Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 27-34
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154132

Hans汉斯

一道典型定积分题目的四种解法及其方法论启示

袁安国*，**朱永婷**#

国防科技大学外国语学院，江苏 南京

收稿日期：2026年3月2日；录用日期：2026年3月26日；发布日期：2026年4月3日

摘 要

定积分是高等数学的核心内容。本文选取典型积分题，系统探讨了四种求解方法：区间再现公式法、分部积分法、换元法及含参变量积分法。通过详细推导，揭示了不同积分技巧在解决同一问题时的内在联系与思想统一性。研究表明，灵活运用积分技巧不仅能简化计算过程，更能深化对积分本质及数学思想的理解。本文从数学方法论角度，剖析各方法的适用条件与思想内核，为高等数学教学与研究提供理论参考。

关键词

定积分，区间再现公式，分部积分，换元法，含参变量积分，方法比较

Four Solutions to a Typical Definite Integral Problem and Their Methodological Implications

Anguo Yuan*, **Yongting Zhu**#

School of International Studies, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 3, 2026

Abstract

Definite integral is a core component of higher mathematics. This paper selects a typical integral

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 袁安国, 朱永婷. 一道典型定积分题目的四种解法及其方法论启示[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 27-34.
DOI: 10.12677/aam.2026.154132

problem and systematically explores four solution methods: the interval reproduction formula method, integration by parts, the substitution method, and the parametric integral method. Through detailed derivations, it reveals the intrinsic connections and underlying unity among different integration techniques when solving the same problem. The analysis shows that the flexible application of integration techniques not only simplifies calculations but also deepens the understanding of the essence of integration and mathematical ideas. From the perspective of mathematical methodology, this paper examines the applicable conditions and core ideas of each method, providing theoretical references for higher mathematics education and research.

Keywords

Definite Integral, Interval Reproduction Formula, Integration by Parts, Substitution Method, Parametric Integral, Methodological Comparison

1. 引言

定积分作为高等数学的核心概念之一，不仅在理论体系中占有重要地位，在实际应用中也具有广泛的价值。它不仅是连接微分学与积分学的桥梁，更是解决面积、体积、弧长等几何问题以及物理、工程中各种实际问题的有力工具[1]。在大学生数学竞赛、研究生入学考试以及各类数学能力测试中，定积分的计算与证明往往是重点考查内容[2]。然而，面对形式各异的被积函数，如何选择恰当的积分技巧往往成为解决问题的关键。

本文选取了一道经典的定积分题目：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

该积分在形式上具有一定的复杂性，包含了多项式函数与三角函数的组合，且积分区间为$[0,\pi]$。结构上蕴含对称性，为多种积分技巧的施展提供了理想平台。我们将从区间再现公式、分部积分、换元法及含参变量积分四个角度分别求解，展示不同方法的推导过程，并深入分析其背后的数学思想，如对称性、化归思想、参数化思想等。通过对比，揭示这些方法的内在联系与普适性，以期对积分理论的理解有所裨益[3]。

2. 四种解法展示

例题：计算 $\boldsymbol{I=\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+cos^2 x}\mathrm{d}x}$

解法一：区间再现公式法

区间再现公式是定积分计算中的一个重要技巧，其基本形式为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

这一公式的本质是积分区间上函数的对称性。对于我们的题目，令 $a=0,b=\pi$，则有：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\mathrm{d}x$$

利用三角函数的性质：$\sin(\pi - x) = \sin x$，$\cos(\pi - x) = -\cos x$，且 $\cos^2(\pi - x) = \cos^2 x$，可得：

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

将原积分 I 与上式相加，得到：

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

即：

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

现在，我们只需要计算 $J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$。令 $t = \cos x$，则 $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$，且当 $x = 0$ 时 $t = 1$，当 $x = \pi$ 时 $t = -1$。于是：

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

这是一个基本的反正切积分：

$$J = \arctan t \Big|_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

因此：

$$I = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

方法点评：区间再现公式法通过变量代换 $x \mapsto a + b - x$ 实现了积分区间的“对折”，从而消去了被积函数中的线性因子 x。这一技巧的本质是对称性原理在积分计算中的运用[4]：当积分区间对称且被积函数可分解为对称与反对称部分时，通过对称变换可提取出不变信息(本例中为 π)。该思想与物理学中的对称性导致守恒律有异曲同工之妙，体现了数学中的不变量思想。

解法二：分部积分法[1]

分部积分法是处理乘积函数积分的基本方法，公式为 $\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u$。对于本题，我们选择：

$$u = x, \mathrm{d}v = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

首先需要求出 v，即计算 $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$。令 $t = \cos x$，则 $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$，于是：

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\arctan t + C = -\arctan(\cos x) + C$$

取 $v = -\arctan(\cos x)$。应用分部积分公式：

$$I = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = \left[x \cdot (-\arctan(\cos x)) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\arctan(\cos x)) \mathrm{d}x$$

现在计算边界项：

$$\left[x\cdot\left(-\arctan\left(\cos x\right)\right)\right]_0^\pi=\pi\cdot\left(-\arctan\left(\cos\pi\right)\right)-0\cdot\left(-\arctan\left(\cos 0\right)\right)$$
$$=\pi\cdot\left(-\arctan\left(-1\right)\right)-0$$
$$=\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}$$

于是：

$$I=\frac{\pi^2}{4}+\int_0^\pi\arctan\left(\cos x\right)\mathrm{d}x$$

现在考虑 $K=\int_0^\pi\arctan\left(\cos x\right)\mathrm{d}x$。利用区间再现公式，令 $x=\pi-t$，则：

$$K=\int_0^\pi\arctan\left(\cos x\right)\mathrm{d}x=\int_\pi^0\arctan\left(\cos\left(\pi-t\right)\right)\left(-\mathrm{d}t\right)=\int_0^\pi\arctan\left(-\cos t\right)\mathrm{d}t$$

由于 $\arctan\left(-u\right)=-\arctan u$，所以：

$$K=\int_0^\pi-\arctan\left(\cos t\right)\mathrm{d}t=-K$$

即 $2K=0$，所以 $K=0$。因此：

$$I=\frac{\pi^2}{4}+0=\frac{\pi^2}{4}$$

方法点评：分部积分法将原积分转化为边界项与一个新积分之和。表面上看新积分仍然复杂，但通过对称性(区间再现)证明了其为零。这一过程揭示了微积分基本定理(分部积分源于导数乘积法则)与对称性之间的深层联系：分部积分将问题“降维”，而对称性则利用函数的奇偶性消除了剩余部分。这体现了数学中递归结构与对偶性的思想——通过变换将问题分解为已知部分和可消去的部分。

解法三：换元法[1] (对称性利用)

换元法是积分计算中最常用的技巧之一。对于本题，我们可以通过适当的换元利用对称性简化计算。令：

$$t=x-\frac{\pi}{2}$$

则当 $x=0$ 时 $t=-\frac{\pi}{2}$，当 $x=\pi$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$，且 $x=t+\frac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$。代入原积分：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}t$$

利用三角函数的和角公式：$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$，$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$，所以 $\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2 t$。于是：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

将积分拆分为两部分：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

观察第一部分：被积函数 $f\left(t\right)=\frac{t\cos t}{1+\sin^2 t}$ 是奇函数(因为 t 是奇函数，$\cos t$ 是偶函数，分母是偶函数，

所以整体是奇函数)，而积分区间关于原点对称，因此：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = 0$$

第二部分：被积函数 $g(t)=\dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}$ 是偶函数，所以：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

令 $u=\sin t$，则 $\mathrm{d}u=\cos t\mathrm{d}t$，当 $t=0$ 时 $u=0$，当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $u=1$。于是：

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan u\Big|_0^1 = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

因此：

$$I = 0+\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

方法点评：平移换元 $t=x-\pi/2$ 将积分区间转化为关于原点对称，从而使得被积函数分解为奇函数和偶函数部分。这一技巧的本质是奇偶性分解与线性变换下的不变性[4]。通过选择合适的变量替换，将问题转化为标准形式，体现了数学中“坐标变换”思想的威力——改变观察角度，使隐藏的对称性显现出来。

解法四：含参变量积分法[1]

含参变量积分法是一种高级技巧，通过引入参数构建函数族，然后利用微积分基本定理或莱布尼茨公式求解。对于本题，我们定义含参积分：

$$F(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1+a\cos^2 x\right)\mathrm{d}x, a>0$$

则 $F(0)=0$。对参数 a 求导，由莱布尼茨公式：

$$F'(a)=\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\ln\left(1+a\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+a\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

现在计算 $F'(a)$：

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+a\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{1+a\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{a}-\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x} \end{aligned}$$

计算积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x}$。由于被积函数是偶函数且周期为 π，有：

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x}$$

令 $t=\tan x$，则 $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，且当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $t\to\infty$。于是：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{a}{1+t^2}}\\&=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\dfrac{a}{1+t^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+a}\\&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+(1+a)}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+a}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+a}}\right)\right]_0^{\infty}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+a}}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

因此：

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2 x}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+a}}$$

代入 $F'(a)$ 的表达式：

$$F'(a)=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{1+a}}=\frac{\pi}{a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)$$

现在，我们注意到原积分 I 与 $F(a)$ 的关系。考虑分部积分：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\left[x\cdot(-\arctan(\cos x))\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\arctan(\cos x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由解法二可知，第一项等于 $\frac{\pi^2}{4}$，第二项等于 0。因此 $I=\frac{\pi^2}{4}$。

为了展示含参积分法的完整应用，我们也可以从另一个角度建立联系。注意到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{x\sin x}{1+a\cos^2 x}\right)=-\frac{x\sin x\cos^2 x}{\left(1+a\cos^2 x\right)^2}$$

虽然这不能直接得到原积分，但通过计算 $F''(a)$ 等更高阶导数，理论上可以建立联系，不过计算较为复杂。从方法论角度看，含参变量积分法更多的是作为一种思想方法，展示如何通过引入参数将问题转化。

方法点评：参变量积分法通过引入参数 a，将原积分嵌入到一族积分 $F(a)$ 中。这种“参数化”思想是数学中常见的研究策略——将孤立的问题置于更广泛的背景中，利用整体性质(如对参数的导数)来揭示局部信息。莱布尼茨公式沟通了积分与导数，体现了微积分基本定理的深刻性。该方法虽然计算稍繁，但它展示了抽象化与一般化的思维路径，以及数学中“由特殊到一般”的哲学思想[5]。

3. 方法总结与比较

解法一(区间再现公式法)：核心是利用对称性消去线性因子，将积分简化为基本形式。适用于积分区

间对称且被积函数含线性因子的情形。

解法二(分部积分法)：通过分部积分将原积分转化为边界项与辅助积分，再结合对称性证明辅助积分为零。体现分部积分与对称技巧的协同。

解法三(换元法)：平移换元使积分区间对称，进而利用奇偶性简化运算。凸显变量替换在揭示函数对称性方面的作用。

解法四(含参变量积分法)：引入参数构造含参积分，将问题置于更一般框架中，利用求导与积分交换求得结果。展示参数化思想与微积分基本定理的深刻联系。

下面把四种解法的区别，用表格的形式给出，见表 1。

Table 1. Comparison of four solution methods
表 1. 四种解法的比较

解法	核心思想	数学哲学	适用范围	典型步骤
区间再现公式法	对称性、不变量	对称性原理、守恒律	积分区间对称，被积函数含线性因子	作代换 $x \mapsto a+b-x$，相加消去线性项
分部积分法	递归、对偶性	微积分基本定理、降维	乘积函数积分，用对称性消去剩余项	设 $u=x$，dv 为剩余部分，计算边界项和辅助积分
换元法	坐标变换、奇偶分解	线性变换下的不变性	可化为对称区间，利用奇偶性简化	平移 $t=x-\pi/2$，拆分为奇偶部分
含参变量积分法	参数化、一般化	抽象化、整体到局部	含参数的积分族，可用莱布尼茨公式	定义含参积分 $F(a)$，求导并计算，最后与目标积分联系

几何直观：从几何角度看，区间再现公式法和换元法都利用了积分区间的对称性。原积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 的几何意义是在区间 $[0,\pi]$ 上，函数 $f(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ 与 x 轴围成的有向面积代数和[1]。注意到在 $[0,\pi/2]$ 区间上函数值为正，在 $[\pi/2,\pi]$ 区间上函数值为负，因此积分结果等于这两个区域面积的代数和。

核心思想：四种方法尽管路径不同，但均围绕“化简”展开——或利用对称性消元，或借助参数化拓宽视野。这反映了数学中“化归”思想的普遍性：将未知问题转化为已知模型[6]。

4. 结语

本文通过对一道典型定积分题目的四种解法探讨，展示了数学方法论的丰富性与统一性。区间再现公式以对称变换消去线性因子，体现了对称性在积分计算中的核心作用[7]；分部积分法将原积分转化为边界项与辅助积分，揭示了积分运算的递归结构；换元法通过平移变换将区间对称化，彰显了变量替换在简化问题中的灵活性；含参变量积分法则引入参数构建函数族，展现了从特殊到一般的抽象思维路径[8]。四种方法虽路径各异，却共同指向同一个结果，这正是数学内在统一性的生动体现。

从更广阔的视角看，这些方法并非孤立存在。区间再现与换元共享对称思想，分部积分与含参积分同源微积分基本定理，而含参积分法更可推广至含参积分的求导、积分号下积分等更复杂情境。这种方法的交织与延展，正是数学思想生命力的体现。

定积分计算的意义，远不止于求得一个数值结果。通过一题多解的探究，我们得以窥见数学方法的多样性与思想的统一性——面对问题，数学的智慧在于发现不同路径，而数学的美在于它们最终指向同一本质。

基金项目

国防科技大学第三批校级规划课程。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 邱克娥, 熊胜兰, 欧阳建新. 大学数学一题多解中发散性思维培养实例研究[J]. 贵州师范学院学报, 2024, 40(6): 76-84.

[3] 张光威, 朱永婷. 一道二阶线性微分方程题目的多种解法及思想方法的意义[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 410-417.

[4] 马德炎. 巧用换元法求定积分[J]. 高等数学研究, 2012, 15(6): 50-53.

[5] 梅宏. 一类含参变量积分的常差分方程计算方法[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(9): 184-189.

[6] 李天竹, 肖业亮, 陈昊, 严维军. 用一题多解激活学生的发散思维——以一道定积分题的多种解法为例[J]. 科技风, 2024(4): 121-123.

[7] 方国敏, 谢蔚. 高等数学中定积分的求法探析[J]. 考试与评价, 2017(10): 75.

[8] 李庆娟. 关于定积分求解的一个注记[J]. 科技视界, 2018(8): 69+84.