

具有热力相容性的广义Jeffreys模型

李华芳^{1,2}

¹吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

²铜仁学院大数据学院, 贵州 铜仁

收稿日期: 2026年2月11日; 录用日期: 2026年3月4日; 发布日期: 2026年3月12日

摘要

分数阶流变本构方程因其在刻画复杂黏弹性流体行为方面的优势而受到广泛关注。然而, 现有相关研究多侧重于本构关系的数学推广, 对模型所对应的力学结构及其热力学相容性缺乏系统分析, 物理合理性有待进一步解释。基于经典Jeffreys模型, 本文从力学结构的角度出发, 构建了一种修正的五参数Jeffreys本构方程。进一步对该模型的热力学相容性进行了系统研究, 给出了满足热力学第二定律的充分条件, 验证了模型的物理合理性。这项研究为黏弹性本构方程的构建提供了有价值的理论参考。

关键词

广义Jeffreys模型, 热力相容性, 力学结构, 松弛函数

A Generalized Jeffreys Model with Thermodynamic Compatibility

Huafang Li^{1,2}

¹School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

²School of Data Science, Tongren University, Tongren Guizhou

Received: February 11, 2026; accepted: March 4, 2026; published: March 12, 2026

Abstract

Fractional rheological constitutive equations have attracted considerable attention due to their ability to describe complex viscoelastic fluid behaviors. However, most existing studies primarily focus on the mathematical generalization of constitutive relations, while the corresponding mechanical analogues and thermodynamic compatibility have not been systematically examined, leaving the physical rationality of such models insufficiently clarified. Based on the classical Jeffreys model, a modified five-parameter Jeffreys constitutive equation is constructed from the

文章引用: 李华芳. 具有热力相容性的广义 Jeffreys 模型[J]. 应用数学进展, 2026, 15(3): 266-272.

DOI: 10.12677/aam.2026.153104

perspective of mechanical modelling. Furthermore, the thermodynamic compatibility of the proposed model is systematically investigated, and sufficient conditions ensuring compliance with the second law of thermodynamics are established, thereby verifying its physical admissibility. This study provides valuable theoretical insight into the construction of viscoelastic constitutive models.

Keywords

Generalized Jeffreys Model, Thermodynamic Compatibility, Mechanical Analogue, Relaxation Function

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

黏弹性流体作为非牛顿流体的一个子类,在化妆品、乳制品、涂料、聚合物熔体和溶液、纸浆、生物流体等各个行业都有广泛的应用[1]。其流变行为通常表现出显著的记忆效应和非指数型松弛特征。经典黏弹性模型,如 Maxwell 模型、Kelvin-Voigt 模型及 Zener 模型,虽然在一定程度上能够描述材料的应力-应变关系,但其整数阶微分形式在刻画长记忆效应和幂律衰减行为方面仍存在明显局限。分数阶微积分因其核为幂律形式,被广泛引入流变本构关系的建模中,为描述复杂黏弹性流体的动力学行为提供了更为灵活的数学工具。Song 和 Jiang [2] [3]建立了分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Jeffreys 模型,并通过树胶材料的动弹性模量实验对模型进行了验证,结果表明理论预测与实验测量具有良好的一致性。Glockle 和 Nonnenmacher [4]采用分数阶迟滞函数对一类特殊的非马尔可夫过程进行了刻画。Koner [5]等人将分数阶 Jeffrey 本构方程应用于时间周期电渗透流,以检验离子分配对溶质输运现象的影响。Liu 等人[6]构建了一种广义分布阶数的本构关系,以深入研究黏弹性流体的流动、热传递和质量传递机制。Mao 等人[7]利用双参数分数阶麦克斯韦本构关系推导出了分数阶积分微分控制方程,以研究在牛顿加热和热辐射条件下黏弹性纳米流体的瞬态自由对流流动情况。

分数阶模型在描述应力松弛、蠕变响应等黏弹性响应方面相较于经典整数阶模型具有明显优势。然而,许多分数阶本构关系往往是通过将经典模型中的时间导数替换为分数阶导数而直接推广得到的,而对其背后所隐含的力学结构及热力学相容性关注不足。事实上,在现代连续介质力学与非平衡热力学框架下,一个本构方程要具有物理可接受性,不仅需要满足热力学第二定律所要求的非负耗散条件,还应与自由能函数的合理构造、材料客观性保持一致。对于具有记忆效应的复杂流体而言,热力学相容性还意味着模型必须能够在任意加载历史下避免非物理预测(如负耗散或能量自发产生)。Bagley 和 Torvik [8]对分数阶 Zener 模型的热力学一致性进行了讨论。Friedrich [9]对分数阶 Maxwell 模型的热力学相容性进行了分析。针对广义 Jeffreys 流体, Song 和 Jiang [3]给出了满足热力学相容性的参数约束条件,随后 Yang 和 Zhu [10]指出其中存在不足,并提出了修正后的热力学相容性条件。Feng 团队[11]提出了一个符合热力学相容性的分数阶 Kelvin-Voigt 本构关系来推导纳米流体的热边界层方程。

基于上述背景,本文旨在构建一种修正的五参数广义 Jeffreys 本构方程。该模型在保持明确物理背景的同时,满足热力学第二定律所要求的相容性条件。

2. 力学元件与经典 Jeffreys 模型

2.1. 基本力学元件

黏弹性模型通常可以通过理想化的力学元件来描述, 其中最基本的元件包括弹簧和阻尼器。弹簧用于表征材料的弹性响应, 如图 1(a)所示。其应力应变之间满足胡克定律, 即

$$\sigma(t) = m\varepsilon(t), \quad (1)$$

其中 $\sigma(t)$ 表示应力, $\varepsilon(t)$ 表示应变, m 为弹性模量。阻尼器用于刻画材料的黏性行为, 如图 1(b)所示。其本构关系为

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t), \quad (2)$$

其中 η 表示黏度系数。通过弹簧和阻尼器的层级排列(如梯子、树枝和分形网络), 可以得到一种分数阶力学元件(又称 Scott-Blair 元件) [12], 如图 1(c)所示。该元件的本构关系可表示为

$$\sigma(t) = E\tau^\gamma D_t^\gamma \varepsilon(t), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (3)$$

其中 D_t^γ 表示 Riemann-Liouville 分数阶导数, 定义为[13]

$$D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1+\gamma-n}}. \quad (4)$$

当 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1$ 时, 该元件退化为弹簧和阻尼器。

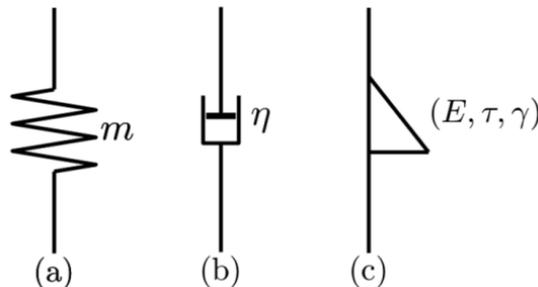


Figure 1. Mechanical elements: (a) spring, (b) dashpot, (c) fractional element
图 1. 力学元件(a) 弹簧, (b) 阻尼器, (c) 分数元件

2.2. 经典 Jeffreys 模型

经典 Jeffreys 模型是描述黏弹性流体的重要本构模型之一, 其力学结构通常由一个阻尼器 $\sigma_1(t) = \eta_1\dot{\varepsilon}_1(t)$ 与一个 Maxwell 元件并联而成, 如图 2 所示。其中, Maxwell 元件由弹簧和阻尼器串联而成。串联结构中各元件应力相同, 而总应变为各分应变之和。对于 Maxwell 元件有

$$\sigma_2(t) + \frac{\eta_2}{m} \dot{\sigma}_2(t) = \eta_2 \dot{\varepsilon}_2(t). \quad (5)$$

由于并联结构中各元件的应变相同, 而总应力为各分应力之和, 可得

$$\sigma(t) + \frac{\eta_2}{m} \dot{\sigma}(t) = (\eta_1 + \eta_2) \left[\dot{\varepsilon}(t) + \frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2) m} \frac{d\dot{\varepsilon}(t)}{dt} \right], \quad (6)$$

改写这个等式可以得到经典 Jeffreys 模型

$$\sigma(t) + \tau_1 \dot{\sigma}(t) = \eta_0 \left[\dot{\varepsilon}(t) + \tau_2 \frac{d\dot{\varepsilon}(t)}{dt} \right], \quad (7)$$

其中 $\tau_1 = \frac{\eta_2}{m}$, $\eta_0 = \eta_1 + \eta_2$, $\tau_2 = \frac{\eta_1 \tau_1}{\eta_0}$ 。

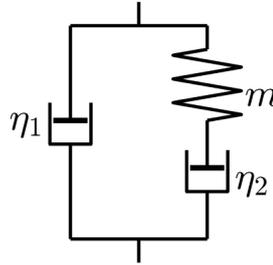


Figure 2. Mechanical structure of the classic Jeffreys model
图 2. 经典 Jeffreys 模型的力学结构

3. 修正的五参数 Jeffreys 模型

经典 Jeffreys 模型能够在一定程度上描述黏弹性流体的松弛行为,但由于其采用整数阶导数形式,对复杂材料中普遍存在的长记忆效应和幂律松弛特征的刻画仍显不足。为此,本节在经典 Jeffreys 模型基础上,引入分数阶元件,对其本构方程进行推广。

具体而言,用两个分数元件 (E_1, λ_1, α) 和 (E_2, λ_2, β) 分别替换 Maxwell 元件中的弹簧和阻尼器,同时保留并联阻尼器 (E_3, λ_3) 。该修正后的力学模型由一个阻尼器与两个分数元件串联形成的广义 Maxwell 元件并联构成,其力学结构示意图如图 3 所示。对应的应力 - 应变关系为:

$$\sigma_1(t) = E_3 \lambda_3 \frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad (8)$$

$$(E_1 \lambda_1^\alpha D_t^\alpha + E_2 \lambda_2^\beta D_t^\beta) \sigma_2(t) = E_1 E_2 \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta D_t^{\alpha+\beta} \varepsilon_2(t). \quad (9)$$

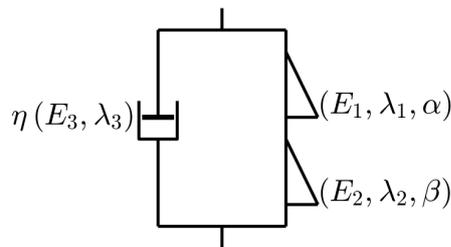


Figure 3. Mechanical structure of the modified five-parameter Jeffreys model
图 3. 修正的五参数 Jeffreys 模型的力学结构

在并联结构下,阻尼器和广义 Maxwell 元件的应力满足 $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = \sigma(t)$, 应变满足 $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon(t)$ 。因此,可以推导出修正 Jeffreys 的本构方程

$$D_t^\alpha \sigma(t) + \frac{E_2 \lambda_2^\beta}{E_1 \lambda_1^\alpha} D_t^\beta \sigma(t) = E_2 \lambda_2^\beta D_t^{\alpha+\beta} \varepsilon(t) + E_3 \lambda_3 D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) + \frac{E_2 \lambda_2^\beta E_3 \lambda_3}{E_1 \lambda_1^\alpha} D_t^{\beta+1} \varepsilon(t). \quad (10)$$

在不失一般性的前提下,设 $\alpha + \beta > 1$ 。令 $\theta_1 = (E_2 \lambda_2^\beta / E_1 \lambda_1^\alpha)^{1/(\beta-\alpha)}$ 可得

$$D_t^\alpha \sigma(t) + \theta_1^{\beta-\alpha} D_t^\beta \sigma(t) = (E_2 \lambda_2^\beta D_t^{\alpha+\beta-1} + E_3 \lambda_3 D_t^\alpha + E_3 \lambda_3 \theta_1^{\beta-\alpha} D_t^\beta) \dot{\varepsilon}(t). \quad (11)$$

对式(11)两边乘 θ_1^α 可得

$$\theta_1^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) + \theta_1^\beta D_t^\beta \sigma(t) = (E_2 \lambda_2^\beta \theta_1^\alpha D_t^{\alpha+\beta-1} + E_3 \lambda_3 \theta_1^\alpha D_t^\alpha + E_3 \lambda_3 \theta_1^\beta D_t^\beta) \dot{\varepsilon}(t). \quad (12)$$

令 $\eta = E_3 \lambda_3$, $\theta_2 = (E_2 \lambda_2^\beta \theta_1^\alpha / \eta)^{1/(\alpha+\beta-1)}$ 可进一步简化为

$$\theta_1^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) + \theta_1^\beta D_t^\beta \sigma(t) = \eta (\theta_2^{\alpha+\beta-1} D_t^{\alpha+\beta-1} + \theta_1^\alpha D_t^\alpha + \theta_1^\beta D_t^\beta) \dot{\varepsilon}(t). \quad (13)$$

式(13)包含五个参数, 即 θ_1, θ_2, η 以及 α 和 β , 因此称之为修正的五参数 Jeffreys 模型。当 $\alpha = \beta = 1$ 时, 式(13)退化为经典 Jeffreys 本构方程。与经典 Jeffreys 模型相比, 该模型通过引入两个独立的分数阶阶次, 能够更灵活地描述不同时间尺度下的松弛行为, 从而能够自然描述材料中普遍存在的长程记忆效应。

4. 热力学相容性

对于所建立的流变本构方程(13), 我们分析了模型的热力学行为。由于热力学第二定律对物理上可实现的过程施加了限制, 因此有必要考虑给定流变本构方程的热力学相容性。

在零初始条件假设下, 对式(13)作 Laplace 变换, 可得

$$(\theta_1^\alpha s^\alpha + \theta_1^\beta s^\beta) \hat{\sigma}(s) = \eta (\theta_2^{\alpha+\beta-1} s^{\alpha+\beta-1} + \theta_1^\alpha s^\alpha + \theta_1^\beta s^\beta) s \hat{\varepsilon}(s). \quad (14)$$

取 $\varepsilon(t) = H(t)$, 则它的 Laplace 变换为 $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{s}$, 代入上式可得松弛函数在 Laplace 域中的表达式

$$\hat{G}(s) = \eta \frac{(\theta_2^{\alpha+\beta-1} s^{\alpha+\beta-1} + \theta_1^\alpha s^\alpha + \theta_1^\beta s^\beta)}{\theta_1^\alpha s^\alpha + \theta_1^\beta s^\beta} = \eta \frac{(\theta_1^{-\alpha} \theta_2^{\alpha+\beta-1} s^{\beta-1} + 1 + \theta_1^{\beta-\alpha} s^{\beta-\alpha})}{1 + \theta_1^{\beta-\alpha} s^{\beta-\alpha}}. \quad (15)$$

利用 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 逆变换公式

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ct^\alpha)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ct^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{c+s^\alpha}, \quad (16)$$

可得松弛函数的表达式

$$G(t) = \frac{\eta}{\theta_2} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^\beta \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{-\alpha} E_{\beta-\alpha, 1-\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\beta-\alpha}\right) + \eta \delta(t), \quad (17)$$

其中 $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ 为 Mittag-Leffler 函数, $\delta(t)$ 表示脉冲函数。

根据 Mittag-Leffler 函数的渐进性质, 当 $z \rightarrow \infty$ 且 $\beta \neq \alpha$ 时, 有

$$E_{\alpha,\beta}(-z) \propto \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} z^{-1}. \quad (18)$$

由此可分析松弛函数在不同时间尺度下的行为。

当 $0 < t \ll \theta_1$ 时, $(t/\theta_1)^{\beta-\alpha}$ 趋于零, 利用 Mittag-Leffler 函数在小参数区间内的级数展开, 有

$$G(t) \cong \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)\theta_2} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^\beta \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{-\alpha}. \quad (19)$$

另一方面, 当 $t \gg \theta_1$ 时, 利用 Mittag-Leffler 函数在大参数区间内的渐进展开, 可得

$$G(t) \cong \frac{\eta}{\Gamma(1-\beta)\theta_2} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{-\beta}. \quad (20)$$

根据热力学第二定律，材料的机械能耗散率满足

$$\delta_m = \Phi - \rho \dot{f} \geq 0, \quad (21)$$

其中 Φ 为应力功率， ρ 为密度， \dot{f} 为单位质量自由能的变化率。在阶跃松弛实验中，施加的应变被突然移除，此时 $\Phi = 0$ 。在此条件下，耗散不等式简化为

$$\delta_m = -\rho \dot{f} \geq 0, \quad (22)$$

这意味着 $\dot{f} \leq 0$ 。这表明松弛过程与应变突变期间储存的自由能释放相关联。因此，松弛本质上是储存自由能的释放过程，通过非负耗散条件与热力学第二定律保持一致。这一解释确认了阶跃应变后的松弛是一个自发过程，能量从高状态流向低状态，符合熵产生原理。因此，松弛函数 $G(t)$ 必须是正的、单调递减且渐进趋于零的函数。这些性质确保了松弛过程引起的能量耗散满足热力学第二定律。因此，在不失一般性的前提 $\alpha + \beta > 1$ 下，松弛函数 $G(t)$ 呈现幂律衰减形式，并在 $t \rightarrow \infty$ 时渐进趋于零，表明式(13)建立的广义本构方程符合热力学原理。

5. 结束

本文构建了一个修正的五参数 Jeffreys 模型，利用 Laplace 变换及 Mittag-Leffler 函数的渐进性质，对模型的松弛函数进行分析。结果表明，在合理的参数范围 $0 < \alpha, \beta < 1$ 且 $\alpha + \beta > 1$ 内，松弛函数在整个时间区间内保持非负性，并随时间呈幂律形式单调衰减，在长时间极限下渐进趋于零。与经典的 Jeffreys 模型相比，修正的五参数 Jeffreys 模型提供了一个更具灵活性且在物理上更具意义的框架，能够捕捉长记忆效应、幂律弛豫以及黏弹性响应。因此，所提出的修正五参数 Jeffreys 模型不仅在数学结构上是自洽的，而且在物理层面满足热力学约束，为其在黏弹性材料及复杂流体建模中的应用提供了可靠的理论依据。

参考文献

- [1] Chhabra, R.P. (2010) Non-Newtonian Fluids: An Introduction. In: Krishnan, J.M., *et al.*, Eds., *Rheology of Complex Fluids*, Springer, 3-34. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6494-6_1
- [2] Song, D.Y. and Jiang, T.Q. (1998) Study on the Constitutive Equation with Fractional Derivative for the Viscoelastic Fluids—Modified Jeffreys Model and Its Application. *Rheologica Acta*, **37**, 512-517. <https://doi.org/10.1007/s003970050138>
- [3] Song, D., Song, X., Jiang T., *et al.* (2000) Study of Rheological Characterization of Fenugreek Gum with Modified Maxwell Model. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, **8**, 85-88.
- [4] Glöckle, W.G. and Nonnenmacher, T.F. (1994) Fractional Relaxation and the Time-Temperature Superposition Principle. *Rheologica Acta*, **33**, 337-343. <https://doi.org/10.1007/bf00366960>
- [5] Koner, P., Bera, S. and Ohshima, H. (2022) Effect of Ion Partitioning on an Oscillatory Electro-Osmotic Flow on Solute Transport Process of Fractional Jeffrey Fluid through Polyelectrolyte-Coated Nanopore with Reversible Wall Reaction. *Physics of Fluids*, **34**, Article ID: 062016. <https://doi.org/10.1063/5.0088351>
- [6] Liu, L., Chen, S., Feng, L., Zhu, J., Zhang, J., Zheng, L., *et al.* (2023) A Novel Distributed Order Time Fractional Model for Heat Conduction, Anomalous Diffusion, and Viscoelastic Flow Problems. *Computers & Fluids*, **265**, Article ID: 105991. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.105991>
- [7] Mao, Z., Feng, L., Turner, I., Xiao, A. and Liu, F. (2025) Transient Free Convective Flow of Viscoelastic Nanofluids Governed by Fractional Integro-differential Equations under Newtonian Heating and Thermal Radiation. *Chinese Journal of Physics*, **93**, 584-600. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2024.12.025>
- [8] Bagley, R.L. and Torvik, P.J. (1986) On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior. *Journal of Rheology*, **30**, 133-155. <https://doi.org/10.1122/1.549887>
- [9] Friedrich, C. (1991) Relaxation and Retardation Functions of the Maxwell Model with Fractional Derivatives.

- Rheologica Acta*, **30**, 151-158. <https://doi.org/10.1007/bf01134604>
- [10] Yang, P. and Zhu, K. (2011) Thermodynamic Compatibility and Mechanical Analogue of the Generalized Jeffreys and Generalized Oldroyd-B Fluids with Fractional Derivatives. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, **54**, 737-742. <https://doi.org/10.1007/s11433-011-4271-7>
- [11] Feng, L., Liu, F., Turner, I. and Van Anh, V. (2024) Magnetohydrodynamics Flow and Heat Transfer of Novel Generalized Kelvin-Voigt Viscoelastic Nanofluids over a Moving Plate. *Physics of Fluids*, **36**, 2024. <https://doi.org/10.1063/5.0213855>
- [12] Schiessel, H., Friedrich, C. and Blumen, A. (2000) Applications to Problems in Polymer Physics and Rheology. In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 331-376. https://doi.org/10.1142/9789812817747_0007
- [13] Jin, B. (2021) Fractional Differential Equations. Springer International Publishing, 19-58.