Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 78-86
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154138

带对数非线性项的Kirchhoff方程的规范解

陆瑞康，谢启林*

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2026年3月2日；录用日期：2026年3月26日；发布日期：2026年4月7日

摘　要

本文旨在研究一类带有对数非线性项的Kirchhoff型方程规范解的存在性问题。文章首先分析了与方程对应的能量泛函在不同参数范围下的几何结构，随后运用变分方法中的极小化序列技巧，结合集中紧性原理研究了该方程是否存在规范解。主要结果表明：在质量次临界和质量临界情形下，该方程存在一个全局基态解；而在质量超临界情形中，则存在一个局部基态解。对比目前现有的结果，本文的结论是对现有相关结果的推广。

关键词

规范解，基尔霍夫方程，对数非线性项

Normalized Solutions for Kirchhoff Equations with Logarithmic Nonlinearity

Ruikang Lu, Qilin Xie*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University and Technology, Guangzhou Guangdong

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 7, 2026

Abstract

This paper aims to investigate the existence of normalized solutions to a class of Kirchhoff-type equations with logarithmic nonlinearities. The paper first analyzes the geometric structure of the corresponding energy functional under different parameter regimes. Subsequently, variational methods, specifically the technique of minimizing sequences, are applied in conjunction with the concentration compactness principle to systematically explore whether normalized solutions exist for the equation. The main results show that in mass subcritical and mass critical cases, the equation

*通讯作者。

文章引用: 陆瑞康, 谢启林. 带对数非线性项的 Kirchhoff 方程的规范解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 78-86.
DOI: 10.12677/aam.2026.154138

admits a global ground state solution; whereas in the mass supercritical case, a local ground state solution exists. Compared to existing results, the conclusions of this paper extend the current findings in the field.

Keywords

Normalized Solutions, Kirchhoff Equation, Logarithmic Nonlinearity

1. 引言

Kirchhoff 方程是一类非线性偏微分方程，由 Kirchhoff 在 1883 年研究弹性弦横向振动的物理问题时所提出，是经典波动方程 d'Alembert's 方程的推广。目前，Kirchhoff 方程在流体动力学、波动力学等领域有着广泛的应用，并且在解决等离子体物理、电磁波传播等现代科学问题中显示出其重要性，因而具有重要的理论研究价值。由于 Kirchhoff 方程包含有一项非局部项，使其分析与经典的波动方程相比更为复杂。然而，在 Lion [1]引入了一种抽象函数分析框架之后，该方程引起了众多数学工作者的研究兴趣[2] [3]。近来，带对数非线性项的波动方程成为了一个新兴的研究热点。例如，Zloshchastiev [4]提出的一类量子波动方程，便揭示了对数非线性项对真空色散关系的修正机制。值得强调的是，尽管目前尚无法将这些方程逐一与具体的物理模型完全对应，但对这类非线性波动方程的拓展研究仍具有重要的理论价值。基于上述背景，本文主要研究一类带有对数非线性项的 Kirchhoff 方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u+\alpha u\log u^2+\mu|u|^{p-2}u \tag{1}$$

在质量约束条件为

$$\int_{\mathbf{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x=c$$

下的规范解的存在性，其中，a,b 是正常数，c 是正参数，$2<p<6$，$\alpha,\mu\in\mathbf{R}$，$\lambda\in\mathbf{R}$ 作为 Lagrange 乘数。

特别地，当 $a=1,b=0$ 时，方程(1)就退化成经典的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u=\lambda u+\alpha u\log u^2+\mu|u|^{p-2}u\text{。} \tag{2}$$

在 α,c,μ 和 p 取不同假设条件下，Shuai 和 Yang [5]证明了方程(2)的基态解和激发态解的存在性，同时研究了当 $\mu\to 0$ 时基态解的渐近行为。

如果将方程(1)中 $\alpha u\log u^2$ 替换成 $|u|^{q-2}u$，则它变成了带组合非线性项的 Kirchhoff 方程。关于这类方程的研究已经有非常多的结果。Li [6]等建立了在 $2<p<10/3$，$14/3<q\le 6$ 情况下，方程(1)存在多个规范解的结果，并且分别研究了当 $\mu\to 0$ 和 $b\to 0$ 时规范解的渐近行为。

值得提及的是，14/3 是 Kirchhoff 方程的 L^2-临界指数，其决定了方程对应泛函的几何结构。于是，在 $\alpha=1$、$c>0$ 和 $\mu>0$ 的假设下，p 的取值范围可划分为 $2<p<14/3$、$p=14/3$、$14/3<p<6$ 这三种情形。本文将运用变分法中的极小化序列技巧和集中紧性原理来证明方程(1)在这些情形中的规范解存在性。此外，本文还考虑了 $\alpha=1$、$c>0$、$\mu\le 0$ 以及 $p>2$ 的情形。

2. 预备知识及主要结果

虽然方程(1)在形式上具有与能量泛函

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) = &\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \frac{\alpha-\lambda}{2}\int_{\mathbf{R}^3}u^2\mathrm{d}x \\
&+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbf{R}^3}u^2\log u^2\mathrm{d}x \\
&-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbf{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

相关的变分结构，但是该能量泛函在常规的 Sobolev 空间上无法良好定义。而 Cazenave [7]提出了一种新的研究思路，可以考虑把能量泛函放在 Banach 空间

$$
W := \left\{u\in H^1\left(\mathbf{R}^3\right)\Big|\int_{\mathbf{R}^3}u^2\left|\log u^2\right|\mathrm{d}x<\infty\right\} \tag{3}
$$

上进行研究，该空间具备的范数定义为

$$
\|u\|_W := \|u\|_{H^1\left(\mathbf{R}^3\right)} + \inf\left\{k>0\Big|\int_{\mathbf{R}^3}A\left(k^{-1}|u|\right)\mathrm{d}x\le 1\right\},
$$

其中

$$
A(s) := \begin{cases} -s^2\log s^2, & \text{当 } 0\le s\le e^{-3}, \\ 3s^2+4e^{-3}s-e^{-6}, & \text{当 } e^{-3}<s。\end{cases} \tag{4}
$$

事实上，由文献[7]可知，$I_\lambda: W\to\mathbf{R}$ 是良好定义的且光滑的。因此，方程(1)的解可变为求能量泛函

$$
\begin{aligned}
I(u) := &\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_2^2 \\
&-\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbf{R}^3}u^2\log u^2\mathrm{d}x - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p
\end{aligned}
$$

在约束条件

$$
S_c := \left\{u\in W\Big|\int_{\mathbf{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x = c\right\}
$$

下的临界点来获得。

首先回顾 Gagliardo-Nirenberg [8] [9]不等式：对所有 $u\in H^1\left(\mathbf{R}^3\right)$，$2<t\le 6$，有下面不等式

$$
\|u\|_t^t \le C_t^t\,\|\nabla u\|_2^{\gamma_t t}\,\|u\|_2^{(1-\gamma_t)t}, \tag{5}
$$

其中 $C_t^t := t\Big/\left(2\|Q\|_2^{t-2}\right)$，且 $\gamma_t := 3(t-2)/(2t)$，其中 Q 满足

$$
\|\nabla Q\|_2^2 = \|Q\|_2^2 = 2\|Q\|_p^p\Big/p。
$$

下面介绍本文中的主要结果。定义 I 在 S_c 上的下确界为

$$
m(c) := \inf_{u\in S_c} I(u)。
$$

定理 1.1： 假设 $\alpha=1, c>0$。如果下列三个条件中有一个成立

1) $\mu\le 0$ 且 $p>2$；

2) $\mu>0$ 且 $2<p<14/3$；

3) $\mu>0, p=\overline{p}:=14/3$ 且 $c<\left(\frac{b\overline{p}}{4\mu C_{\overline{p}}^{\overline{p}}}\right)^{\frac{2}{\overline{p}(1-\gamma_{\overline{p}})}}$；

则下确界 $m(c)$ 存在一个极小化元 $u\in S_c$。此外，u 是正的、径向对称的、递减的函数，并且是方程(1)的全局基态解。

当 $\mu>0$ 且 $14/3<p<6$ 时，可容易推出 $\inf_{u\in S_c} I(u)=-\infty$。因此，在这种情况下，方程(1)没有全局基态解。受到文献[10]的启发，这里引入下列 Pohozaev 流形

$$\mathcal{P}_c=\left\{u\in S_c \middle| P(u)=0\right\},$$

其中

$$\begin{aligned}P(u)&:=a\|\nabla u\|_2^2+b\|\nabla u\|_2^4\\&-\mu\gamma_p\|u\|_p^p-\frac{3\alpha c}{2}\end{aligned}\tag{6}$$

且 $\gamma_p=3(p-2)/2p$。如果 $u\in W$ 是方程(1)的弱解，则 u 满足 Pohozaev 恒等式 $P(u)=0$。对任意 $u\in S_c$ 和 $s\in\mathbf{R}$，定义伸缩变换

$$s\star u(x):=e^{3s/2}u(e^s x),\quad x\in\mathbf{R}^3,$$

则

$$P(s\star u)=ae^{2s}\|\nabla u\|_2^2+be^{4s}\|\nabla u\|_2^4-\mu\gamma_p e^{p\gamma_p s}\|u\|_p^p-\frac{3\alpha c}{2}。$$

Pohozaev 流形 $\mathcal{P}_c$ 与下列的纤维映射紧密相关

$$\begin{aligned}\Psi_u(s):=I(s\star u)&=\frac{ae^{2s}}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{be^{4s}}{4}\|\nabla u\|_2^4\\&+\frac{\alpha}{2}\|u\|_2^2-\frac{3s\alpha}{2}\|u\|_2^2-\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbf{R}^3}u^2\log u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu e^{p\gamma_p s}}{p}\|u\|_p^p。\end{aligned}$$

通过直接的计算，可以得到对任意 $u\in S_c$ 和 $s\in\mathbf{R}$，有 $\Psi_u'(s)=P(s\star u)$。由此可见纤维映射 $\Psi_u(s)$ 的临界点可将函数投影至 Pohozaev 流形 $\mathcal{P}_c$ 上。因此，$\Psi_u(s)$ 的单调性与凸性将显著影响 $\mathcal{P}_c$ 的结构。为了寻找方程(1)的局部基态解，定义下列集合

$$V_{k_0}:=\left\{u\in S_c \middle| \|\nabla u\|_2^2<k_0\right\},$$

其中 $k_0<c$ 为常数，并且定义 I 在 V_{k_0} 上的下确界为

$$m_c:=\inf_{u\in V_{k_0}} I(u)。$$

定理 1.2：假设 $\alpha=1,\mu>0,14/3<p<6$。存在常数 $c_*>0$，使得当 $0<c\le c_*$ 时，下确界 m_c 存在一个局部极小化元 $u\in V_{k_0}$。此外，u 是正的、径向对称的函数，并且是方程(1)的局部基态解。

在本文中，我们使用以下符号：$L^p=L^p(\mathbf{R}^3)$ 表示赋范空间，其范数表示为 $\|u\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}=\|u\|_p$。而 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 表示常规的 Sobolev 空间，其范数表示为 $\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^3)}=\left(\int_{\mathbf{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$。$\rightharpoonup$ 和 $\to$ 分别表示在相关函数空间中的弱收敛和强收敛。

3. 相关引理

在本节中，首先给出定理 1.1 和定理 1.2 所需要的一些引理。定义函数

$$B(s):=s^2\log s^2+A(s),$$

其中，A 由式(4)所定义。由引理 1.2 [7]可知，A 是一个正的凸增函数，并且对于任意 $s>0$，存在一个常数 $K_q>0$，使得

$$B(s)\le K_q s^q,\ \forall\ q\in\left(2,\frac{10}{3}\right)。\tag{7}$$

另外，定义集合

$$V:=\left\{u\in L^1_{loc}\left(\mathbf{R}^3\right)\middle|A(|u|)\in L^1\left(\mathbf{R}^3\right)\right\}。$$

引理 2.1：(引理 2.1) [7]

1) V 是与 A 对应的 Orlicz 空间。V 是一个自反 Banach 空间，并且具备下列范数

$$\|u\|_V:=\inf\left\{k>0\middle|\int_{\mathbf{R}^3}A\left(k^{-1}|u|\right)\mathrm{d}x\le 1\right\}。$$

2) 对于任意 $u\in V$，有

$$\inf\left\{\|u\|_V,\|u\|_V^2\right\}\le\int_{\mathbf{R}^3}A(|u|)\mathrm{d}x$$
$$\le\sup\left\{\|u\|_V,\|u\|_V^2\right\}。$$

3) 如果 $u_n\to u$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中几乎处处收敛，并且 $\int_{\mathbf{R}^3}A(|u_n|)\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^3}A(|u|)\mathrm{d}x<\infty$，则当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n-u\|_V\to 0$。

定义

$$W_r:=W\cap H^1_r\left(\mathbf{R}^3\right),$$

其中 W 由式(3)所定义。因为 $H^1\left(\mathbf{R}^3\right)$ 和 V 都是自反的 Banach 空间，所以 W 也是一个自反的 Banach 空间。在定理 1.1 的证明中，引理 2.1 将保证极小化序列在 W_r 中是有界的且强收敛的。

引理 2.2：(命题 2.7、命题 3.1) [7]下列结论成立

1) $I\in\mathcal{C}^1(W,\mathbf{R})$ 且对于任意 $u\in W$，有 $DI(u)=Lu$，其中

$$Lu=-\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u$$
$$-\alpha u\log u^2-\mu|u|^{p-2}u。$$

2) 从 W_r 到 $L^2\left(\mathbf{R}^3\right)$ 的嵌入是紧的。

由于引理 2.1 保证了极小化序列在 W_r 中是有界的，故引理 2.2 可推出极小化序列在 $L^2\left(\mathbf{R}^3\right)$ 中强收敛。

4. 定理证明

定理 1.1 的证明：首先证明 $m(c)>-\infty$ 且

$$m(c)=m_r(c):=\inf_{u\in S_c\cap H^1_r\left(\mathbf{R}^3\right)}I(u)$$

对于情况 1：$\mu\le 0$ 且 $p>2$。令 $2<q<10/3$，对于任意 $u\in W$，由式(7)可以推出

$$
\begin{aligned}
I(u) \geq & \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} A(|u|)\mathrm{d}x \\
& -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} B(|u|)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\|u\|_p^p \\
\geq & \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4-\frac{1}{2}K_q\|u\|_q^q \\
\geq & \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4-\frac{1}{2}C_q^q K_q c^{\frac{q\left(1-\gamma_q\right)}{2}}\|\nabla u\|_2^{q\gamma_q}。
\end{aligned} \tag{8}
$$

对于情况 2： $\mu>0$ 且 $2<p<14/3$。类似式(8)，对于任意 $u\in W$，可以得到

$$
\begin{aligned}
I(u) \geq & \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4-\frac{1}{2}C_q^q K_q c^{\frac{q\left(1-\gamma_q\right)}{2}}\|\nabla u\|_2^{q\gamma_q} \\
& -\frac{\mu}{p}C_p^p c^{\frac{p\left(1-\gamma_p\right)}{2}}\|\nabla u\|_2^{p\gamma_p}。
\end{aligned} \tag{9}
$$

对于情况 3： $\mu>0, p=\bar{p}=\dfrac{14}{3}$ 且 $c<\left(\dfrac{b\bar{p}}{4\mu C_{\bar{p}}^{\bar{p}}}\right)^{\frac{2}{\bar{p}\left(1-\gamma_{\bar{p}}\right)}}$。同样类似式(8)，对于任意 $u\in W$，可以得到

$$
\begin{aligned}
I(u) \geq & \left(\frac{b}{4}-\frac{\mu}{\bar{p}}C_{\bar{p}}^{\bar{p}}c^{\frac{\bar{p}\left(1-\gamma_{\bar{p}}\right)}{2}}\right)\|\nabla u\|_2^4 \\
& -\frac{1}{2}C_q^q K_q c^{\frac{q\left(1-\gamma_q\right)}{2}}\|\nabla u\|_2^{q\gamma_q}
\end{aligned} \tag{10}
$$

因为对于任意 $q\in(2,10/3)$，有 $q\gamma_q<2$，所以在定理 1.1 的假设条件下， I 在 S_c 上是强制的。于是，$m(c)>-\infty$。

接下来证明 $m(c)=m_r(c)$，由于 $m(c)\leq m_r(c)$ 是显然的，所以只需证明 $m(c)\geq m_r(c)$ 即可。假设 $\{u_n\}\subset S_c$ 是 $m(c)$ 的一个极小化序列，设 u_n^* 为 u_n 的对称递减重排。由章节 3.3 的(iv)~(v)和引理 7.17 [11] 可知

$$
\int_{\mathbf{R}^3}\left|\nabla u_n^*\right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbf{R}^3}\left|\nabla u_n\right|^2 \mathrm{d}x,
$$

$$
\int_{\mathbf{R}^3}\left|u_n^*\right|^r \mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}\left|u_n\right|^r \mathrm{d}x, \forall r\in[2,6]。
$$

由前面的介绍可知 A 和 B 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的正的、凸的、递增的函数，结合章节 3.3 的(v) [11]，可以得到

$$
\int_{\mathbf{R}^3} A\left(u_n^*\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3} A\left(u_n\right)\mathrm{d}x,
$$

$$
\int_{\mathbf{R}^3} B\left(u_n^*\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3} B\left(u_n\right)\mathrm{d}x,
$$

这意味着

$$
\int_{\mathbf{R}^3}\left|u_n^*\right|^2 \log\left|u_n^*\right|^2 \mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}\left|u_n\right|^2 \log\left|u_n\right|^2 \mathrm{d}x。
$$

因此

$$
m_r(c)=\inf_{u\in S_c\cap H_r^1\left(\mathbf{R}^3\right)} I(u)\leq \inf_{u\in S_c} I(u)=m(c)。
$$

最后证明 $m(c)$ 在 S_c 中是可达的。假设 $\{u_n\}\subset S_c\cap H_r^1(\mathbf{R}^3)$ 是 $m(c)$ 的一个极小化序列。由式(8)~(10)可以推得 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中是有界的，并且 $\left\{\int_{\mathbf{R}^3}A(|u_n|)\mathrm{d}x\right\}$ 也是有界的。根据引理 2.1，可以得到 $\{u_n\}$ 在 V 中是有界的，接着 $\{u_n\}$ 在 W_r 中也是有界的。因此，$u_n\rightharpoonup u$ 在 W_r 中弱收敛。再结合引理 2.2，有 $u_n\to u$ 在 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 中强收敛，并且 $u_n(x)\to u(x)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中几乎处处收敛。当 $\mu>0$ 时，我们可以推得

$$B(|u_n|)\to B(|u|)\text{在}L^1(\mathbf{R}^3)\text{中强收敛,}$$

$$u_n\to u\text{在}L^p(\mathbf{R}^3)\text{中强收敛。}$$

因此

$$\begin{aligned}m(c)\le I(u)&=\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4+\frac{1}{2}\|u\|_2^2\\&-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}u^2\log u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\|u\|_p^p\\&\le\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|\nabla u_n\|_2^2+\frac{b}{4}\|\nabla u_n\|_2^4+\frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}A(|u_n|)\mathrm{d}x\right)\\&-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}B(|u|)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\|u\|_p^p\\&\le\liminf_{n\to\infty}I(u_n)=m(c)\text{。}\end{aligned}\tag{11}$$

于是，$I(u)=m(c)$，$u_n\to u$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中强收敛和 $A(|u_n|)\to A(|u|)$ 在 $L^1(\mathbf{R}^3)$ 中强收敛。结合引理 2.1，可以得到 $u_n\to u$ 在 V 中强收敛。因此，$u_n\to u$ 在 W_r 中强收敛。

当 $\mu\le 0$ 时，可以采用相同的论证。通过弱下半连续性，有

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbf{R}^3}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)\le-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbf{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x\text{。}$$

类似式(11)，可以得到 $u_n\to u$ 在 W_r 中强收敛。由于 u 是方程(1)的一个非负非平凡弱解，利用椭圆正则性理论可以得到 $u\in\mathcal{C}^2(\mathrm{R}^3)$。最后根据强最大值原理[12]可推出 $u>0$。证毕。

定理 1.2 的证明：首先证明下列结论。

当 $\mu>0$ 且 $14/3<p<6$ 时，存在一个常数 c_*，如果 $P(u)\le 0$ 且 $\|\nabla u\|_2^2=k_0$，则 $c\ge c_*$。此外，如果 $P(u)\le 0$ 且 $c<c_*$，则 $\|\nabla u\|_2^2\ne k_0$。

由 $P(u)\le 0$ 可得

$$a\|\nabla u\|_2^2+b\|\nabla u\|_2^4\le\mu\gamma_p\|u\|_p^p+\frac{3}{2}c\text{。}$$

结合 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$a\|\nabla u\|_2^2+b\|\nabla u\|_2^4\le\mu\gamma_pC_p^pc^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}}\|\nabla u\|_2^{p\gamma_p}+\frac{3}{2}c\text{。}$$

令 $\|\nabla u\|_2^2=k_0$，则

$$ak_0+bk_0^2\le\mu\gamma_pC_p^pc^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}}k_0^{\frac{p\gamma_p}{2}}+\frac{3}{2}c\text{。}$$

存在一个 c_*，使得当 $c \ge c_*$ 时，上述不等式成立。由此可推出如果 $P(u) \le 0$ 且 $c < c_*$，则 $\|\nabla u\|_2^2 \ne k_0$。

接下来证明 m_c 是在 V_{k_0} 中是可达的。设 $\{u_n\}$ 是 m_c 的最小化序列，类似于定理 1.1 的证明，可以推得 $u_n \to u$ 在 W_r 中强收敛。因此，只需要证明 $u \in V_{k_0}$ 即可。事实上，如果 $\|\nabla u\|_2^2 = k_0$ 且 $0 < c < c_*$，由前面的证明直接推得 $P(u) > 0$，故存在 $t_0 < 0$ 使得 $t_0 \star u \in V_{k_0}$ 且 $I(t_0 \star u) < I(u) = m_c$。这与 m_c 的定义矛盾。

另一方面，如果 $\|\nabla u\|_2^2 = k_0$ 且 $c = c_*$，可以分为三种情况讨论。

(i)：如果 $P(u) < 0$，类似于前面的证明，可以得到 $c > c_*$，与假设矛盾。

(ii)：如果 $P(u) = 0$，由 Gagliardo-Nirenberg 不等式可以得到

$$a\|\nabla u\|_2^2 + b\|\nabla u\|_2^4 \le \mu\gamma_p C_p^p c^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}} \|\nabla u\|_2^{p\gamma_p} + \frac{3}{2}c,$$

其中，等式仅在 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最佳常数取得时成立，由文献[9]可知 u 满足

$$\|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_2^2,$$

这与 $k_0 < c$ 矛盾。因此，

$$a\|\nabla u\|_2^2 + b\|\nabla u\|_2^4 < \mu\gamma_p C_p^p c^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}} \|\nabla u\|_2^{p\gamma_p} + \frac{3}{2}c。$$

因为 $\|\nabla u\|_2^2 = k_0$，可以得到 $c > c_*$，与假设矛盾。

(iii)：如果 $P(u) > 0$，则存在 $t_1 < 0$ 使得 $t_1 \star u \in V_{k_0}$ 且 $I(t_0 \star u) < I(u) = m_c$。与 m_c 的定义矛盾。

综上所述，$u \in V_{k_0}$ 且 $I(u) = m_c$。最后，结合 $\|\nabla u\|_2^2 < k_0$ 和命题 A.1 [13]，可以得出 u 是 I 在 S_c 上的正的、径向对称的临界点。证毕。

基金项目

广东省自然科学基金资助项目(2026A1515012458; 2022A1515010644)。

参考文献

[1] Lions, J.L. (1978) On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. In: *North-Holland Mathematics Studies*, Elsevier, 284-346. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)70870-3

[2] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A. and Ma, T.F. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[3] Lei, C.Y., Liao, J.F. and Tang, C.L. (2015) Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type of Problems with Singularity and Critical Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **421**, 521-538. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.07.031

[4] Zloshchastiev, K.G. (2010) Logarithmic Nonlinearity in Theories of Quantum Gravity: Origin of Time and Observational Consequences. *Gravitation and Cosmology*, **16**, 288-297. https://doi.org/10.1134/s0202289310040067

[5] Shuai, W. and Yang, X.L. (2023) Normalized Solutions for Logarithmic Schrödinger Equation with a Perturbation of Power Law Nonlinearity.

[6] Li, G.B., Luo, X. and Yang, T. (2022) Normalized Solutions to a Class of Kirchhoff Equations with Sobolev Critical Exponent. *Annales Fennici Mathematici*, **47**, 895-925. https://doi.org/10.54330/afm.120247

[7] Cazenave, T. (1983) Stable Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **7**, 1127-1140. https://doi.org/10.1016/0362-546x(83)90022-6

[8] Stuart, C.A. (1981) Bifurcation from the Continuous Spectrum in the L^2 Theory of Elliptic Equations on R^N. In: *Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Liguori, 231-300.

[9] Weinstein, M.I. (1983) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. https://doi.org/10.1007/bf01208265

[10] Bartsch, T. and Soave, N. (2017) A Natural Constraint Approach to Normalized Solutions of Nonlinear Schrödinger

Equations and Systems. *Journal of Functional Analysis*, **272**, 4998-5037. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.01.025

[11] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) Analysis Graduate Studies in Mathematics Vol 14. American Mathematical Society.

[12] Vázquez, J.L. (1984) A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations. *Applied Mathematics & Optimization*, **12**, 191-202. https://doi.org/10.1007/bf01449041

[13] Mederski, J. and Schino, J. (2022) Least Energy Solutions to a Cooperative System of Schrödinger Equations with Prescribed L^2-Bounds: At Least L^2-Critical Growth. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article 10.