Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 70-77
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154137

B-代数上无穷小双代数的形变

王晶晶

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2026年3月2日；录用日期：2026年3月26日；发布日期：2026年4月7日

摘　要

本文研究了*B*-代数上无穷小双代数的形变理论。首先，引入*B*-代数上无穷小双代数的概念，并说明三角无穷小双代数可以由*B*-代数上的结合*r*-矩阵诱导。其次，研究*B*-代数上无穷小双代数的线性形变，并引入弱同态的概念来刻画形变间的等价关系。最后，证明*B*-代数上结合*r*-矩阵的等价形变诱导了无穷小双代数的等价形变。

关键词

B-代数，$\mathcal{O}$-算子，无穷小双代数，结合*r*-矩阵，形变

Deformations of Infinitesimal Bialgebras on *B*-Algebras

Jingjing Wang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 7, 2026

Abstract

This paper studies the deformation theory of infinitesimal bialgebras on *B*-algebras. First, we introduce the concept of infinitesimal bialgebras on *B*-algebras and prove that triangular infinitesimal bialgebras can be induced by associative *r*-matrices on *B*-algebras. Second, we study linear deformations and formal deformations of infinitesimal bialgebras on *B*-algebras, and introduce the notion of weak homomorphisms to characterize the equivalence relation between deformations. Finally, we prove that equivalent deformations of associative *r*-matrices on *B*-algebras induce equivalent deformations of infinitesimal bialgebras.

文章引用: 王晶晶. *B*-代数上无穷小双代数的形变[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 70-77.
DOI: 10.12677/aam.2026.154137

Keywords

***B*-Algebra, $\mathcal{O}$-Operators, Infinitesimal Bialgebras, Associative *r*-Matrix, Deformation**

1. 引言

结合代数的 Hochschild 上同调理论由 Hochschild 于 1945 年在其奠基性工作[1]中提出。至 20 世纪 60 年代，Gerstenhaber 深入探讨了结合代数的形变理论，并在文献[2]中证明了 Hochschild 上同调能够控制形变。

无穷小双代数的概念由 Aguiar [3]在研究结合 Yang-Baxter 方程和 Hopf 代数理论时首次提出，它是李双代数在结合代数下的情况。Rota-Baxter 算子起源于概率论[4]，后经 Rota [5]和 Cartier [6]被应用于组合学与量子场论[7]。结合代数上的 $\mathcal{O}$-算子是权为零的 Rota-Baxter 算子的推广，与 dendriform 代数、结合 Yang-Baxter 方程以及结合 *r*-矩阵等概念紧密相连[8]-[10]。2020 年，Das [8]系统地建立了结合代数上 $\mathcal{O}$-算子的上同调与形变理论，作为应用得到结合代数上 Rota-Baxter 算子、结合 *r*-矩阵以及无穷小双代数的形变。

2016 年，为了研究 A[[t]]上形变的 *B*-代数结构，Staic [11]引入了 *B*-代数上的二次上同调，相关研究见[12] [13]。2023 年，黄在[14]中研究了 *B*-代数上 $\mathcal{O}$-算子的二次上同调。在此基础上，刘等人将 Das [8]关于结合代数上 $\mathcal{O}$-算子的形变理论推广到 *B*-代数上[15]，研究了 *B*-代数上 $\mathcal{O}$-算子，Rota-Baxter 算子和结合 *r*-矩阵的形变。本文旨在进一步研究 *B*-代数上由结合 *r*-矩阵诱导的无穷小双代数的形变理论。

文中所有代数都有单位元，向量空间均为有限维，且所有向量空间，线性映射，张量积在特征为 0 的域 $\mathbb{K}$ 上讨论。

2. 预备知识

本节主要介绍 *B*-代数及其上 $\mathcal{O}$-算子、结合 *r*-矩阵的基本概念与结论。

定义 2.1 [11] 设 A 是一个代数，B 是一个带单位元 1_B 的交换代数，$\varepsilon: B \to A$ 是代数同态，且满足 $\varepsilon(B) \subseteq Z(A)$ （$Z(A)$ 是 A 的中心），则称 A 为一个 *B*-代数，(A, B, ε) 是一个三元组。

注 2.2 由文献[11]可知，*B*-代数等价于存在一簇乘法 $\{m_b : A\otimes A \to A\}_{b\in B}$ 使得 (A, m_{1_B}) 是一个带单位元 1_A 的代数，且对任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$，$q \in K$，有

$$m_{b_1+b_2}(a_1 \otimes a_2) = m_{b_1}(a_1 \otimes a_2) + m_{b_2}(a_1 \otimes a_2),$$
$$m_{qb_1}(a_1 \otimes a_2) = qm_{b_1}(a_1 \otimes a_2),$$
$$m_{b_2b_3}(m_{b_1}(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) = m_{b_1b_2}(a_1 \otimes m_{b_3}(a_2 \otimes a_3)),$$

此时，称 $(A, \{m_b\})$ 是 *B*-代数。

定义 2.3 [15] 设 $(A, \{m_b\})$ 是 *B*-代数，M 是一个向量空间。若存在两簇线性映射 $\{L_b : A\otimes M \to M\}_{b\in B}$ 和 $\{R_b : M \otimes A \to M\}_{b\in B}$，使得对任意 $a, a_1, a_2 \in A$，$m \in M$，$b_1, b_2, b_3 \in B$，$q \in \mathbb{K}$，满足

$$L_{b_1+b_2}(a\otimes m)=L_{b_1}(a\otimes m)+L_{b_2}(a\otimes m),$$
$$L_{qb_1}(a\otimes m)=qL_{b_1}(a\otimes m),$$
$$L_{b_2b_3}\left(m_{b_1}(a_1\otimes a_2)\otimes m\right)=L_{b_1b_2}\left(a_1\otimes L_{b_3}(a_2\otimes m)\right),$$

以及

$$R_{b_1+b_2}(m\otimes a)=R_{b_1}(m\otimes a)+R_{b_2}(m\otimes a)$$
$$R_{qb_1}(m\otimes a)=qR_{b_1}(m\otimes a),$$
$$R_{b_1b_2}\left(m\otimes m_{b_3}(a_1\otimes a_2)\right)=R_{b_2b_3}\left(R_{b_1}(m\otimes a_1)\otimes a_2\right),$$

此外，还满足

$$L_{b_1b_2}\left(a_1\otimes R_{b_3}(m\otimes a_2)\right)=R_{b_2b_3}\left(L_{b_1}(a_1\otimes m)\otimes a_2\right),$$

且 $L_{1_B}(1_A\otimes m)=R_{1_B}(m\otimes 1_A)$，则称 (M,L_{1_B},R_{1_B}) 为 B-代数 A 的一个双模。

例 2.4 [15] 设 (A,B,ε) 是三元组。定义一簇乘法 $\{m_b:A\otimes A\to A\}_{b\in B}$ 为

$$m_b:A\otimes A\to A,\ a_1\otimes a_2\mapsto\varepsilon(b)\cdot(a_1\cdot a_2)\triangleq a_1\cdot_b a_2.$$

设 M 是 B-代数 A 的双模。对任意 $b\in B$，定义映射 $\{L_b:A\otimes M\to M\}_{b\in B}$，$\{R_b:M\otimes A\to M\}_{b\in B}$ 为

$$L_b:A\otimes M\to M,\ a\otimes m\mapsto\varepsilon(b)(am)\triangleq a\cdot_{b,M}m,$$
$$R_b:M\otimes A\to M,\ m\otimes a\mapsto\varepsilon(b)(ma)\triangleq m\cdot_{b,M}a.$$

容易验证 $(A,\{\cdot_b\})$ 是 B-代数，且 (M,L_b,R_b) 是 B-代数 A 的一个双模。

注 2.5 [15] 对于每个 $a\in A$，$b\in B$，存在映射 $l_{a,b}:M\to M$，$m\mapsto L_b(a,m)$ 以及 $r_{a,b}:M\to M$，$m\mapsto R_b(m,a)$。特别地，B-代数 $(A,\{\cdot_b\})$ 自身作为 A-双模，其左右模作用 $L_b=R_b=\cdot_b$。我们称该双模为 B-代数 $(A,\{\cdot_b\})$ 上的伴随双模，相应地有映射 $ad^l_{a,b}$ 和 $ad^r_{a,b}$，即对固定的 $a\in A$，$b\in B$，以及任意 $x\in A$，$ad^l_{a,b}(x)=a\cdot_b x$，$ad^r_{a,b}(x)=x\cdot_b a$。此外，B-代数 $(A,\{\cdot_b\})$ 的对偶空间 A^* 也是 B-代数的双模(又称 B-代数上的余伴随双模结构)，此时 $L_b:A\otimes A^*\to A^*,R_b:A^*\otimes A\to A^*$，对于 $b\in B$，$a_1,a_2\in A$ 以及 $f\in A^*$，有

$$L_b(a_1,f)(a_2)=f(a_2\cdot_b a_1),\ R_b(f,a_1)(a_2)=f(a_1\cdot_b a_2),$$

对应的映射记为 $ad^{*l}_{a,b}$ 和 $ad^{*r}_{a,b}$，

$$ad^{*l}_{a,b}:A^*\to A^*,\ f\mapsto L_b(a,f),$$
$$ad^{*r}_{a,b}:A^*\to A^*,\ f\mapsto R_b(a,f).$$

B-代数上的伴随双模和余伴随双模在本文第 4 节研究无穷小双代数的形变理论中起着核心作用。

定义 2.6 [15] 设 $(A,\{\cdot_b\})$ 是 B-代数，M 是 B-代数 A 的双模。若对任意 $b\in B$，$u,v\in M$，线性映射 $T:M\to A$ 满足

$$T(u)\cdot_b T(v)=T\left(T(u)\cdot_{b,M}v+u\cdot_{b,M}T(v)\right).$$

则称其为 B-代数上关于 M 的 $\mathcal{O}$-算子。

定义 2.7 [15] 设 $(A,\{\cdot_b\})$ 是 B-代数，$r=\sum_i x_i\otimes y_i\in A\otimes A$。定义

$$A_b(r)=r_{13}r_{12}+r_{23}r_{13}-r_{12}r_{23}\in A\otimes A\otimes A,$$

其中

$$r_{13}r_{12}=\sum_{i,j}x_i\cdot_b x_j\otimes y_j\otimes y_i,$$

$$r_{23}r_{13}=\sum_{i,j}x_i\otimes x_j\otimes y_j\cdot_b y_i,$$

$$r_{12}r_{23}=\sum_{i,j}x_i\otimes y_i\cdot_b x_j\otimes y_j.$$

若对任意 $b\in B,\ A_b(r)=0$，则称 r 为 B-代数 A 上的结合 r-矩阵。

定义反对称线性映射 $r^{\#}:A^*\to A:\langle\beta,r^{\#}(\alpha)\rangle=r(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in A^*$。

命题 2.8 [15] $r\in A\otimes A$ 是 B-代数 A 上的结合 r-矩阵当且仅当 $r^{\#}$是 B-代数 A 上关于余伴随双模 A^* 的 $\mathcal{O}$-算子。

下面介绍 B-代数上两个结合 r-矩阵之间的弱同态。

定义 2.9 [15] 设 $r_1,r_2\in A\otimes A$ 是 B-代数 A 上的两个结合 r-矩阵，$\phi:A\to A$ 是一个 B-代数同态，$\psi:A\to A$ 是一个线性映射。若对于任意 $a_1,a_2\in A,b\in B$，满足以下等式：

$$(\psi\otimes\mathrm{id}_A)(r_2)=(\mathrm{id}_A\otimes\phi)(r_1),$$
$$\psi(\phi(a_1)\cdot_b a_2)=a_1\cdot_b\psi(a_2),$$
$$\psi(a_1\cdot_b\phi(a_2))=\psi(a_1)\cdot_b a_2.$$

则称 (ϕ,ψ) 是从 r_1 到 r_2 的弱同态。若 ϕ 和 ψ 都是同构，则称 (ϕ,ψ) 为弱同构。

以下结果描述了 B-代数上结合 r-矩阵的弱同态(同构)与相应的 $\mathcal{O}$-算子之间的同态(同构)关系。

定理 2.10 [15] 设 $r_1,r_2\in A\otimes A$ 是 B-代数上的两个结合 r-矩阵，则 (ϕ,ψ) 是从 r_1 到 r_2 的弱同态(同构)当且仅当 (ϕ,ψ^*) 是从 $r_1^\sharp$ 到 $r_2^\sharp$ 的 $\mathcal{O}$-算子同态(同构)。

定理 2.11 [15] B-代数 A 上的两个结合 r-矩阵 r_1 和 r_2 等价当且仅当存在 B-代数同构 $\phi:A\to A$ 使得 (ϕ,ϕ^{-1}) 是从 r_1 到 r_2 的弱同构。

3. *B*-代数上的无穷小双代数

本节首先定义 B-代数上的无穷小双代数，并证明三角无穷小 B-双代数可由 B-代数上的结合 r-矩阵诱导得出。在此基础上，我们将引入 B-代数上弱同态的概念来刻画 B-代数上无穷小双代数之间的同态。

定义 3.1 设 $(A,\{\cdot_b\})$ 是一个 B-代数。若存在一簇余乘法 $\{\Delta_b:A\to A\otimes A\}_{b\in B}$ 使得对每个 $b\in B$，$(A,\{\Delta_b\})$ 是一个 B-余代数(即满足 B-余结合律)，且对任意 $b_1,b_2\in B$ 及 $a_1,a_2\in A$，成立

$$\Delta_{b_2}(a_1\cdot_{b_1}a_2)=a_1\cdot_{b_1}\Delta_{b_2}(a_2)+\Delta_{b_2}(a_1)\cdot_{b_1}a_2,$$

其中右模作用和左模作用分别定义为

$$a\cdot_b\left(\sum a'\otimes a''\right)=\sum(a\cdot_b a')\otimes a'',\ \left(\sum a'\otimes a''\right)\cdot_b a=\sum a'\otimes(a''\cdot_b a),$$

则称 $(A,\{\cdot_{b,A}\},\{\Delta_{b,A}\})$ 为一个 B-代数上的无穷小双代数。

注 3.2 当 $B=\mathbb{K}$ 时，上述定义退化为经典的无穷小双代数[1]，此时 $\Delta(a_1\cdot a_2)=a_1\cdot\Delta(a_2)+\Delta(a_1)\cdot a_2$。

设 $(A,\{\cdot_{b,A}\},\{\Delta_{b,A}\})$ 和 $(R,\{\cdot_{b,R}\},\{\Delta_{b,R}\})$ 是两个 B-代数上的无穷小双代数。若存在 B-代数同态 $\phi:A\to R$，且该同态与余积相容，即 $(\phi\otimes\phi)\circ\Delta_{b,A}=\Delta_{b,R}\circ\phi$，则称其为 B-代数上无穷小双代数的同态。在有限维向量空间上，结合余代数结构等价于其对偶空间上的结合代数结构。从对偶等价的角度来说，若存在 B-代数同态 $\phi:A\to R$ 满足其对偶态射 $\phi^*:R^*\to A^*$ 是 B-代数同态，则称其为 B-代数上无穷小双代数的同态。若 ϕ 是线性同构，则称其为 B-代数上无穷小双代数的同构。

由文献[15]可知，B-代数 A 上的结合 r-矩阵 $r\in A\otimes A$ 诱导了 $\mathcal{O}$-算子 $r^\sharp:A^*\to A$。在对偶空间 A^* 上可

以定义 B-代数结构：

$$\alpha \star_b \beta = ad^{*l}_{r^\sharp(\alpha),b}\beta + ad^{*r}_{r^\sharp(\beta),b}\alpha,\ \forall \alpha,\beta \in A^*, b \in B,$$

其中 $ad^{*l}_{r^\sharp(\alpha),b}$ 和 $ad^{*r}_{r^\sharp(\beta),b}$ 是 B-代数 A 上的右余伴随和左余伴随作用，具体作用见注 2.5。对偶地，该 B-代数结构对应了 A 上的一个 B-余代数结构 $\Delta_{b,r}$，定义为

$$\langle \Delta_{b,r}(a), \alpha \otimes \beta \rangle = \langle a, \alpha \star_b \beta \rangle,\ \forall a \in A,\ \alpha,\beta \in A^*.$$

此时，A 上的 B-代数结构和上述 B-余代数结构构成一个 B-代数上的无穷小双代数，称 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_{b,r}\}\right)$ 为由 r 诱导的 B-代数上的三角无穷小双代数。

接下来，我们引入 B-代数 A 上两个无穷小双代数之间的弱同态概念。

定义 3.3 设 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_b\}\right)$ 和 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta'_b\}\right)$ 是 B-代数 A 上的两个无穷小双代数。若存在一对 (ϕ,ψ)，其中 $\phi: A \to A$ 是 B-代数同态，$\psi: A \to A$ 是 B-余代数同态(即对每个 $b \in B$，$\Delta'_b \circ \psi = (\psi \otimes \psi) \circ \Delta_b$)，使得对任意 $a_1, a_2 \in A, b \in B$，

$$\psi\left(\phi(a_1)\cdot_b a_2\right) = a_1 \cdot_b \psi(a_2),$$

$$\psi\left(a_1 \cdot_b \phi(a_2)\right) = \psi(a_1)\cdot_b a_2,$$

则称其为 B-代数 A 上两个无穷小双代数之间的弱同态。若 ϕ 和 ψ 都是线性同构，则称 (ϕ,ψ) 为弱同构。

命题 3.4 设 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_b\}\right)$ 和 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta'_b\}\right)$ 是 B-代数 A 上的两个无穷小双代数。它们作为 B-代数 A 上的无穷小双代数同构当且仅当存在 B-代数同构 $\phi: A \to A$ 使得 $\left(\phi,\phi^{-1}\right)$ 是 B-代数 A 上从 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_b\}\right)$ 到 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta'_b\}\right)$ 的弱同构。

下面我们说明，B-代数 A 上结合 r-矩阵的弱同态会诱导相应无穷小双代数之间的弱同态。

定理 3.5 设 $\left(A,\{\cdot_b\}\right)$ 是一个 B-代数，$r_1, r_2 \in A \otimes A$ 是两个 B-代数上的结合 r-矩阵。若 (ϕ,ψ) 是 B-代数上从 r_1 到 r_2 的弱同态(弱同构)，则 (ϕ,ψ) 也是 B-代数上从无穷小双代数 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_{b,r_1}\}\right)$ 到 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_{b,r_2}\}\right)$ 的弱同态(弱同构)。

证明： 由于 (ϕ,ψ) 是从 r_1 到 r_2 的弱同态，由定义 3.3 知 $\psi\left(\phi(a_1)\cdot_b a_2\right) = a_1 \cdot_b \psi(a_2)$ 和 $\psi\left(a_1 \cdot_b \phi(a_2)\right) = \psi(a_1)\cdot_b a_2$。因此只需证明 $\psi: A \to A$ 是 B-余代数同态，即等价于证明 $\psi^*: A^* \to A^*$ 是 B-代数同态。对任意 $\alpha,\beta \in A^*$, $x \in A$，$b \in B$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^*\left(\alpha \star_{b,r_1} \beta\right), x\right\rangle &= \left\langle \alpha \star_{b,r_1} \beta, \psi(x)\right\rangle \\
&= \left\langle ad^{*l}_{r_1^\sharp(\alpha),b}(\beta) + ad^{*r}_{r_1^\sharp(\beta),b}(\alpha), \psi(x)\right\rangle \\
&= \left\langle \beta, \psi(x)\cdot_b r_1^\sharp(\alpha)\right\rangle + \left\langle \alpha, r_1^\sharp(\beta)\cdot_b \psi(x)\right\rangle \\
&= \left\langle \beta, \psi\left(x \cdot_b \phi r_1^\sharp(\alpha)\right)\right\rangle + \left\langle \alpha, \psi\left(\phi r_1^\sharp(\beta)\cdot_b x\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \beta, \psi\left(x \cdot_b r_2^\sharp \psi^*(\alpha)\right)\right\rangle + \left\langle \alpha, \psi\left(r_2^\sharp \psi^*(\beta)\cdot_b x\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \psi^*\beta, x \cdot_b r_2^\sharp \psi^*(\alpha)\right\rangle + \left\langle \psi^*\alpha, r_2^\sharp \psi^*(\beta)\cdot_b x\right\rangle \\
&= \left\langle ad^{*l}_{r_2^\sharp \psi^*(\alpha),b}\left(\psi^*\beta\right), x\right\rangle + \left\langle ad^{*r}_{r_2^\sharp \psi^*(\beta),b}\left(\psi^*\alpha\right), x\right\rangle \\
&= \left\langle \psi^*(\alpha) \star_{b,r_2} \psi^*(\beta), x\right\rangle.
\end{aligned}$$

这表明 $\psi^*\left(\alpha \star_{b,r_1} \beta\right) = \psi^*(\alpha) \star_{b,r_2} \psi^*(\beta)$。证毕。

结合定理 2.11，命题 3.4，定理 3.5 可得如下推论。

推论 3.6 设 $r_1, r_2 \in A \otimes A$ 是 B-代数 $\left(A, \{\cdot_b\}\right)$ 上的两个结合 r-矩阵。若 r_1 与 r_2 等价，则无穷小双代数 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r_1}\}\right)$ 与 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r_2}\}\right)$ 同构。

在本节末尾，我们给出一个具体的低维 B-代数及其结合 r-矩阵的例子。

例 3.7 取一个 2 维交换代数 $A = \mathbb{K}[x]/(x^2)$，基为 $\{1, x\}$，乘法满足 $1 \cdot 1 = 1$，$1 \cdot x = x$，$x \cdot x = 0$。取另一 2 维交换代数 $B = \mathbb{K}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$，基为 $\{1, \varepsilon\}$。定义 $\varepsilon : B \to A$ 为 $\varepsilon(1) = 1$，$\varepsilon(\varepsilon) = x$。由于 A 交换，$\varepsilon(b)$ 自然在 A 的中心，因此 (A, B, ε) 构成一个 B-代数。相应的乘法族为：对 $b = b_0 + b_1\varepsilon$，$a_1 \cdot_b a_2 = \varepsilon(b) a_1 a_2 = b_0 a_1 a_2 + b_1 x a_1 a_2$。取 $r = 1 \otimes x \in A \otimes A$，易知 $A_b(r) = 0$ 对任意 $b \in B$ 成立，即 r 是一个结合 r-矩阵。计算 $r^\sharp : A^* \to A$：设对偶基 $\{1^*, x^*\}$，则 $r^\sharp(1^*) = x$，$r^\sharp(x^*) = 1$。于是 A^* 上的 B-代数结构 $\{\star_b\}$ 为：对 $\alpha, \beta \in A^*$，

$$\alpha \star_b \beta = ad^{*l}_{r^\sharp(\alpha),b} \beta + ad^{*r}_{r^\sharp(\beta),b} \alpha.$$

具体计算得：

$$1^* \star_b 1^* = ad^{*r}_{x,b} 1^* + ad^{*l}_{1,b} 1^*,$$
$$\left\langle ad^{*l}_{x,b} 1^*, a \right\rangle = 1^*(a \cdot_b x),$$
$$\left\langle ad^{*r}_{1,b} 1^*, a \right\rangle = 1^*(1 \cdot_b a),$$

通过基计算可得 A^* 上的乘法，进而对偶得到 A 上的余乘法 $\Delta_{b,r}$。例如，$\Delta_{b,r}(x) = 0$。于是得到了一个由 r 诱导的 B-代数上非平凡的三角无穷小双代数 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r}\}\right)$。

4. *B*-代数上的无穷小双代数线性形变

本节研究 B-代数 $\left(A, \{\cdot_b\}\right)$ 上无穷小双代数的线性形变。

定义 4.1 设 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_b\}\right)$ 是一个 B-代数上的无穷小双代数。考虑一簇线性映射 $\{\Delta'_b : A \to A \otimes A\}_{b \in B}$，如果对每个参数 $t \in \mathbb{K}$，$b \in B, \left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_b + t\Delta'_b\}\right)$ 仍定义了一个 B-代数 A 上的无穷小双代数结构，则称对于每个 $b \in B$，$\{\Delta'_b\}$ 生成了 B-代数上无穷小双代数 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_b\}\right)$ 的一个线性形变。

令 $\kappa \in A \otimes A$ 是 B-代数 $\left(A, \{\cdot_b\}\right)$ 上的结合 r-矩阵，对于每个 $b \in B$，定义映射 $\{\star_{b,\kappa} : A^* \otimes A^* \to A^*\}$，$(\alpha, \beta) \mapsto ad^{*l}_{b,\kappa^\sharp(\alpha)} \beta + ad^{*r}_{b,\kappa^\sharp(\beta)} \alpha$，其对偶映射为 $\{\Delta_{b,\kappa}\}$。由于 B-代数 A 上的结合 r-矩阵 $r \in A \otimes A$ 可以诱导 $\mathcal{O}$-算子 $r^\sharp : A^* \to A$，我们可以得到以下结果。

命题 4.2 设 r 是 B-代数 $\left(A, \{\cdot_b\}\right)$ 上的一个结合 r-矩阵，对于每个 $b \in B$，相应的无穷小双代数为 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r}\}\right)$。若 κ 生成了 B-代数 A 上结合 r-矩阵 r 的线性形变，则 $\{\Delta_{b,\kappa}\}$ 生成了 B-代数 A 上无穷小双代数 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r}\}\right)$ 的一个线性形变。

证明： 由假设，κ 生成 r 的线性形变，即对每个 $t \in \mathbb{K}$，$r_t = r + t\kappa$ 仍是 B-代数 A 上的结合 r-矩阵。由命题 2.8 知，对任意 $b \in B$，$r_t^\sharp = r^\sharp + t\kappa^\sharp$ 是由 B-代数 A 上结合 r-矩阵 $r_t = r + t\kappa$ 诱导的 $\mathcal{O}$-算子。因此，$r_t^\sharp$ 诱导了 A^* 上的 B-代数结构 $\star_{b,r_t}$，其对偶即为 A 上的 B-余代数结构 Δ_{b,r_t}。由定义 3.1 知，$\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r_t}\}\right)$ 是无穷小双代数。又 $\Delta_{b,r_t} = \Delta_{b,r} + t\Delta_{b,\kappa}$，由定义 4.1 知，$\{\Delta_{b,\kappa}\}$ 生成了 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_{b,r}\}\right)$ 的一个线性形变。

定义 4.3 设 B-代数 A 上无穷小双代数 $\left(A, \{\cdot_b\}, \{\Delta_b\}\right)$ 的两个线性形变为 $\Delta^1_{b,t} = \Delta_b + t\Delta'_b$ 和 $\Delta^2_{b,t} = \Delta_b + t\Delta''_b$，如果存在 $a \in A$ 使得

$$\phi_{t,b} = id_A + t\left(ad^l_{a,b} - ad^r_{a,b}\right),\ \psi_{t,b} = id_A - t\left(ad^l_{a,b} - ad^r_{a,b}\right)$$

是 B-代数 A 上从 $\left(A, \{\cdot_b\}, \Delta^1_{b,t}\right)$ 到 $\left(A, \{\cdot_b\}, \Delta^2_{b,t}\right)$ 的弱同态，即对每个 $b \in B$ 和任意 $x, y \in A$ 有

$$\psi_{t,b}\left(\phi_{t,b}(x)\cdot_b y\right)=x\cdot_b \psi_{t,b}(y),\ \psi_{t,b}\left(x\cdot_b \phi_{t,b}(y)\right)=\psi_{t,b}(x)\cdot_b y,$$

且 $\psi_{t,b}$ 是余代数同态：$\left(\psi_{t,b}\otimes\psi_{t,b}\right)\circ\Delta_{b,t}^{1}=\Delta_{b,t}^{2}\circ\psi_{t,b}$，则称这两个线性形变是等价的。

关于 B-代数 A 上结合 r-矩阵的形变与相应无穷小双代数的形变之间的等价关系，我们有如下结论。

定理 4.4 设 $r_{b,t}^1=r+t\kappa_1$ 和 $r_{b,t}^2=r+t\kappa_2$ 是 B-代数 A 上结合 r-矩阵 $r\in A\otimes A$ 的两个线性形变。考虑 B-代数 A 上相应无穷小双代数 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_1}\}\right)$ 和 $\left(A,\{\cdot_b\},\{\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_2}\}\right)$ 的线性形变，则 $r_{b,t}^1$ 与 $r_{b,t}^2$ 等价当且仅当 $\Delta_{b,t}^{\kappa_1}=\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_1}$ 与 $\Delta_{b,t}^{\kappa_2}=\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_2}$ 等价。

证明： 设 $r_{b,t}^1=r+t\kappa_1$ 与 $r_{b,t}^2=r+t\kappa_2$ 是 B-代数 A 上结合 r-矩阵 r 的两个线性形变。由定理 2.11，$r_{b,t}^1$ 与 $r_{b,t}^2$ 等价当且仅当存在依赖于参数 t 的 B-代数同构 $\phi_t:A\to A$，使得 $\left(\phi_t,\phi_t^{-1}\right)$ 是从 $r_{b,t}^1$ 到 $r_{b,t}^2$ 的弱同构。将 ϕ_t 展开为形式幂级数 $\phi_t=id+t\phi+O\left(t^2\right)$，则 $\phi_t^{-1}=id-t\phi+O\left(t^2\right)$，其中 $\phi:A\to A$ 是线性映射。将 $\left(\phi_t,\phi_t^{-1}\right)$ 代入弱同构条件(定义 2.9)，比较 t 的一次项，得到：

$$(\phi\otimes id)(r)+\kappa_2=(id\otimes\phi)(r)+\kappa_1\ (\text{模}t),$$

$$\phi\left(a_1\cdot_b a_2\right)=\phi(a_1)\cdot_b a_2+a_1\cdot_b\phi(a_2),\ \forall a_1,a_2\in A,\ b\in B,$$

即 ϕ 是 B-代数 A 上的导子。根据结合 r-矩阵的形变理论(参见文献[15])，满足上述条件的导子 ϕ 必为内导子，即存在某个 $a\in A$ 使得 $\phi=ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r$。于是构造映射

$$\bar{\phi}_{t,b}=id+t\left(ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r\right),\ \bar{\psi}_{t,b}=id-t\left(ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r\right).$$

由于 ϕ_t 与 $\bar{\phi}_{t,b}$ 相差 $O\left(t^2\right)$，ϕ_t^{-1} 与 $\bar{\psi}_{t,b}$ 相差 $O\left(t^2\right)$，且 $\left(\phi_t,\phi_t^{-1}\right)$ 满足弱同构条件，故 $\left(\bar{\phi}_{t,b},\bar{\psi}_{t,b}\right)$ 满足弱同态条件至 t 的一阶。因为形变是线性的(仅含 t 的一次项)，所以 $\left(\bar{\phi}_{t,b},\bar{\psi}_{t,b}\right)$ 构成定义 4.3 中的弱同态。进而由定理 3.5 知，$\Delta_{b,t}^{\kappa_1}=\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_1}$ 与 $\Delta_{b,t}^{\kappa_2}=\Delta_{b,r}+t\Delta_{\kappa_2}$ 等价。

反之，若存在 $a\in A$ 使得 $\left(\bar{\phi}_{t,b},\bar{\psi}_{t,b}\right)$ 是定义 4.3 中的弱同态，则比较 t 的一次项可得 $\phi=ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r$ 满足上述导子条件及第一个等式，因此由定理 2.10 和 2.11 可知 $r_{b,t}^1$ 与 $r_{b,t}^2$ 等价。证毕。

例 4.5 例 3.7 中的 B-代数 $A=\mathbb{K}[x]/\left(x^2\right)$ 和 $r=1\otimes x$，取 $\kappa=x\otimes 1$，则 $r_t=r+t\kappa=1\otimes x+t\,x\otimes 1$，计算 $A_b\left(r_t\right)$ 可知其为零，故 κ 生成了 r 的一个线性形变。对应的 $\Delta_{b,\kappa}$ 由对偶得到：$\Delta_{b,\kappa}(1)=\varepsilon(b)(x\otimes 1-1\otimes x)$，$\Delta_{b,\kappa}(x)=0$。于是 $\Delta_{b,t}^{\kappa}=\Delta_{b,r}+t\Delta_{b,\kappa}$ 给出 $\Delta_{b,r}$ 的线性形变。若取另一形变 $\kappa'=-\kappa$，则 $r_t'=r-t\kappa$，易知 $\left(id-t\left(ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r\right),id+t\left(ad_{a,b}^l-ad_{a,b}^r\right)\right)$ 等价，其中 $a=1$，易知这两个形变等价，符合定理 4.4。

5. 总结与展望

本文将 Das [8]中关于无穷小双代数的形变理论推广到了 B-代数框架下。我们首先定义了 B-代数上的无穷小双代数，并证明了三角无穷小 B-双代数可由 B-代数上的结合 r-矩阵自然诱导得出。在此基础上，我们引入了弱同态的概念，并系统研究了这类双代数的线性形变。本文的核心结论是建立了 B-代数上结合 r-矩阵的形变与其诱导的三角无穷小 B-双代数形变之间的一一对应。这一工作不仅完善了 B-代数上 $\mathcal{O}$-算子形变理论的应用，也为进一步研究 B-代数上更一般的双代数结构提供了基础。

然而，在本文所研究的 B-代数上无穷小双代数的形变中，我们只对 B-余代数结构进行了线性形变，这与结合 r-矩阵的形变以及 $\mathcal{O}$-算子的形变是一致的，即只形变 r-矩阵或 $\mathcal{O}$-算子，而保持基代数不变。因此，考虑更一般的形变，即允许 B-代数结构也发生形变，值得进一步研究。

参考文献

[1] Hochschild, G. (1945) On the Cohomology Groups of an Associative Algebra. *The Annals of Mathematics*, **46**, 58-67. https://doi.org/10.2307/1969145

[2] Gerstenhaber, M. (1964) On the Deformation of Rings and Algebras. *The Annals of Mathematics*, **79**, 59-103. https://doi.org/10.2307/1970484

[3] Aguiar, M. (2000) Infinitesimal Hopf Algebras. In: New Trends in Hopf Algebra Theory (LA Falda, 1999). *Contemporary Mathematics*, **267**, 1-29.

[4] Baxter, G. (1960) An Analytic Problem Whose Solution Follows from a Simple Algebraic Identity. *Pacific Journal of Mathematics*, **10**, 731-742. https://doi.org/10.2140/pjm.1960.10.731

[5] Rota, G.C. (1969) Baxter Algebras and Combinatorial Identities. I. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **75**, 325-329. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1969-12156-7

[6] Cartier, P. (1972) On the Structure of Free Baxter Algebras. *Advances in Mathematics*, **9**, 253-265. https://doi.org/10.1016/0001-8708(72)90018-7

[7] Connes, A. and Kreimer, D. (2000) Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert Problem I: The Hopf Algebra Structure of Graphs and the Main Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, **210**, 249-273. https://doi.org/10.1007/s002200050779

[8] Das, A. (2020) Deformations of Associative Rota-Baxter Operators. *Journal of Algebra*, **560**, 144-180. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.05.016

[9] Bai, C., Guo, L. and Ni, X. (2012) O-Operators on Associative Algebras and Associative Yang-Baxter Equations. *Pacific Journal of Mathematics*, **256**, 257-289. https://doi.org/10.2140/pjm.2012.256.257

[10] Uchino, K. (2008) Quantum Analogy of Poisson Geometry, Related Dendriform Algebras and Rota-Baxter Operators. *Letters in Mathematical Physics*, **85**, 91-109. https://doi.org/10.1007/s11005-008-0259-2

[11] Staic, M.D. (2016) Secondary Hochschild Cohomology. *Algebras and Representation Theory*, **19**, 47-56. https://doi.org/10.1007/s10468-015-9561-8

[12] Staic, M.D. and Stancu, A. (2015) Operations on the Secondary Hochschild Cohomology. *Homology, Homotopy and Applications*, **17**, 129-146. https://doi.org/10.4310/hha.2015.v17.n1.a6

[13] Corrigan-Salter, B.R. and Staic, M.D. (2016) Higher-Order and Secondary Hochschild Cohomology. *Comptes Rendus Mathématique*, **354**, 1049-1054. https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.013

[14] Huang, D.L. (2023) Secondary Cohomology of O-Operators. *Advances in Applied Mathematics*, **12**, 3945-3953. https://doi.org/10.12677/aam.2023.129386

[15] Liu, L., Wang, J.J. and Lyu, J.F. (2025) Deformations of O-Operators on B-Algebras and Its Applications.