Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 441-449
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154172

Hans汉斯

小速度下带调和外势的Boson Star方程的极限行为

田　涛

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2026年3月8日；录用日期：2026年4月2日；发布日期：2026年4月10日

摘　要

在本文中，我们考虑Boson star方程

$$i\partial_t\psi=\left(\sqrt{-\Delta+m^2}\right)\psi-\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)\psi+V(x)\psi \text{ 在 } \mathbb{R}^3 \text{ 上。}$$

其中$\psi(t,x)=e^{it\mu}\varphi(x-vt)$为行波孤立子，$v\in\mathbb{R}^3$表示速度。众所周知，Fröhlich、Jonsson和Lenzmann证明了当$|v|<1$时，存在一个临界常数$N_c(v)$，使得行波存在当且仅当$0<N<N_c(v)$，其中N表示粒子数。在本文中，我们考虑$v=(\beta,0,0)$（其中$0<\beta<1$），并令$N_c(\beta)=N_c(v)|_{v=(\beta,0,0)}$。基于这一事实，当$\beta\to0^+$时，对于满足$\|\varphi_\beta\|_{L^2}^2=(1-\beta)N_c(\beta)$的推进基态$\varphi_\beta$，我们计算其极限行为。

关键词

极限行为，推进基态，Boson Star方程

Limit Behavior of the Boson Star Equation with a Harmonic External Potential at Small Velocity

Tao Tian

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

文章引用: 田涛. 小速度下带调和外势的 Boson Star 方程的极限行为[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 441-449.
DOI: 10.12677/aam.2026.154172

Abstract

In this paper, we consider the Boson star equation

$$i\partial_t\psi=\left(\sqrt{-\Delta+m^2}\right)\psi-\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)\psi+V(x)\psi\text{, on }\mathbb{R}^3$$

where $\psi(t,x)=e^{it\mu}\varphi(x-vt)$ refers to the travelling solitary waves, $v\in\mathbb{R}^3$ denotes the velocity. It is well known that Fröhlich, Jonsson, and Lenzmann proved that for $|v|<1$, there exists a critical constant $N_c(v)$ such that travelling waves exist if and only if $0<N<N_c(v)$, where N denotes the particle number. In the present paper, we consider $v=(\beta,0,0)$ (where $0<\beta<1$) and set $N_c(\beta)=N_c(v)|_{v=(\beta,0,0)}$. Based on this fact, as $\beta\to0^+$, we compute the limit behavior of the boosted ground state φ_β satisfying $\|\varphi_\beta\|_{L^2}^2=(1-\beta)N_c(\beta)$.

Keywords

Limit Behavior, Boosted Ground State, Boson Star Equation

1. 研究背景及意义

在本文中，我们研究玻色星方程

$$i\partial_t\psi=\left(\sqrt{-\Delta+m^2}\right)\psi-\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)\psi+V(x)\psi\text{ 在 }\mathbb{R}^3\text{ 上。}\tag{1.1}$$

该方程可用于描述玻色星的动力学行为的理论与方法[1]-[4]。其中，算子 $\sqrt{-\Delta+m^2}$ 表示动能算子，这里 $m\geq0$；卷积核 $\frac{1}{|x|}$ 在合适的物理单位下代表牛顿引力势。

其中外势 $V(x)$ 将满足：

(V₁) $V\in C^1$ 是单调递增且非负的径向对称函数；

(V₂) 存在常数 $C_0>0$ 且 $p\geq2$，使得

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\nabla V(x)\cdot x}{p|x|^p}=C_0;$$

(V₃) 存在常数 $C_1\geq0$ 且 $0<\alpha<p$，使得

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\nabla V(x)\cdot x-C_0p|x|^p}{|x|^\alpha}=C_1;$$

(V₄) 存在常数 $C_2\geq0$，使得

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{V(x)-C_0|x|^p}{|x|^\alpha}=C_2 .$$

满足上述条件的外势$V(x)$有很多类，例如调和外势$|x|^2$以及更一般的多项式型外势$\sum_{i=1}^{n}a_i|x|^{p_i}$ (其中$a_i>0$，$p_i\geq 2$)，本文主要讨论调和外势，即$V(x)=|x|^2$。

已有大量文献致力于研究方程(1.1)。文献[5] [6]研究了柯西问题解的适定性；文献[7] [8]探讨了有限时间爆破现象(这标志着玻色星“引力坍缩”的开始)；文献[9] [10]的作者则研究了散射问题。其他相关工作可参见[11]-[17]及其参考文献。

在本文中，我们重点研究形如

$$\psi(t,x)=\mathrm{e}^{it\mu}\varphi(x-vt). \tag{1.2}$$

的行波孤立子，其中$\mu\in\mathbb{R}$，行波速度$v\in\mathbb{R}^3$，$|v|$对应其速率。

我们注意到，行波在反应扩散方程中得到了广泛研究，可参见文献[18]-[20]及其参考文献。关于方程(1.1)的行波，已有一些研究结果：Fröhlich、Jonsson 和 Lenzmann [12]证明了当$|v|<1$时行波孤子(也称为推进基态)的存在性($V(x)=0$)。

引理 1.1 ([12]，定理 1.2)假设$m>0$且$0\leq\beta<1$。则：

(i) 当$0<N<N_c(\beta)$时，问题(1.1)存在极小元$\varphi_\beta\in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$。

(ii) 当$N\geq N_c(\beta)$时，问题(1.1)不存在极小元。

随后在文献[21]中，他们进一步研究了当$|v|\ll 1$时行波孤子在外场势中的有效运动。Bellazzini、Georgiev、Lenzmann 和 Visciglia 在[11]证明了当$|v|\geq 1$时行波孤子不存在。文献[22]研究了在v固定、$N\nearrow N_c(v)$时推进基态的渐近行为。文献[23]假设$v=(\beta,0,0)$，其中$0\leq\beta<1$，$V(x)=0$。将(1.2)代入(1.1)，研究得到当$|v|\to 0$时行波孤子的爆破剖面。

我们可假设$v=(\beta,0,0)$，其中$0\leq\beta<1$，$V(x)=|x|^2$。将(1.2)代入(1.1)，可得到如下方程：

$$\sqrt{-\Delta+m^2}\varphi+i\beta\partial_{x_1}\varphi-\left(\frac{1}{|x|}*|\varphi|^2\right)\varphi+|x|^2\varphi=-\mu\varphi. \tag{1.3}$$

该方程可被视为下述极小化问题对应的欧拉－拉格朗日方程

$$E_\beta(N):=\inf\left\{\mathcal{E}_\beta(\psi):\psi\in H^{1/2}(\mathbb{R}^3),\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=N\right\}, \tag{1.4}$$

其中

$$\mathcal{E}_\beta(\psi):=\frac{1}{2}\left\langle\psi,\sqrt{-\Delta+m^2}\psi\right\rangle+\frac{i\beta}{2}\left\langle\psi,\partial_{x_1}\psi\right\rangle-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)|\psi|^2+\frac{1}{2}|x|^2|\psi|^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

在文献[12]中，问题(1.4)的极小元被称为推进基态。

我们从文献[12]中回顾：当$0<\beta<1$时，对应的 Gagliardo-Nirenberg 型不等式可写为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)|\psi|^2\,\mathrm{d}x\leq\frac{2}{N_c(\beta)}\left\langle\psi,\left(\sqrt{-\Delta}+i\beta\partial_{x_1}\right)\psi\right\rangle\left\langle\psi,\psi\right\rangle, \tag{1.6}$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$L^2$内积，$\frac{2}{N_c(\beta)}$是最佳常数。此外，上述不等式的任意极值函数$Q_\beta(x)$满足

$$\sqrt{-\triangle}Q_\beta + Q_\beta + i\beta\partial_{x_1}Q_\beta - \left(\frac{1}{|x|} * |Q_\beta|^2\right)Q_v = 0, \tag{1.7}$$

且有

$$N_c(\beta) = \langle Q_\beta, Q_\beta \rangle = \|Q_\beta\|_{L^2}^2. \tag{1.8}$$

令 $N_c = N_c(0)$，则由文献[12]中的式(2.9)可知，对 $0<\beta<1$ 有

$$(1-\beta)N_c \le N_c(\beta) \le N_c. \tag{1.9}$$

我们注意到，N_c 被视为“Chandrasekhar 极限质量”[2]。上述不等式意味着当 $\beta \to 0$ 时 $N_c(\beta) \to N_c$。在文献[11]中，作者还证明了当 $\beta \to 1^-$ 时 $N_c(\beta) \to 0$。在[23]中，证明了 $N_c(\beta)$ 是 Lipschitz 连续的。本文证明了在调和外势下，$\beta \to 0^+$ 时，对于满足 $\|\varphi_\beta\|_{L^2}^2 = (1-\beta)N_c(\beta)$ 的推进基态 φ_β，并计算其极限行为。

定理 1.2 假设 $m>0$，$0<\beta<1$。令 φ_β 为 $E_\beta(N(\beta))$ (见(1.4))的非负推进基态，其中 $N(\beta) = (1-\beta)N_c(\beta)$。则存在序列 $\{\beta_k\}$ (满足当 $k \to \infty$ 时 $\beta_k \to 0^+$)和 $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^3$，使得

$$\lim_{\beta \to 0^+} \|\varphi_\beta\|_{H^{1/2}} = +\infty，即 \left\langle \varphi_\beta, \sqrt{-\Delta}\varphi_\beta \right\rangle \sim \beta^{-\frac{1}{2}}$$

并且

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k^{\frac{3}{4}} \varphi_{\beta_k}\left(\beta_k^{\frac{1}{2}}(x+y_k)\right) = \gamma^{\frac{3}{2}} Q\left(\gamma(x+y_0)\right) \tag{1.10}$$

在 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛，其中 $2 \le p < 3$，这里 Q 是下述方程的正基态：

$$\sqrt{-\Delta}Q + Q - \left(\frac{1}{|x|} * |Q|^2\right)Q = 0. \tag{1.11}$$

在文献[22]中研究了在 v 固定、$N \nearrow N_c(v)$ 时推进基态的极限行为。与之不同的是，本文研究的是当 $|v| \to 0$ (在上述定理中我们取 $v = (\beta,0,0)$)时的极限行为，因此行波速度 $|v|$ 不再固定，这带来了更多的困难。

本定理的关键在于，当 $\beta \to 0^+$ 时，得到 $E_\beta(N(\beta))$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x$ 的两个最优估计，其中 φ_β 是 $E_\beta(N(\beta))$ 的推进基态。$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x$ 的上界容易得到，但其下界的推导则更为困难，这是因为动量项 $\langle \varphi_\beta, i\partial_{x_1}\varphi_\beta \rangle$ 和 $N(\beta)$ 会随 β 变化，我们需要利用这两项的一些性质。

本文的结构安排如下：在第 2 节中，我们证明定理 1.1。

2. 主要定理证明

首先，我们有：

引理 2.1 假设 $m>0$，且 $0<\beta<1$。令 $N(\beta) = (1-\beta)N_c(\beta)$，则存在正常数 C_1 和 C_2，使得当 $\beta \to 0^+$ 时，$E_\beta(N(\beta))$ 满足

$$C_1\beta^{\frac{1}{2}} \le E_\beta(N(\beta)) \le C_2\beta^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

证明：设 $Q_\beta(x)$ 是(1.6)的一个极值函数，并令 $Q_\beta^\lambda = \lambda^{3/2}Q_\beta(\lambda x)$ (其中 $\lambda>0$)，则 $\|Q_\beta^\lambda\|_2^2 = \|Q_\beta\|_2^2 = N_c(\beta)$。

利用 Plancherel 的定理，我们可推导出

$$
\begin{aligned}
\left\langle Q_\beta^\lambda,\left(\sqrt{-\Delta+m^2}-\sqrt{-\Delta}\right)Q_\beta^\lambda\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}\left|\hat{Q}_\beta(k)\right|^2\left(\sqrt{\lambda^2k^2+m^2}-\lambda|k|\right)\mathrm{d}k \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left|\hat{Q}_\beta(k)\right|^2\frac{m^2}{\left(\sqrt{\lambda^2k^2+m^2}-\lambda|k|\right)}\mathrm{d}k \\
&\le \frac{m^2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2|k|}\left|\hat{Q}_\beta(k)\right|^2\mathrm{d}k
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&E_\beta\left(N(\beta)\right)=E_\beta\left((1-\beta)N_c(\beta)\right)\le\mathcal{E}_\beta\left(\sqrt{1-\beta}\cdot Q_\beta^\lambda\right)\\
&=(1-\beta)\left\{\frac{1}{2}\left\langle Q_\beta^\lambda,\sqrt{-\Delta+m^2}Q_\beta^\lambda\right\rangle+\frac{i\beta}{2}\left\langle Q_\beta^\lambda,\partial_{x_1}Q_\beta^\lambda\right\rangle\right.\\
&\left.-\frac{1-\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\right)\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|x|^2\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x\right\}\\
&=(1-\beta)\left\{\frac{1}{2}\left\langle Q_\beta^\lambda,\sqrt{-\Delta+m^2}Q_\beta^\lambda\right\rangle+\frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\right)\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|x|^2\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x\right\}\\
&\le(1-\beta)\left\{\frac{m^2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4|k|}\left|\hat{Q}_\beta(k)\right|^2\mathrm{d}k+\frac{\lambda\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*\left|Q_\beta\right|^2\right)\left|Q_\beta\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

当 $\beta\to0^+$，取 $\lambda=\beta^{-\frac{1}{2}}$，我们可以得到 $E_\beta\left(N(\beta)\right)$ 的上界。

为了证明下界，我们发现对任意满足 $\|\psi\|_2^2=(1-\beta)N_c(\beta)$ 的 $\psi\in H^{1/2}\left(\mathbb{R}^3\right)$，由式(1.6)可知

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\beta(\psi)&=\frac{1}{2}\left\langle\psi,\sqrt{-\Delta+m^2}\psi\right\rangle+\frac{i\beta}{2}\left\langle\psi,\partial_{x_1}\psi\right\rangle-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|\psi|^2\right)|\psi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2\left|Q_\beta^\lambda\right|^2\mathrm{d}x\\
&\ge\frac{1}{2}\left\langle\psi,\sqrt{-\Delta+m^2}\psi\right\rangle+\frac{i\beta}{2}\left\langle\psi,\partial_{x_1}\psi\right\rangle-\frac{1-\beta}{2}\left\langle\psi,\left(\sqrt{-\Delta}+i\beta\partial_{x_1}\right)\psi\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\left\langle\psi,\left[\sqrt{-\Delta+m^2}+i\beta\partial_{x_1}-(1-\beta)\left(\sqrt{-\Delta}+i\beta\partial_{x_1}\right)\right]\psi\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\hat{\psi}(k)\right|^2\left[\sqrt{k^2+m^2}-\beta k_1-(1-\beta)\left(|k|-\beta k_1\right)\right]\mathrm{d}k\ \left(k=\left(k_1,k_2,k_3\right)\right)
\end{aligned}
$$

定义：

$$
f(k):=\sqrt{k^2+m^2}-\beta k_1-(1-\beta)\left(|k|-\beta k_1\right)=\sqrt{k^2+m^2}-\beta^2k_1-(1-\beta)|k|,
$$

由于 $|k_1|\le|k|$，则有

$$
\begin{aligned}
f(k)&\ge\sqrt{k^2+m^2}-\left(\beta^2+1-\beta\right)|k|\\
&\ge m\sqrt{\beta(1-\beta)}\sqrt{2+\beta^2-\beta}\quad\left(\text{关于}|k|\text{取最小值}\right)\\
&\ge m\sqrt{\beta(1-\beta)}.
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\mathcal{E}_\beta(\psi)\ge\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\hat{\psi}(k)\right|^2f(k)\mathrm{d}k\ge\frac{1}{2}m\sqrt{\beta(1-\beta)}(1-\beta)N_c(\beta)\ge\beta^{\frac{1}{2}},
\tag{2.4}
$$

于是 $\int_{\mathbb{R}^3} \left|\hat{\psi}(k)\right|^2 \mathrm{d}k = \|\psi\|_2^2 = (1-\beta) N_c(\beta)$。

引理 2.2 令 $\varphi_\beta \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ 为 $E_\beta(N(\beta))$ 的推进基态，其中 $N(\beta) = (1-\beta) N_c(\beta)$ 且 $0 < \beta < 1$，则存在与 N 无关的正常数 K_1 和 K_2，使得当 $\beta \to 0^+$ 时，

$$K_1 \beta^{-\frac{1}{2}} \le \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right) |\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x \le K_2 \beta^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

由于 $\sqrt{-\Delta + m^2} \ge \sqrt{-\Delta}$，通过(1.6)，我们有

$$\begin{aligned} E_\beta(N(\beta)) &= E_\beta((1-\beta) N_c(\beta)) = \mathcal{E}_\beta(\varphi_\beta) \\ &\ge \frac{1}{2}\left\langle \varphi_\beta, \left(\sqrt{-\Delta} + i\beta\partial_{x_1}\right)\varphi_\beta \right\rangle - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x \\ &\ge \frac{\beta}{2}\left\langle \varphi_\beta, \left(\sqrt{-\Delta} + i\beta\partial_{x_1}\right)\varphi_\beta \right\rangle + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x \\ &\ge C\beta \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因此我们得到上界。当 $0 < \beta < \beta_0 < \frac{1}{2}$，[23]中得到了对于固定的 $0 < \epsilon_0 < 1$，如果 $0 \le \beta_1 < \beta_2 \le 1 - \epsilon_0$，则存在一个常数 $M > 0$ 使得

$$0 \le N_c(\beta_1) - N_c(\beta_2) = \left\|Q_{\beta_1}\right\|_{L^2}^2 - \left\|Q_{\beta_2}\right\|_{L^2}^2 \le M(\beta_2 - \beta_1). \tag{2.6}$$

这表明

$$\frac{N(\beta_0)}{N(\beta)} \le 1, \quad N(\beta) \ge N(\beta_0) \ge N\left(\frac{1}{2}\right). \tag{2.7}$$

由于 $0 < \beta < 1$，我们令

$$\left\langle \varphi_\beta, i\partial_{x_1}\varphi_\beta \right\rangle \le 0. \tag{2.8}$$

假设 $\left\langle \varphi_\beta, i\partial_{x_1}\varphi_\beta \right\rangle > 0$，取镜像函数 $\tilde{\varphi}_\beta(x) = \varphi_\beta(-x)$，我们有

$$\mathcal{E}_\beta(\tilde{\varphi}_\beta) < \mathcal{E}_\beta(\varphi_\beta) = E_\beta(N(\beta)),$$

(矛盾)

结合(2.7)以及(2.8)我们得到了

$$\begin{aligned} E_{\beta_0}(N(\beta_0)) &\le \mathcal{E}_{\beta_0}\left(\sqrt{\frac{N(\beta_0)}{N(\beta)}} \cdot \varphi_\beta\right) \\ &= \frac{N(\beta_0)}{N(\beta)}\left\{E_\beta(N(\beta)) + \frac{N(\beta) - N(\beta_0)}{4N(\beta)}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x\right\} \\ &\quad + \frac{N(\beta_0)}{N(\beta)}(\beta_0 - \beta)\left\langle \varphi_\beta, i\partial_{x_1}\varphi_\beta \right\rangle \\ &\le E_\beta(N(\beta)) + \frac{M(\beta_0 - \beta)}{4N\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

取 $\beta_0=(1+\gamma)\beta$，其中 $(\gamma>0)$，由(2.1)可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2\,\mathrm{d}x &\ge 4N\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{E_{\beta_0}\left(N(\beta_0)\right)-E_\beta\left(N(\beta)\right)}{M(\beta_0-\beta)}\\ &\ge 4N\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{C_1\beta_0^{1/2}-C_2\beta^{1/2}}{M(\beta_0-\beta)}\\ &=4N\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{C_1(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}-C_2}{M\gamma}\cdot\beta^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

当 γ 足够大时，$\dfrac{C_1(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}-C_2}{\gamma}>0$，我们得到了(2.5)的下界。

令 φ_β 为(1.4)的非负极小元。由于 $\sqrt{-\Delta+m^2}\ge\sqrt{-\Delta}$，由式(1.6)可得

$$\begin{aligned}E_\beta\left(N(\beta)\right)&=E_\beta\left((1-\beta)N_c(\beta)\right)=\mathcal{E}_\beta(\varphi_\beta)\\ &\ge\frac{1}{2}\left\langle\varphi_\beta,\left(\sqrt{-\Delta}+i\beta\partial_{x_1}\right)\varphi_\beta\right\rangle-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|x|^2|\varphi_\beta|^2\,\mathrm{d}x\\ &\ge\frac{\beta}{2}\left\langle\varphi_\beta,\left(\sqrt{-\Delta}+i\beta\partial_{x_1}\right)\varphi_\beta\right\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|x|^2|\varphi_\beta|^2\,\mathrm{d}x\\ &\ge C\beta\left\langle\varphi_\beta,\sqrt{-\Delta}\varphi_\beta\right\rangle\end{aligned}$$

由(2.1)，当我们可以得到

$$\left\langle\varphi_\beta,\sqrt{-\Delta}\varphi_\beta\right\rangle\le C\beta^{-\frac{1}{2}}.\tag{2.10}$$

现在定义 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 齐次化函数

$$v_\beta:=\beta^{\frac{3}{4}}\varphi_\beta\left(\beta^{\frac{1}{2}}x\right),\tag{2.11}$$

通过(2.10)以及引理 2.2，当 $\beta\to0^+$，存在常数 K_1，K_2，M，$K_3>0$，使得

$$K_1\le\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|}*|v_\beta|^2\right)|v_\beta|^2\,\mathrm{d}x\le K_2,\ \left\langle v_\beta,\sqrt{-\Delta}v_\beta\right\rangle\le M,\ \beta\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2|v_\beta|^2\,\mathrm{d}x\le K_3\tag{2.12}$$

随后，通过文献[22]中的标准论证，可知存在子序列 $\{y_\beta\}\subset\mathbb{R}^3$、$R_0>0$ 和 $\eta>0$，使得

$$\liminf_{\beta\to0^+}\int_{B(y_\beta,R_0)}|w_\beta|^2\,\mathrm{d}x\ge\eta,\tag{2.13}$$

其中 $B(y_\beta,R_0)$ 表示以 y_β 为球心、半径为 R_0 的球。

现在令

$$w_\beta(x)=v_\beta(x+y_\beta)=\beta^{3/4}\varphi_\beta\left(\beta^{\frac{1}{2}}x+\beta^{\frac{1}{2}}y_\beta\right),\tag{2.14}$$

则由(2.13)有

$$\liminf_{\beta\to0^+}\int_{B(0,R_0)}|w_\beta(x)|^2\,\mathrm{d}x\ge\eta>0.\tag{2.15}$$

注意到式(2.12)意味着当 $\beta\to0^+$ 时，$w_\beta(x)$ 在 $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ 中一致有界。因此存在子列 $\{\beta_j\}$，使得

$$w_{\beta_j} \rightharpoonup w_0 \text{ 当 } j \to \infty \text{，在 } H^{1/2}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中弱收敛。} \tag{2.16}$$

由于 φ_β 是(1.4)的极小元，因此它满足

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\varphi_\beta + i\beta\partial_{x_1}\varphi_\beta - \left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)\varphi_\beta = \mu_\beta \varphi_\beta, \tag{2.17}$$

其中 μ_β 是合适的拉格朗日乘子。事实上，由于 $\|\varphi_\beta\|_{L^2}^2 = (1-\beta)N_c(\beta)$，

$$\mu_\beta = \frac{1}{(1-\beta)N_c(\beta)}\left\{2E_\beta\left((1-\beta)N_c(\beta)\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |\varphi_\beta|^2\right)|\varphi_\beta|^2 \mathrm{d}x\right\}.$$

由此可知，式(2.14)中的函数 w_{β_j} 是下述方程的非负解：

$$\sqrt{-\Delta + \beta_j m^2} w_{\beta_j} + i\beta_j \partial_{x_1} w_{\beta_j} - \left(\frac{1}{|x|} * |w_{\beta_j}|^2\right) w_{\beta_j} + \beta^{\frac{3}{2}}|x|^2 |w_{\beta_j}|^2 = \beta_j^{\frac{1}{2}}\mu_{\beta_j} w_{\beta_j}. \tag{2.18}$$

于 $N_c(\beta) \to N_c$，由式(2.1)和(2.5)可知，当 $\beta_j \to 0^+$ 时，$\beta_j^{\frac{1}{2}}\mu_{\beta_j}$ 一致有界，且 $\beta_j^{\frac{1}{2}}\mu_{\beta_j} < 0$。因此，通过选取子列，我们可假设当 $\beta_j \to 0^+$ 时，$\beta_j^{\frac{1}{2}}\mu_{\beta_j} \to -\gamma < 0$。在式(2.18)中取弱极限(至多再取一子列)，可得

$$\sqrt{-\Delta} w_0 - \left(\frac{1}{|x|} * |w_0|^2\right) w_0 = -\gamma w_0. \tag{2.19}$$

此外，由式(2.15)可知 $w_0 \neq 0$。令 $w_0^\gamma = \gamma^{-\frac{3}{2}} w_0\left(\gamma^{-1}x\right)$，则 w_0^γ 满足 $\beta = 0$ 时的方程(1.7)，且 $\|w_0^\gamma\|_2^2 = \|w_0\|_2^2$。

引理 2.3 ([22]，定理 1.1)设 $0 \le \beta < 1$，Q_β 为方程(1.6)的一个最优解，则有：

(i) 对任意满足(1.7)的 $u \in H^{1/2}\left(\mathbb{R}^3\right)$，有

$$\|Q_\beta\|_{L^2}^2 \le \|u\|_{L^2}^2.$$

(ii) 下述 Pohozaev 恒等式成立：

$$\left\langle Q_\beta, \left(\sqrt{-\Delta} + i\beta\partial_{x_1}\right) Q_\beta \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{|x|} * |Q_\beta|^2\right)|Q_\beta|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}|Q_\beta|^2 \mathrm{d}x = N_c(\beta). \tag{2.20}$$

对同一 β 的任意两个不同最优解 Q_β 和 $\tilde{Q}_\beta$，必有 $\|Q_\beta\|_{L^2} = \|\tilde{Q}_\beta\|_{L^2}$。

由引理(2.3)，在 $\beta = 0$ 的情形下，可得

$$N_c = \|Q\|_{L^2}^2 \le \|w_0^\gamma\|_2^2 = \|w_0\|_2^2.$$

另一方面，由 Fatou 引理可得 $\|w_0\|_2^2 \ge N_c$。因此，$\|w_0\|_2^2 = N_c$。这意味着 $w_\beta \to w_0$ 在 $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中强收敛，且

$$w_0 = \gamma^{\frac{3}{2}} Q\left(\gamma\left(x + y_0\right)\right), \quad y_0 \in \mathbb{R}^3, \tag{2.21}$$

其中 Q 是 $\beta = 0$ 时方程(1.6)的最优解，且满足(1.7)。此外，由于 $\left\{w_\beta\right\}$ 在 $H^{1/2}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中一致有界，由 Sobolev 不等式可知

$$\text{当 } 2 \le q < 3 \text{ 时，} \quad w_{\beta_k} \to w_0 \text{ 在 } L^q\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中强收敛。} \tag{2.22}$$

因此我们得到了(1.10)。

参考文献

[1] Lieb, E.H. and Thirring, W.E. (1984) Gravitational Collapse in Quantum Mechanics with Relativistic Kinetic Energy. *Annals of Physics*, **155**, 494-512. https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90010-1

[2] Lieb, E.H. and Yau, H. (1987) The Chandrasekhar Theory of Stellar Collapse as the Limit of Quantum Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, **112**, 147-174. https://doi.org/10.1007/bf01217684

[3] Elgart, A. and Schlein, B. (2006) Mean Field Dynamics of Boson Stars. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 500-545. https://doi.org/10.1002/cpa.20134

[4] Michelangeli, A. and Schlein, B. (2011) Dynamical Collapse of Boson Stars. *Communications in Mathematical Physics*, **311**, 645-687. https://doi.org/10.1007/s00220-011-1341-7

[5] Lenzmann, E. (2007) Well-Posedness for Semi-Relativistic Hartree Equations of Critical Type. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **10**, 43-64. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9020-9

[6] Herr, S. and Lenzmann, E. (2014) The Boson Star Equation with Initial Data of Low Regularity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **97**, 125-137. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.11.023

[7] Fröhlich, J. and Lenzmann, E. (2007) Blowup for Nonlinear Wave Equations Describing Boson Stars. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 1691-1705. https://doi.org/10.1002/cpa.20186

[8] Lenzmann, E. and Lewin, M. (2011) On Singularity Formation for the L^2-Critical Boson Star Equation. *Nonlinearity*, **24**, 3515-3540. https://doi.org/10.1088/0951-7715/24/12/009

[9] Pusateri, F. (2014) Modified Scattering for the Boson Star Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **332**, 1203-1234. https://doi.org/10.1007/s00220-014-2094-x

[10] Cho, Y. and Ozawa, T. (2006) On the Semirelativistic Hartree-Type Equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **38**, 1060-1074. https://doi.org/10.1137/060653688

[11] Bellazzini, J., Georgiev, V., Lenzmann, E. and Visciglia, N. (2019) On Traveling Solitary Waves and Absence of Small Data Scattering for Nonlinear Half-Wave Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **372**, 713-732. https://doi.org/10.1007/s00220-019-03374-y

[12] Fröhlich, J., Jonsson, B.L.G. and Lenzmann, E. (2007) Boson Stars as Solitary Waves. *Communications in Mathematical Physics*, **274**, 1-30. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0272-9

[13] Shi, Q. and Peng, C. (2019) Wellposedness for Semirelativistic Schrödinger Equation with Power-Type Nonlinearity. *Nonlinear Analysis*, **178**, 133-144. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.07.012

[14] Cingolani, S. and Secchi, S. (2015) Semiclassical Analysis for Pseudo-Relativistic Hartree Equations. *Journal of Differential Equations*, **258**, 4156-4179. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.01.029

[15] Lenzmann, E. (2009) Uniqueness of Ground States for Pseudorelativistic Hartree Equations. *Analysis & PDE*, **2**, 1-27. https://doi.org/10.2140/apde.2009.2.1

[16] Cingolani, S. and Secchi, S. (2015) Ground States for the Pseudo-Relativistic Hartree Equation with External Potential. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **145**, 73-90. https://doi.org/10.1017/s0308210513000450

[17] Coti Zelati, V. and Nolasco, M. (2013) Ground States for Pseudo-Relativistic Hartree Equations of Critical Type. *Revista Matemática Iberoamericana*, **29**, 1421-1436. https://doi.org/10.4171/rmi/763

[18] Han, B., Wang, Z. and Du, Z. (2020) Traveling Waves for Nonlocal Lotka-Volterra Competition Systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **25**, 1959-1983. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2020011

[19] Han, B., Yang, Y., Bo, W. and Tang, H. (2020) Global Dynamics of a Lotka-Volterra Competition Diffusion System with Nonlocal Effects. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, Article ID: 2050066. https://doi.org/10.1142/s0218127420500662

[20] Alfaro, M., Coville, J. and Raoul, G. (2013) Travelling Waves in a Nonlocal Reaction-Diffusion Equation as a Model for a Population Structured by a Space Variable and a Phenotypic Trait. *Communications in Partial Differential Equations*, **38**, 2126-2154. https://doi.org/10.1080/03605302.2013.828069

[21] Fröhlich, J., Jonsson, B.L.G. and Lenzmann, E. (2007) Effective Dynamics for Boson Stars. *Nonlinearity*, **20**, 1031-1075. https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/5/001

[22] Wang, Q. and Li, X. (2020) Asymptotic Analysis of Boosted Ground States of Boson Stars. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 704-715. https://doi.org/10.1002/mma.5946

[23] Wang, Q. (2021) A Blow-Up Result for the Travelling Waves of the Pseudo-Relativistic Hartree Equation with Small Velocity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 10403-10415. https://doi.org/10.1002/mma.7416