+1)^4$，我们有

$$\begin{aligned}
& e\left(S_j, T_j'\right) + e\left(T_j', T_j - T_j'\right) \\
&> \left|T_j'\right| \cdot \frac{n}{4(2l+1)} - \left(\sum_{t \neq j} e\left(T_j', T_t - T_j'\right) + \sum_{t \neq j} e\left(T_j', S_t - S_j\right) + 2e\left(T_j'\right)\right) \\
&> \frac{n^2}{32(2l+1)^3} - \frac{kn}{4(2l+1)^2} - (4l+2)kn \\
&\geq \frac{n^2}{64(2l+1)^3}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

根据平均值原理，要么 $e\left(S_j,T_j'\right)>\dfrac{n^2}{128\left(2l+1\right)^3}$，要么 $e\left(T_j',T_j-T_j'\right)>\dfrac{n^2}{128\left(2l+1\right)^3}$。

情况 2.1. $e\left(S_j,T_j'\right)>\dfrac{n^2}{128\left(2l+1\right)^3}$。

由引理 2.2，存在一个子图 $M\subseteq G\left[S_j,T_j'\right]$，使得 $\delta(M)>\dfrac{n}{128\left(2l+1\right)^3}>2k$。如果 $j\neq i$，那么我们可以贪心地找到 M 中一条避开 y'、阶数为 $2k-1-p_{ij}^{even}$ 的路 P，其一端在 S_j 中与 y' 不同的顶点，另一端在 T_j' 中，使得 $P+\{y,y'\}$ 与 C_{2l+1} 中的偶长弧 $v_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。如果 $j=i$，那么我们可以贪心地找到 M 中一条避开 y'、阶数为 $2k-2$ 的路 P，其一端在 S_i 中与 y' 不同的顶点，另一端在 T_i' 中，使得 $P+\{y,y',v_i\}$ 形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情况 2.2. $e\left(T_j',T_j-T_j'\right)>\dfrac{n^2}{128\left(2l+1\right)^3}$。

由引理 2.2，存在一个子图 $G\left[T_j'',Q_j\right]\subseteq G\left[T_j',T_j-T_j'\right]$，使得 $\delta\left(G\left[T_j'',Q_j\right]\right)>\dfrac{n}{128\left(2l+1\right)^3}$，其中 $T_j''\subseteq T_j'$ 且 $Q_j\subseteq T_j-T_j'$。

情况 2.2.1. $N_{S_j}\left(T_j''\right)=\{y'\}$。

由于 $\delta\left(G\left[T_j'',Q_j\right]\right)>\dfrac{n}{128\left(2l+1\right)^3}>2k$，我们可以贪心地找到 $G\left[T_j'',Q_j\right]$ 中一条两端均在 T_j'' 的阶数为 $2k-1$ 的路 P，使得 $P+\{y,y'\}$ 形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情况 2.2.2. 存在一个顶点 $x'\in S_j\left(x'\neq y'\right)$ 使得 $x'\in N_{S_j}\left(T_j''\right)$。

由于 $x'\in N_{S_j}\left(T_j''\right)$，存在一个顶点 $x\in T_j''$ 使得 $xx'\in E\left(G\right)$。如果 $j\neq i$，由于 $\delta\left(G\left[T_j'',Q_j\right]\right)>\dfrac{n}{128\left(2l+1\right)^3}>2k$，我们可以贪心地找到 $G\left[T_j'',Q_j\right]$ 中一条阶数为 $2k-2-p_{ij}^{even}$ 的路 P，其一端为 $x\in T_j''$，另一端在 T_j'' 中，使得 $P+\{y,y',x'\}$ 与 C_{2l+1} 中的偶长弧 $v_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。如果 $j=i$，我们可以贪心地找到 $G\left[T_i'',Q_i\right]$ 中一条阶数为 $2k-3$ 的路 P，其一端为 $x\in T_j''$，另一端在 T_j'' 中，使得 $P+\{y,y',v_i,x'\}$ 形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。断言 2.7 证毕。

断言 2.8 对于 $i\neq j\in\left[2l+1\right]$，我们有

(i) $S_i\cap S_j=\varnothing$ 且 $T_i\cap T_j=\varnothing$；

(ii) $E\left(G\left[S_i\right]\right)=\varnothing$ 且 $E\left(G\left[T_i\right]\right)=\varnothing$；

(iii) $E\left(G\left[S_i,S_j\right]\right)=\varnothing$，$E\left(G\left[T_i,T_j\right]\right)=\varnothing$ 且 $E\left(G\left[S_i,T_j\right]\right)=\varnothing$。

断言 2.8 的证明：(i) 反证法，假设存在一个顶点 $x\in S_i\cap S_j$。由断言 2.7，$G\left[S_i,T_i\right]$ 的最小度至少为 $2k$，那么我们可以贪心地找到 $G\left[S_i,T_i\right]$ 中一条一端为 x、另一端在 S_i 的阶数为 $2k+1-p_{ij}^{odd}$ 的路 P，使得 P 与 C_{2l+1} 中的奇长弧 $v_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。类似地，如果存在一个顶点 $y\in T_i\cap T_j$，由于 $y\in T_j$，存在一个顶点 $y'\in S_j$，使得 $yy'\in E\left(G\right)$。由断言 2.7，我们可以贪心地找到 $G\left[S_i,T_i\right]$ 中一条一端为 y、另一端在 S_i 的阶数为 $2k-p_{ij}^{odd}$ 的路 P，使得 $P+\{y'\}$ 与 C_{2l+1} 中的奇长弧 $v_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

(ii) 反证法，假设存在一条边 $x_1y_1\in E\left(G\left[S_i\right]\right)$。由断言 2.7，$G\left[S_i,T_i\right]$ 的最小度至少为 $2k$，那么我们可以贪心地找到 $G\left[S_i,T_i\right]$ 中一条避开 x_1、一端为 y_1、另一端在 S_i 的阶数为 $2k-1$ 的路 P，使得 $P+\{x_1,v_i\}$ 形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。类似地，如果存在一条边 $x_2y_2\in E\left(G\left[T_i\right]\right)$，由于 $x_2\in T_i$，存在一个顶点 $x_2'\in S_i$，使得 $x_2x_2'\in E\left(G\right)$。由断言 2.7，我们可以贪心地找到 $G\left[S_i,T_i\right]$ 中一条避开 x_2 和 x_2'、一端为

$y_2 \in T_i$、另一端在 S_i 的阶数为 $2k-2$ 的路 P，使得 $P+\{x_2, x_2', v_i\}$ 形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

(iii) 反证法，假设存在一条边 $xy \in E\left(G\left[S_i, S_j\right]\right)$，其中 $x \in S_i$ 且 $y \in S_j$。由断言 2.7，那么我们可以贪心地找到 $G[S_i, T_i]$ 中一条一端为 x、另一端在 S_i 的阶数为 $2k-p_{ij}^{even}$ 的路 P，使得 $P+\{y\}$ 与 C_{2l+1} 中的偶长弧 $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。类似地，如果存在一条边 $pq \in E\left(G\left[T_i, T_j\right]\right)$，其中 $p \in T_i$ 且 $q \in T_j$，那么存在一个顶点 $p' \in S_i$，使得 $pp' \in E(G)$。由断言 2.7，我们可以贪心地找到 $G\left[S_j, T_j\right]$ 中一条一端为 $q \in T_j$、另一端在 S_j 的阶数为 $2k-1-p_{ij}^{even}$ 的路 P，使得 $P+\{p, p'\}$ 与 C_{2l+1} 中的偶长弧 $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。类似地，如果存在一条边 $st \in E\left(G\left[S_i, T_j\right]\right)$，其中 $s \in S_i$ 且 $t \in T_j$，那么存在一个顶点 $t' \in S_j$，使得 $tt' \in E(G)$。由断言 2.7，我们可以贪心地找到 $G[S_i, T_i]$ 中一条一端为 s、另一端在 S_i 的阶数为 $2k-1-p_{ij}^{odd}$ 的路 P，使得 $P+\{t, t'\}$ 与 C_{2l+1} 中的奇长弧 $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ 一起形成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。断言 2.8 证毕。

我们继续定理 1.6 的证明。由断言 2.8，对于每个顶点 $v \in S_i$，有 $d_{T_i}(v) = d(v) - d_Z(v) \geq \delta(G) - 1$。由于 $\delta(G) \geq \dfrac{n}{2(2l+1)} + 1$，那么 $|T_i| \geq \dfrac{n}{2(2l+1)}$。此外，由断言 2.8 和 $\delta(G) \geq \dfrac{n}{2(2l+1)} + 1$，对于 $i \in [2l+1]$，有 $|S_i| \geq \dfrac{n}{2(2l+1)} - 1$。因此

$$
\begin{aligned}
|S| + |T| + |Z| &= \sum_{i=1}^{2l+1} |S_i| + \sum_{i=1}^{2l+1} |T_i| + 2l + 1 \\
&\geq (2l+1)\left(\frac{n}{2(2l+1)} - 1\right) + (2l+1) \cdot \frac{n}{2(2l+1)} + 2l + 1 \\
&\geq n.
\end{aligned}
$$

因此 $R = \varnothing$，对于每个 $i \in [2l+1]$，有 $|S_i| = \dfrac{n}{2(2l+1)} - 1$ 且 $|T_i| = \dfrac{n}{2(2l+1)}$。另一方面，由断言 2.8，对于每个顶点 $v \in T_i$，有 $d_{S_i}(v) = d(v) \geq \delta(G) \geq \dfrac{n}{2(2l+1)} + 1$，但是 $|S_i| = \dfrac{n}{2(2l+1)} - 1$，矛盾。因此我们证明了如果 $\delta(G) > \dfrac{n}{2(2l+1)}$，则 G 包含一个 C_{2k+1}。

3. 结语

本文主要通过对极图结构的构造，从而得出了关于具有较大最小度的图中连续奇数圈长的区间的结论。对于条件中 n 的范围的优化仍需要后续进一步研究。

参考文献

[1] Turán, P. (1941) Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48**, 436-452.

[2] Erdős, P. (1968) On Some New Inequalities Concerning Extremal Properties of Graphs. In: Erdős, P. and Katona, G., Eds., *Theory of Graphs*, Academic Press, 77-81.

[3] Simonovits, M. (1974) Extremal Graph Problems with Symmetrical Extremal Graphs. Additional Chromatic Conditions. *Discrete Mathematics*, **7**, 349-376. https://doi.org/10.1016/0012-365x(74)90044-2

[4] Andrásfai, B., Erdös, P. and Sós, V.T. (1974) On the Connection between Chromatic Number, Maximal Clique and Minimal Degree of a Graph. *Discrete Mathematics*, **8**, 205-218. https://doi.org/10.1016/0012-365x(74)90133-2

[5] Balister, P., Bollobás, B., Riordan, O. and Schelp, R.H. (2003) Graphs with Large Maximum Degree Containing No Odd Cycles of a Given Length. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **87**, 366-373. https://doi.org/10.1016/s0095-8956(02)00024-2

[6] Brandt, S., Faudree, R. and Goddard, W. (1998) Weakly Pancyclic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **27**, 141-176.

https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0118(199803)27:3<141::aid-jgt3>3.0.co;2-o

[7] Erdős, P., Faudree, R.J., Gyárfás, A. and Schelp, R.H. (1991) Odd Cycles in Graphs of Given Minimum Degree. In: Kalamazoo, M.I., Ed., *Graph Theory*, *Combinatorics*, *and Applications*, Vol. 1, Wiley, 407-418.

[8] Häggkvist, R. (1982) ODD Cycles of Specified Length in Non-Bipartite Graphs. In: *North-Holland Mathematics Studies*, Elsevier, 89-99. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)73552-7

[9] Letzter, S. and Snyder, R. (2018) The Homomorphism Threshold of {C3, C5}-Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **90**, 83-106. https://doi.org/10.1002/jgt.22369

[10] Nikiforov, V. and Schelp, R.H. (2004) Cycles and Paths in Graphs with Large Minimal Degree. *Journal of Graph Theory*, **47**, 39-52. https://doi.org/10.1002/jgt.20015

[11] Sankar, M. (2022) Homotopy and the Homomorphism Threshold of Odd Cycles.

[12] Yuan, X. and Peng, Y. (2024) Minimum Degree Stability of C_{2k+1}-Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **106**, 307-321. https://doi.org/10.1002/jgt.23086

[13] Győri, E., Nikiforov, V. and Schelp, R.H. (2003) Nearly Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **272**, 187-196. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(03)00076-1

[14] Erdős, P. and Gallai, T. (1959) On Maximal Paths and Circuits of Graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10**, 337-356. https://doi.org/10.1007/bf02024498