

基于不确定Stein-Stein-CIR模型的欧式看涨期权定价研究

单晓杰, 周少玲*

河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月9日

摘要

基于不确定理论, 本文建立了不确定Stein-Stein-CIR模型, 并研究了欧式看涨期权的定价问题。首先, 通过引入Liu过程以描述股票价格动态变化, 并结合Peng-Yao模型刻画波动率特征; 同时, 将利率过程视为不确定CIR过程, 从而建立了一个新的不确定股票模型——不确定Stein-Stein-CIR模型。然后, 在此基础上, 运用不确定微分方程理论, 推导出该模型欧式看涨期权的定价公式及数值算法。最后, 基于真实市场数据, 采用复合Heun方法进行参数估计, 并通过假设检验验证估计的合理性。结果表明, 不确定Stein-Stein-CIR模型能够准确地反映金融市场, 并对欧式看涨期权进行合理的定价。

关键词

不确定理论, Stein-Stein-CIR模型, 复合Heun方法, 欧式看涨期权

Research on European Call Option Pricing Based on the Uncertain Stein-Stein-CIR Model

Xiaojie Shan, Shaoling Zhou*

School of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 9, 2026

Abstract

Based on uncertainty theory, this paper establishes an uncertain Stein-Stein-CIR model and investigates

*通讯作者。

文章引用: 单晓杰, 周少玲. 基于不确定 Stein-Stein-CIR 模型的欧式看涨期权定价研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 232-245. DOI: 10.12677/aam.2026.154153

the pricing problem of European call options. Firstly, the Liu process is introduced to describe the dynamic changes in stock prices, while the Peng-Yao model is used to characterize volatility characteristics. In addition, the interest rate process is considered as an uncertain CIR process, thereby establishing a new uncertain stock model—the uncertain Stein-Stein-CIR model. Secondly, on this basis, using the theory of uncertain differential equations, the pricing formula and numerical algorithm for European call options under this model are derived. Finally, based on real-world market data, the composite Heun method is used for parameter estimation, and the reasonableness of the estimates are tested through hypothesis testing. The results indicate that the uncertain Stein-Stein-CIR model can more accurately reflect the financial market and can reasonably price European call options.

Keywords

Uncertainty Theory, Stein-Stein-CIR Model, Composite Heun Method, European Call Option

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在金融市场领域, 金融衍生品是实现风险对冲与资产保值的重要工具。期权作为金融衍生品的核心类型, 赋予持有者在约定到期日买入或卖出标的资产的权利, 而无须承担相应义务。1973年, Black 与 Scholes [1] 提出 B-S 期权定价模型之后, 期权定价问题逐渐成为金融工程领域的核心研究内容之一, 相关研究成果推动了全球股票期权市场的发展。该模型假定标的资产价格遵循对数正态分布, 并借助概率论进行推导。然而, 大量实证研究结果表明, 金融市场的波动呈现出显著的非平稳特性, 传统概率模型因此难以精准刻画真实的市场行为。

行为金融学的发展促使研究者更加关注投资者主观信念对决策的作用。为更有效地研究主观信度, Liu [2] 引入不确定理论对欧式期权予以定价。Peng 和 Yao [3] 在此基础上构建不确定均值回归模型, 用以刻画价格的均值回复特征, 并推导出相应的欧式和美式期权定价公式。Li 和 Peng [4] 将波动率视作受 Liu 过程驱动的不确定过程, 提出了不确定 Stein-Stein 模型, 该模型更契合持续性波动的实际情况。同时, Wang 和 Chen [5] 将利率过程假定为 CIR 模型的不确定对应物, 使利率兼具非负性与均值回复特性。

另外, 鉴于不确定微分方程的金融模型中存在诸多未知参数, 因此参数估计成为实际应用中的关键环节。Li [6] 与 Sheng 等人 [7] 分别基于不确定性分布和最小噪声原理采用最小二乘法估计不确定微分方程中的参数, Yao 与 Liu [8] 建立了矩估计法; 在此基础上, Liu [9] 将广义矩估计法引入不确定微分方程的参数估计中, 构建了适用于不确定微分方程的广义矩估计法。此外, Yang 等人 [10] 采用 α -轨道法估计不确定微分方程中的未知参数, 通过最小化置信区间宽度来优化参数选择。Zhou [11] 等人基于复合 Heun 方法提高了矩估计的精度。

在上述研究的基础上, 本文将不确定 CIR 利率过程与不确定 Stein-Stein 波动率过程相结合, 构建出一个全新的股票价格模型。基于不确定微分方程, 推导出欧式看涨期权的定价公式, 并分析了不同参数对期权价格的影响。同时, 基于金融市场中的真实数据, 运用复合 Heun 方法对模型中的参数进行估计, 并检验了参数估计方法的可靠性。研究表明, 该模型能够更有效地反映不确定利率和波动率的动态变化情况。

2. 预备知识

引理 2.1 [12] 假设不确定变量 ξ 具有正则的不确定分布 Φ , 则 $E(\xi) = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha$ 。

引理 2.2 [13] 假设 X_t 和 X_t^α 分别是不确定微分方程 $dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t$ 的解和 α 轨道, 则 X_t 的不确定逆分布为 $\Phi_s^{-1}(\alpha) = X_s^\alpha$ 。

引理 2.3 [14] 假设 X_t 和 X_t^α 分别是不确定微分方程 $dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t$ 的解和 α 轨道, 对于严格递增(递减)函数 $J(x)$, 上确界过程 $\sup_{0 \leq s \leq t} J(X_s)$ 的 α 轨道为

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \sup_{0 \leq s \leq t} J(X_s^\alpha) \left(\Phi_t^{-1}(\alpha) = \sup_{0 \leq s \leq t} J(X_s^{1-\alpha}) \right)$$

时间积分 $Z_t = \int_0^t J(X_s)ds$ 的 α 轨道为

$$Z_t^\alpha = \int_0^t J(X_s^\alpha)ds \left(Z_t^\alpha = \int_0^t J(X_s^{1-\alpha})ds \right)$$

引理 2.4 [15] 假设 $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$ 是相互独立的不确定过程, 如果多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 关于自变量 x_1, x_2, \dots, x_m 严格单调递增, 关于自变量 $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ 严格单调递减, 则不确定过程 $X_t = f(X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt})$ 的 α 轨道为

$$X_t^\alpha = f(X_{1t}^\alpha, X_{2t}^\alpha, \dots, X_{mt}^\alpha, X_{m+1,t}^{1-\alpha}, \dots, X_{nt}^{1-\alpha})$$

3. 不确定 Stein-Stein-CIR 模型

在金融数学领域, 不确定微分方程自 2009 年起被用于刻画股票价格的动态变化。Liu [2]首次建立了基于不确定理论的股价模型(即 Liu 模型), 具体模型如下

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt \\ dY_t = eY_t dt + \sigma Y_t dC_t \end{cases} \quad (1)$$

其中, X_t 是债券价格, Y_t 是股票价格, r 是无风险利率, e 是漂移率, σ 是扩散率, C_t 为正则 Liu 过程。但是, 该模型仅适用于短期股价预测, 在长期趋势分析中存在一定局限性。

考虑到股票价格通常存在均值波动的特性, Peng 和 Yao [3]提出了不确定均值回归股价模型(即 Peng-Yao 模型)

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt \\ dY_t = (m - aY_t)dt + \sigma dC_t \end{cases} \quad (2)$$

其中 m, a 为给定的正常数。

然而, 无论是 Liu 模型还是 Peng-Yao 模型, 均假设股票扩散率 σ 保持恒定, 这与金融市场实际情况存在一定差异。为更好地刻画长期水平下股票扩散的动态过程, Li 和 Peng [4]等人基于 Peng-Yao 模型, 建立了不确定 Stein-Stein 股价模型

$$\begin{cases} dY_t = rY_t dt + \sigma_t Y_t dC_{1t} \\ d\sigma_t = \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \sigma dC_{2t} \end{cases} \quad (3)$$

其中, σ_t 表示股票价格的波动率, κ 是回复率, θ 是长期平均水平值, σ 是股票价格波动率的波动率, C_{1t}, C_{2t} 是相互独立的正则 Liu 过程。

另外, 考虑到利率在金融市场中同样具有不确定性, 如果将其设定为常数, 有可能会影响期权定价结果的准确性。同时, 为确保利率恒为正数, Wang 和 Chen [5]将利率过程假定为 CIR 模型的不确定对应物。本文在以上研究的基础上, 提出如下的不确定 Stein-Stein-CIR 模型

$$\begin{cases} dY_t = r_t Y_t dt + v_t Y_t dC_{1t} \\ dv_t = \kappa_1 (\theta - v_t) dt + \sigma_1 dC_{2t} \\ dr_t = \kappa_2 (a - r_t) dt + \sigma_2 \sqrt{r_t} dC_{3t} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\kappa_1, \kappa_2, \theta, a, \sigma_1, \sigma_2$ 是正常数, Y_t 是股票价格, r_t 是利率, v_t 表示股票价格的波动率, C_{1t}, C_{2t}, C_{3t} 是相互独立的正则 Liu 过程。由于 κ_2, a, σ_2 是正数, 所以利率 r_t 是非负的。

4. 欧式看涨期权定价

现基于不确定 Stein-Stein-CIR 模型(4), 计算欧式看涨期权。假设欧式看涨期权执行价格为 K , 到期日为 T , 对于期权持有者来说, 欧式看涨期权在到期日 T 的收益是

$$(Y_T - K)^+$$

显然, 收益函数 $(Y_T - K)^+$ 关于股票价格 Y_T 单调不减。考虑到货币的时间价值, 收益的现值为

$$\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+$$

可知贴现因子 $\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right)$ 关于利率过程 r_t 严格单调递减。

设 f_c^e 是欧式看涨期权的价格, 则期权持有者在初始时刻的净收益为

$$-f_c^e + \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+$$

另一方面, 期权出售者在初始时刻的净收益是

$$f_c^e - \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+$$

根据公平价格原则, 得到

$$f_c^e = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+\right] \quad (5)$$

定理 4.1 设不确定 Stein-Stein-CIR 模型(4)的欧式看涨期权的执行价格和到期日分别是 K 和 T , 则欧式看涨期权的价格

$$f_c^e = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha} ds\right)(Y_T^\alpha - K) d\alpha \quad (6)$$

其中

$$Y_T^\alpha = Y_0 \exp\left(\int_0^T r_s^\alpha ds + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\theta + \frac{\sigma_1 \sqrt{3}}{\kappa_1 \pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \left(t + \frac{\exp(-\kappa_1 t) - 1}{\kappa_1}\right)\right) \quad (7)$$

并且 r_t^α 满足下列常微分方程

$$dr_t^\alpha = \kappa_2 (a - r_t^\alpha) dt + \sigma_2 \sqrt{r_t^\alpha} \Phi^{-1}(\alpha) dt$$

证明: 注意到 Y_t 的 α 轨道满足常微分方程

$$dY_t^\alpha = r_t^\alpha Y_t^\alpha dt + Y_t^\alpha v_t^\alpha \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} dt = Y_t^\alpha \left(r_t^\alpha + v_t^\alpha \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) dt$$

求解这个方程, 得到

$$Y_T^\alpha = Y_0 \exp\left(\int_0^T r_s^\alpha ds + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^T v_s^\alpha ds\right)$$

其中 v_t 的 α 轨道 v_t^α 满足

$$dv_t^\alpha = \kappa_1 (\theta - v_t^\alpha) dt + \sigma_1 dC_{2t}$$

求解该方程, 得到

$$v_t^\alpha = \left(\theta + \frac{\sigma_1 \sqrt{3}}{\kappa_1 \pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) (1 - \exp(-\kappa_1 t))$$

因此, 有

$$Y_T^\alpha = Y_0 \exp\left(\int_0^T r_s^\alpha ds + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\theta + \frac{\sigma_1 \sqrt{3}}{\kappa_1 \pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \left(t + \frac{\exp(-\kappa_1 t) - 1}{\kappa_1}\right)\right)$$

由于 r_t 的 α 轨道 r_t^α 满足

$$dr_t^\alpha = \kappa_2 (a - r_t^\alpha) dt + \sigma_2 \sqrt{r_t^\alpha} \phi^{-1}(\alpha) dt$$

那么

$$dr_t^{1-\alpha} = \kappa_2 (a - r_t^{1-\alpha}) dt + \sigma_2 \sqrt{r_t^{1-\alpha}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha} dt$$

根据文献[14]的定理 21, 因为 $(Y_T - K)^+$ 关于 Y_T 单增, 所以其逆不确定分布为

$$\phi_1^{-1}(\alpha) = (Y_T^\alpha - K)^+$$

同理, 根据文献[14]的定理 22, $\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)$ 的逆不确定分布为

$$\phi_2^{-1}(\alpha) = \exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha} ds\right).$$

因此 $\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+$ 的逆不确定分布为

$$\phi_r^{-1}(\alpha) = \exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha} ds\right)(Y_T^\alpha - K)^+$$

综上所述可知

$$f_c^e = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)(Y_T - K)^+\right] = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha} ds\right)(Y_T^\alpha - K)^+ d\alpha$$

因此, f_c^e 定价公式成立。

5. 数值算法

根据定理 4.1, 欧式看涨期权价格 f_c^e 的具体计算方法如下:

步骤 1 选择两个正整数 N 和 M , 记

$$\alpha_i = \frac{i}{N}, \quad t_j = \frac{j \cdot T}{M}, \quad r_{t_0}^{1-\alpha_i} = r_0, \quad v_{t_0}^{\alpha_i} = v_0, \quad v_{t_0}^{\alpha_i} = v_0, \quad Y_{t_0}^{\alpha_i} = Y_0$$

其中, $i=1,2,\dots,N-1$, $j=0,1,\dots,M$ 。

步骤 2 令 $i=0$;

步骤 3 令 $i \leftarrow i+1$;

步骤 4 令 $j=0$;

步骤 5 计算浮动利率

$$r_{t_{j+1}}^{1-\alpha_i} = r_{t_j}^{1-\alpha_i} + \kappa_2 \left(a - r_{t_j}^{1-\alpha_i} \right) \frac{T}{M} + \sigma_2 \sqrt{r_{t_j}^{1-\alpha_i}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \frac{T}{M}$$

并计算

$$v_{t_{j+1}}^{\alpha_i} = v_{t_j}^{\alpha_i} + \kappa_1 \left(\theta - v_{t_j}^{\alpha_i} \right) \frac{T}{M} + \sigma_1 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \frac{T}{M}$$

和

$$Y_{t_{j+1}}^{\alpha_i} = Y_{t_j}^{\alpha_i} + r_{t_j}^{\alpha_i} Y_{t_j}^{\alpha_i} \frac{T}{M} + Y_{t_j}^{\alpha_i} v_{t_j}^{\alpha_i} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \frac{T}{M}$$

步骤 6 令 $j \leftarrow j+1$ 。如果 $j < M$ ，那么返回步骤 5。

步骤 7 计算贴现率

$$\exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha_i} ds\right) \leftarrow \exp\left(-\frac{T}{M} \sum_{j=1}^M r_{t_j}^{1-\alpha_i}\right)$$

步骤 8 计算正向偏差

$$\left(Y_T^{\alpha_i} - K\right)^+ = \max\left(0, Y_T^{\alpha_i} - K\right)$$

步骤 9 计算

$$\exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha_i} ds\right) \left(Y_T^{\alpha_i} - K\right)^+$$

如果 $i < N-1$ ，返回步骤 3。

步骤 10 计算欧式期权的价格

$$f_c^e \leftarrow \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \exp\left(-\int_0^T r_s^{1-\alpha_i} ds\right) \left(Y_T^{\alpha_i} - K\right)^+$$

在步骤 5 的计算中，出现了 $\ln \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ 和 $\ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}$ 。当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 或 $\alpha \rightarrow 1^-$ 时，对数项趋于无穷，导致数值计算不稳定。因此本文采用端点截断策略，将 α 限制在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 。为验证截断参数 ε 取值的合理性，选取两组不同的截断参数 $\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}$ 和 $\varepsilon_2 = \frac{1}{N_2}$ ，分别计算对应的期权价格 f_{c1}^e 和 f_{c2}^e ，若 $|f_{c1}^e - f_{c2}^e|$ 足够小，说明 ε 的取值对期权价格的影响可忽略不计，所选截断参数是合理的。

为此，取 $N = M = 16, 32, 64, 128, 256$ 分别计算期权价格，给出的收敛趋势见图 1。

可以看出，随着离散参数 N, M 从 16 逐步增大至 256，期权价格从 3.5479 单调递增至 4.5006，并逐渐趋于稳定。当 N, M 较小时曲线上升较快，当 $N = M \geq 128$ 后增速明显放缓，表明算法已趋于收敛。综合考虑计算精度与效率，本文主要算例采用 $N = M = 100$ 。

例 5.1 选取参数 $\kappa_2 = 1$ ， $a = 0.1$ ， $\sigma_2 = 0.02$ ， $r_0 = 0.06$ ， $\kappa_1 = 1$ ， $\theta = 0.4$ ， $\sigma_1 = 0.2$ ， $\sigma_0 = 0.14$ ，设初始股票价格 $Y_0 = 20$ ，到期时间 $T = 1$ ，行权价 $K = 19$ ，则根据定理 4.1 和数值算法，计算出欧式看涨期权价格 $f_c^e = 4.2959$ 。

下面讨论不确定 Stein-Stein-CIR 模型(4)中，各参数对欧式看涨期权价格的影响。分析当某一个参数发生变化，而其余参数保持不变的情况下，价格 f_c^e 的变化情况。

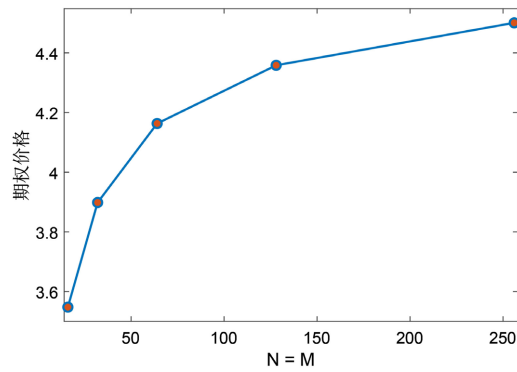


Figure 1. Convergence curve of option prices with discrete parameters
图 1. 期权价格随离散参数的收敛曲线

例 5.2 假设对数漂移率 θ 在 0 到 0.5 之间变化, 选取步长为 0.01, 以分析其对期权价格 f_c^e 的影响。计算结果, 如图 2 所示。

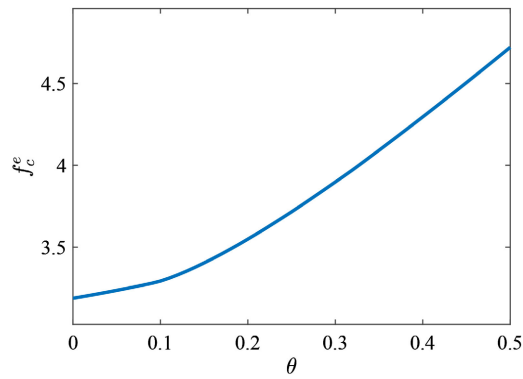


Figure 2. The effect of logarithmic drift rate θ on the price of European call option f_c^e
图 2. 对数漂移率 θ 对欧式看涨期权价格 f_c^e 的影响

可以发现, 期权价格随着对数漂移率 θ 的增加而增加。根据公式(7), 由于 Y_T^α 是关于 θ 的增函数, 而价格 f_c^e 和 Y_T^α 之间存在正相关关系, 因此, f_c^e 和 θ 也是正相关的。类似地, 根据等式(7), 如果参数 σ_1 越大, 那么 Y_T^α 越大, 因此 f_c^e 和 σ_1 之间也存在正相关关系。

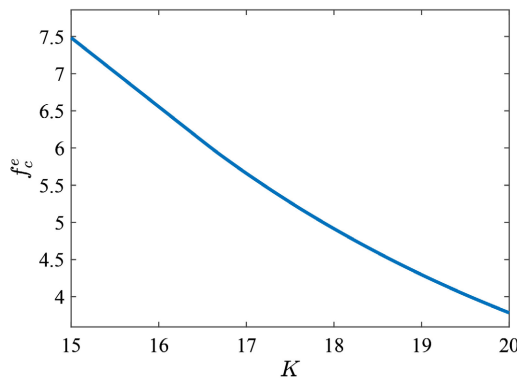


Figure 3. The effect of strike price K on the price of European call option f_c^e
图 3. 执行价格 K 对欧式看涨期权价格 f_c^e 的影响

例 5.3 假设执行价格 K 在 15 到 20 之间变化, 选取步长为 0.01, 以分析其对期权价格 f_c^e 的影响, 计算结果如图 3 所示。

图 3 展示了欧式看涨期权价格随着执行价格 K 的增加而减少。根据公式(6), 执行价格 K 只出现在正偏差 $(Y_T^\alpha - K)^+$ 中, 所以期权价格 f_c^e 是执行价格 K 的减函数。

例 5.4 假设到期日 T 从 0.5 变化到 1.5, 选取步长为 0.01, 以分析其对期权价格 f_c^e 的影响, 计算结果如图 4 所示。

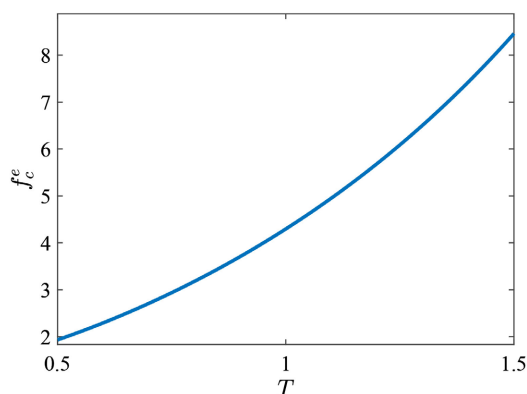


Figure 4. The effect of expiration time T on the price of European call option f_c^e

图 4. 到期时间 T 对欧式看涨期权价格 f_c^e 的影响

根据公式(6), 由于期权价格 f_c^e 关于到期时间 T 单调递增, 所以随着到期时间 T 变长, 投资者有更多的时间从标的资产的价格变动中获益, 因此期权价格变大。

例 5.5 假设 κ_2 在 0.5 到 1.5 之间变化, 选取步长为 0.01, 以分析其对期权价格 f_c^e 的影响, 计算结果如图 5 所示。

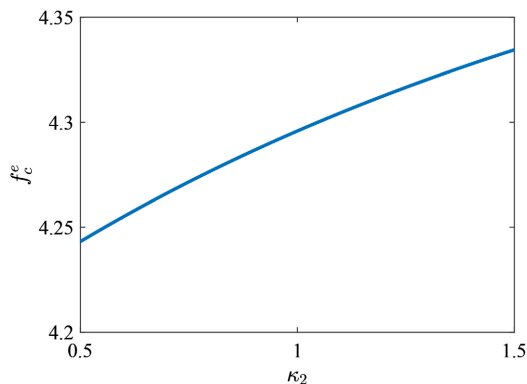


Figure 5. The effect of parameter κ_2 on the price of European call option f_c^e

图 5. 参数 κ_2 对欧式看涨期权价格 f_c^e 的影响

由图 5, 可以发现 f_c^e 和 κ_2 之间存在正相关性。然而, 注意到从定价公式中很难探究价格 f_c^e 和 κ_2 之间的关系。因此, 分析当参数 κ_1 , θ , σ_1 , a , σ_2 , Y_0 , K , T 取不同值时, κ_2 对期权价格 f_c^e 的影响, 结果如图 6 所示。

显然, 在所有情况下, 价格 f_c^e 都会随着 κ_2 的增加而增加。因此, 当其他参数保持在可接受的范围内时, 价格 f_c^e 是 κ_2 的单调增函数。

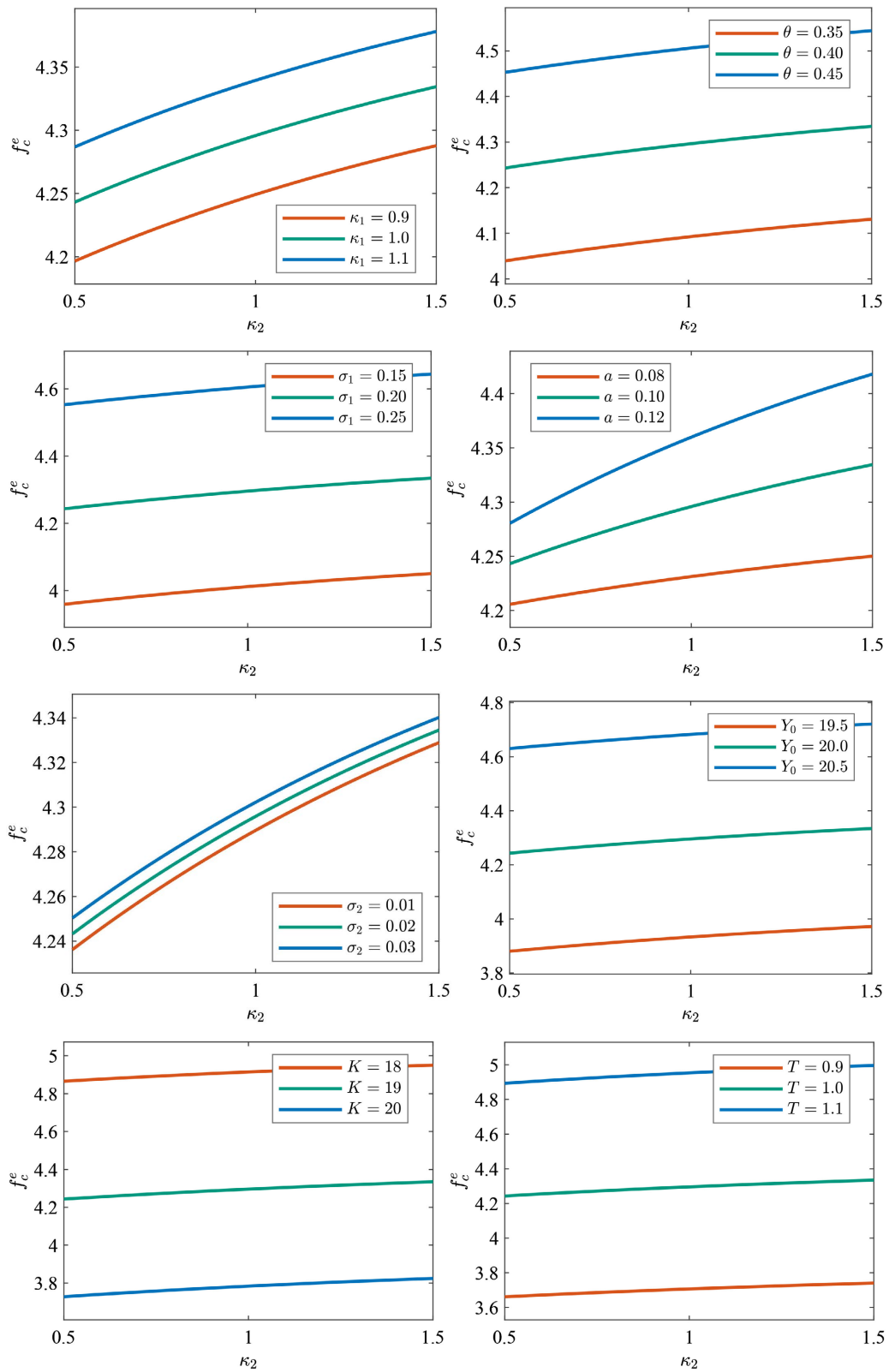


Figure 6. The effect of parameter κ_2 on the price of European call option f_c^e under different parameter values
图 6. 不同参数取值下参数 κ_2 对欧式看涨期权价格 f_c^e 的影响

6. 实证分析

下面利用真实金融市场数据, 对定理 4.1 给出的欧式看涨期权定价公式进行实用性检验。数据来源于上证 50 指数, 选取 2024 年 10 月 21 日至 2024 年 12 月 31 日的收盘价, 并基于该价格序列计算出波动率数据。

6.1. 参数估计

首先, 使用复合 Heun 方法[11]对不确定模型(4)进行参数估计。考虑如下不确定微分方程

$$dv_t = \kappa_1(\theta - v_t)dt + \sigma_1 dC_{2t}$$

其中 κ_1 , θ , σ_1 是待估计的未知参数, 其估计值 κ_1^* , θ^* , σ_1^* 满足下列方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\sigma_1^*(t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})}{\sigma_1^*} - \frac{\lambda\kappa_1^*(\theta^* - (v_{t_i} + \kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_1^*} \right) = 0, \\ \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\sigma_1^*(t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})}{\sigma_1^*} - \frac{\lambda\kappa_1^*(\theta^* - (v_{t_i} + \kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_1^*} \right)^2 = 1, \\ \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\sigma_1^*(t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})}{\sigma_1^*} - \frac{\lambda\kappa_1^*(\theta^* - (v_{t_i} + \kappa_1^*(\theta^* - v_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_1^*} \right)^3 = 0. \end{cases}$$

当 $\lambda = 0.1$ 时, 解方程得到估计值 $\kappa_1^* = 0.1698$, $\theta^* = 0.2224$, $\sigma_1^* = 0.0220$ 。图 7 显示所有样本数据都在 0.99-轨道和 0.01-轨道之间, 即估计是合理的。

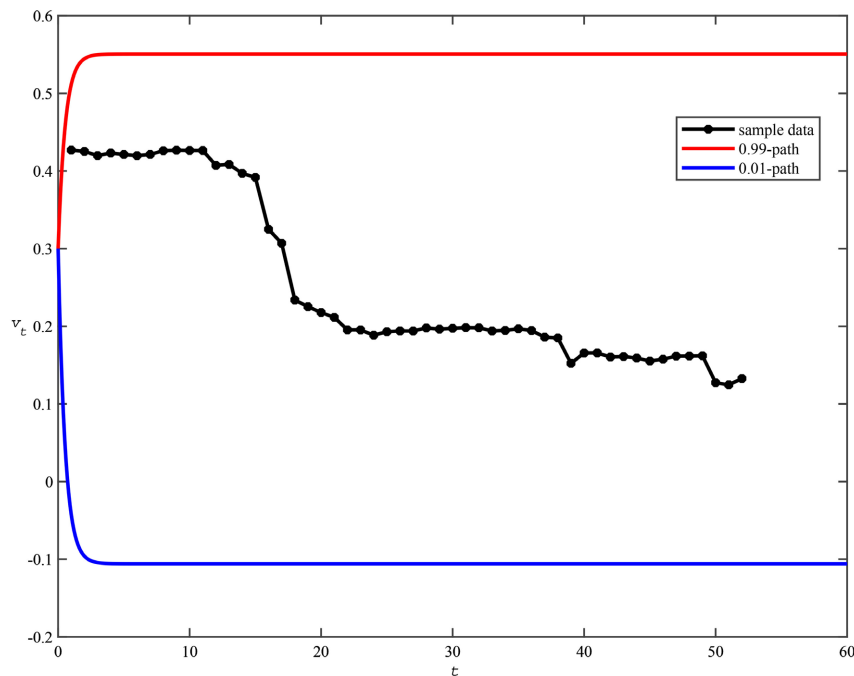


Figure 7. Sample data and α -path plot of volatility v_t

图 7. 波动率 v_t 的样本数据和 α -轨道图

对于模型(4)中的 r_t , 利用 2024 年 10 月 21 日至 2024 年 12 月 31 日的 SHIBOR 数据进行分析。考虑不确定微分方程

$$dr_t = \kappa_2(a - r_t)dt + \sigma_2\sqrt{r_t}dC_{3t}$$

其中 κ_2 , a , σ_2 是待估计的未知参数, 其估计值 κ_2^* , a^* , σ_2^* 满足下列方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}} (t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_2^*(a^* - r_{t_i})}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\lambda\kappa_2^*(a^* - (r_{t_i} + \kappa_2^*(a^* - r_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} \right) = 0, \\ \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}} (t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_2^*(a^* - r_{t_i})}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\lambda\kappa_2^*(a^* - (r_{t_i} + \kappa_2^*(a^* - r_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} \right)^2 = 1, \\ \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}} (t_{i+1} - t_i)} - \frac{(1-\lambda)\kappa_2^*(a^* - r_{t_i})}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\lambda\kappa_2^*(a^* - (r_{t_i} + \kappa_2^*(a^* - r_{t_i})(t_{i+1} - t_i)))}{\sigma_2^* \sqrt{r_{t_i}}} \right)^3 = 0. \end{cases}$$

当 $\lambda = 0.3$ 时, 解方程得到估计值 $\kappa_2^* = 0.6314$, $a^* = 0.0142$, $\sigma_2^* = -0.0041$ 。图 8 显示所有样本数据都在 0.99-轨道和 0.01-轨道之间, 即估计结果是可靠的。

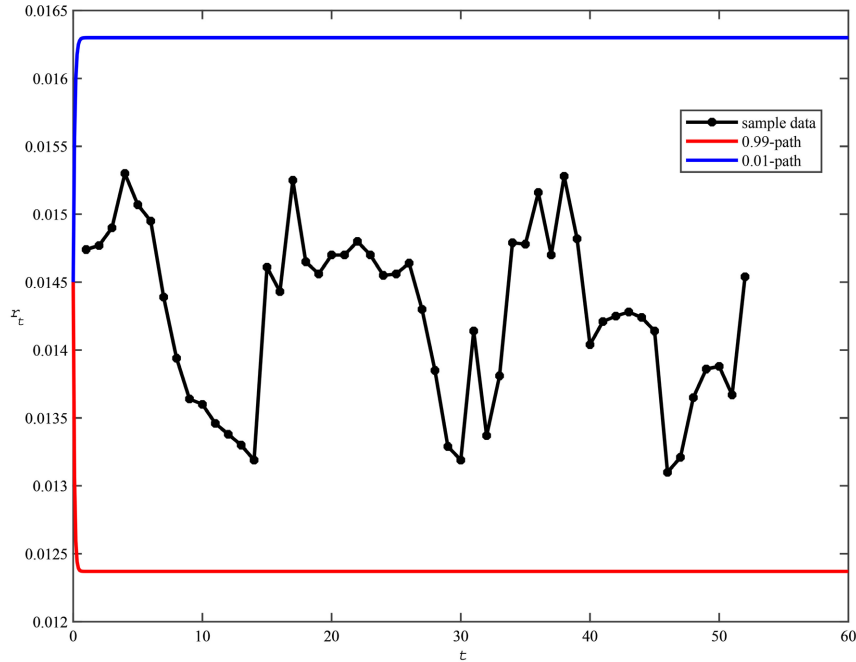


Figure 8. Sample data and α -path plot of interest rates r_t

图 8. 利率 r_t 的样本数据和 α -轨道图

因此, 将以上估计值代入模型(4), 得到估计模型

$$\begin{cases} dY_t = r_t Y_t dt + v_t Y_t dC_{1t} \\ dv_t = 0.1698(0.2224 - v_t) dt + 0.0220 dC_{2t} \\ dr_t = 0.6314(0.0142 - r_t) dt - 0.0041\sqrt{r_t} dC_{3t} \end{cases} \quad (8)$$

6.2. 假设检验

最后, 本文使用由 Zhang [16] 等人提出的不确定性假设检验方法来评估模型(8)的有效性。模型(4)中的波动率 v_t 满足如下方程

$$dv_t = \kappa_1(\theta - v_t)dt + \sigma_1 dC_{2t}$$

利用欧拉方法, 得到

$$\frac{v_{t_{j+1}} - v_{t_j} - \kappa_1(\theta - v_{t_j})(t_{j+1} - t_j)}{\sigma_1(t_{j+1} - t_j)} = \frac{C_{t_{j+1}} - C_{t_j}}{t_{j+1} - t_j}$$

因为

$$\frac{C_{t_{j+1}} - C_{t_j}}{t_{j+1} - t_j} \sim N(0,1)$$

所以

$$l_j = \frac{v_{t_{j+1}} - v_{t_j} - \kappa_1(\theta - v_{t_j})(t_{j+1} - t_j)}{\sigma_1(t_{j+1} - t_j)} \sim N(0,1), \quad 1 \leq j \leq 51$$

l_j 是标准正态不确定分布的样本, 因此, 检验估计方程(8)中的波动率方程与观测数据的拟合效果就转化为验证 l_j 是否服从标准正态不确定分布。

为此, 考虑以下假设

$$\begin{cases} H_0: e = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ H_1: e \neq 0 \text{ 或 } \sigma \neq 1 \end{cases}$$

设显著性水平 $\alpha = 0.05$, 利用标准正态逆不确定分布计算

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2.0198 \quad \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2.0198$$

由于 $\alpha * 51 = 2.55$, 因此可以确定拒绝域为

$$\omega_1 = \{(l_1, l_2, \dots, l_{51}): \text{至少存在 3 个样本点, 使得 } l_j < -2.0198 \text{ 或者 } l_j > 2.0198, 1 \leq j \leq 51\}$$

如图 9 所示, 只有 l_{17} 和 l_{49} 没有落在区间 $[-2.0198, 2.0198]$, 故 $(l_1, l_2, \dots, l_{51})$ 不属于拒绝域 ω_1 。

类似地, 对于利率 r_t , 可以得到

$$k_j = \frac{r_{t_{j+1}} - r_{t_j} - \kappa_2(a - r_{t_j})(t_{j+1} - t_j)}{\sigma_2 \sqrt{r_{t_j}}(t_{j+1} - t_j)} \sim N(0,1), \quad 1 \leq j \leq 51$$

同样, k_j 是标准正态不确定分布的样本, 因此, 检验估计方程(8)中利率方程与观测数据的拟合效果就转化为验证 k_j 是否服从标准正态不确定分布。

设显著性水平 $\alpha = 0.05$, 类似地, 可以确定拒绝域为

$$\omega_2 = \{(k_1, k_2, \dots, k_{51}): \text{至少存在 3 个样本点, 使得 } k_j < -2.0198 \text{ 或者 } k_j > 2.0198, 1 \leq j \leq 51\}$$

由图 10 可知, 只有 k_{45} 没有落在区间 $[-2.0198, 2.0198]$, 因此 $(k_1, k_2, \dots, k_{51}) \notin \omega_2$ 。

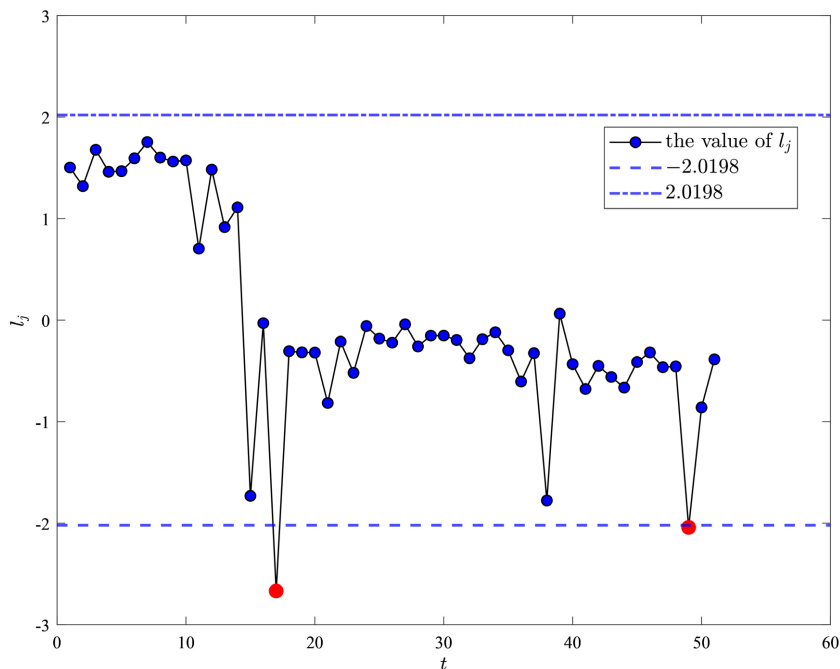


Figure 9. Residual plot of volatility
图 9. 波动率的残差图

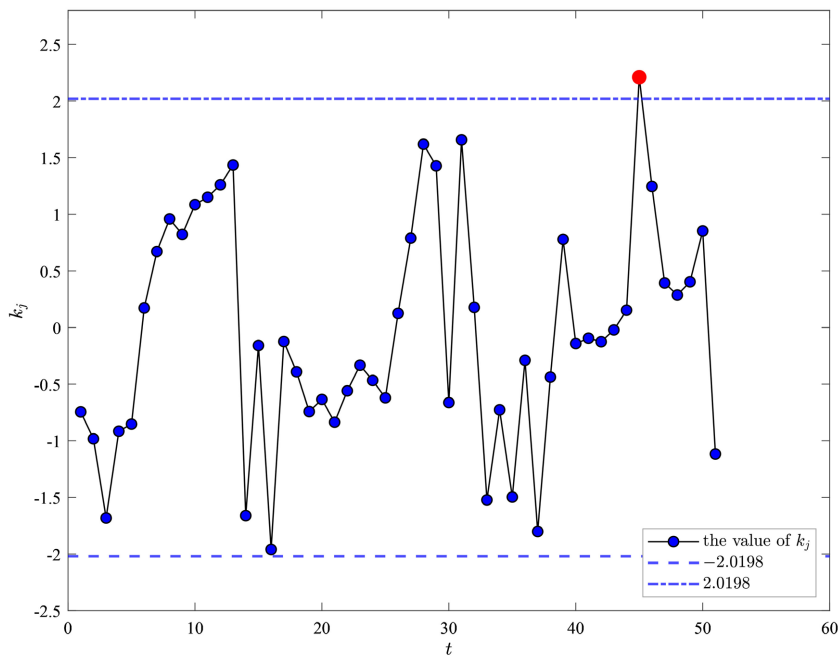


Figure 10. Residual plot of interest rates
图 10. 利率的残差图

综上所述, 基于复合 Heun 方法得到的模型(8)与观测数据的拟合效果通过了检验。

7. 结论

本文基于不确定理论, 研究了不确定 Stein-Stein-CIR 模型下的欧式看涨期权的定价问题。首先, 构

建了能够同时刻画利率与股票价格动态变化的不确定 Stein-Stein-CIR 模型, 并在此基础上推导出欧式看涨期权的定价公式, 进而分析了不同参数对期权价格的影响。此外, 基于真实市场样本数据, 进行参数估计与不确定假设检验验证了该模型的可靠性, 结果表明不确定 Stein-Stein-CIR 模型更贴近真实金融市场的特征。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Liu, B. (2007) *Uncertainty Theory*. 2nd Edition, Springer.
- [3] Peng, J. and Yao, K. (2011) A New Option Pricing Model for Stocks in Uncertainty Markets. *International Journal of Operations Research*, **8**, 18-26.
- [4] Li, S. and Peng, J. (2014) A New Stock Model for Option Pricing in Uncertain Environment. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **11**, 27-41.
- [5] Wang, W. and Chen, P. (2018) Pricing Asian Options in an Uncertain Stock Model with Floating Interest Rate. *International Journal for Uncertainty Quantification*, **8**, 543-557. <https://doi.org/10.1615/int.j.uncertaintyquantification.2018025270>
- [6] Li, Z. (2019) Parameter Estimation of Simple Uncertain Differential Equations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **37**, 5363-5372. <https://doi.org/10.3233/jifs-190521>
- [7] Sheng, Y., Yao, K. and Chen, X. (2019) Least Squares Estimation in Uncertain Differential Equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **28**, 2651-2655. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2939984>
- [8] Yao, K. and Liu, B. (2020) Parameter Estimation in Uncertain Differential Equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **19**, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s10700-019-09310-y>
- [9] Liu, Z. (2021) Generalized Moment Estimation for Uncertain Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **392**, Article 125724. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125724>
- [10] Yang, X., Liu, Y. and Park, G. (2020) Parameter Estimation of Uncertain Differential Equation with Application to Financial Market. *Chaos, Solitons & Fractals*, **139**, Article 110026. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110026>
- [11] Zhou, S., Tan, X. and Wang, X. (2023) Moment Estimation Based on the Composite Heun Scheme for Parameters in Uncertain Differential Equations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **45**, 4239-4248. <https://doi.org/10.3233/jifs-230288>
- [12] Liu, B. (2010) *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*. Springer.
- [13] Yao, K. and Chen, X. (2013) A Numerical Method for Solving Uncertain Differential Equations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **25**, 825-832. <https://doi.org/10.3233/jifs-120688>
- [14] Yao, K. (2013) Extreme Values and Integral of Solution of Uncertain Differential Equation. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, **1**, Article No. 2. <https://doi.org/10.1186/2195-5468-1-2>
- [15] Yao, K. (2015) Uncertain Contour Process and Its Application in Stock Model with Floating Interest Rate. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **14**, 399-424. <https://doi.org/10.1007/s10700-015-9211-y>
- [16] Zhang, G., Shi, Y. and Sheng, Y. (2023) Uncertain Hypothesis Testing and Its Application. *Soft Computing*, **27**, 2357-2367. <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07748-8>