

# 通过Riemann-Hilbert方法求解非零边界条件下 Novel Kundu-NLS方程的N孤子解

许志鹏, 张玲玲

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年3月24日; 录用日期: 2026年4月18日; 发布日期: 2026年4月28日

## 摘要

本文研究了非零边界条件下Novel Kundu-NLS方程的N孤子解。首先利用变换将边界问题转化为非零常数边界问题, 然后通过构造黎曼面将解析区域转换到仿射面上, 对Jost解的解析性, 对称性以及渐进性进行了分析, 构造了广义的Riemann-Hilbert (RH)问题, 通过对离散谱以及RH问题的可解性分析得到方程的N-孤子解。具体给出了孤子解在 $N = 1, 2$ 时候的表达式以及它们的演化图像, 分析了不同参数对孤子解动力学行为的影响。

## 关键词

Riemann-Hilbert方法, Lax对, N孤子解, 非零边界条件

# N-Soliton Solutions of Novel Kundu-NLS Equation with Non-Vanishing Asymptotic Boundary Conditions via Riemann-Hilbert Methods

Zhipeng Xu, Lingling Zhang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: March 24, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 28, 2026

## Abstract

In this paper, we focus on the N-soliton solutions of Novel Kundu-NLS equation with non-zero

boundary conditions. By transforming the above equation, we have converted it into an equation with non-zero constant boundaries. Combining with the related spectral problem of the new Lax pair, the Riemann-Hilbert (RH) problem was constructed by using the Jost function and the symmetry of the scattering data. Then we obtained the N-soliton solution of the above equation through the reconstruction formula. At the end of article, we have drawn the figure of 1-soliton and 2-soliton and analyzed their dynamic behaviors.

## Keywords

Riemann-Hilbert Method, Lax Pair, N-Soliton, Non-Zero Boundary Condition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

非线性科学贯穿于物理学、数学、天文学及其他科学领域,是连接数学与其他学科的桥梁[1]-[4]。它是继量子力学和相对论之后自然科学的又一重大发展。非线性微分方程将物理现象转化为数学语言,因此研究非线性方程具有实际意义[5]-[7]。孤子是一种典型的非线性现象,源于演化系统中色散与非线性因素之间的微妙平衡[8] [9]。孤子理论具有广泛而重要的应用[10]-[12]。

1984年, Kundu 证明了在非线性变换下,非线性薛定谔方程会导出一个具有可变系数的可积高阶非线性方程,该方程被称为 Kundu-NLS 方程,形式如下

$$i\mu_t + \mu_{xx} + 2\alpha\mu^2\bar{\mu} - (\Theta_t + \Theta_x^2 - i\Theta_{xx})\mu + 2i\Theta_x\mu_x = 0, \quad (1.1)$$

其中  $\Theta(x,t)$  为自由规范函数,  $\alpha$  为正数。该方程可通过拉克斯方程与 NLS 方程相关联,且不会改变色散项。此后,许多学者对该方程进行了大量研究[13]-[16]。在文献[13]中,作者基于局部  $2 \times 2$  矩阵  $\bar{\delta}$  矩阵,采用  $\bar{\delta}$ -方法研究了上述方程,并得到了 N 孤子解。在文献[14]中,作者通过分析 Lax 对的谱问题构建了黎曼-希尔伯特问题,并研究了上述方程的 N 孤子。在文献[15]中,作者研究了上述方程的达布变换,并推广到了 n 重达布变换矩阵。随后,作者们得到了上述方程的呼吸子解和高阶怪波解。在文献[16]中,作者们通过达布-着装变换获得了上述方程的局域波解并进行了讨论。

在本文中,我们考虑了 Novel Kundu-NLS 方程

$$i\mu_t + \mu_{xx} + 2\alpha\mu^2\bar{\mu} - (\Theta_t + \Theta_x^2 - i\Theta_{xx})\mu + 2i\Theta_x\mu_x + (4i\mu_x - 4\beta\mu - 4\Theta_x\mu)\beta = 0, \quad (1.2)$$

其中,  $\beta$  是一个正数。作为 Kundu-NLS 方程的推广,该方程在流体动力学、等离子体物理、非线性光学等领域有着广泛的应用,并通过引入高阶非线性效应扩展了非线性薛定谔(NLS)方程,从而增强了其在实际系统中的适用性。许多学者对该方程进行了研究[17]-[19]。在文献[17]中,作者通过一个  $2 \times 2$  矩阵谱问题推导出了上述方程。他们通过求解代数方程给出了广义(n, N-n)阶达布变换的行列式表达式,并得到了三种类型的解。在文献[18]中,作者通过逆散射方法研究了上述方程在零边界条件下的情况。通过劳伦级数,他们得到了单极点和多极点解。在文献[19]中,作者研究了上述方程在非零和零背景下的鲁棒逆散射变换。对于非零背景,他们推导出了呼吸子和怪波。对于零背景,他们得到了高阶孤子解。与上述论文不同,本文在非零边界条件下利用 RH 方法研究 N 阶孤子,并通过数值方法绘制了 1-孤子和 2-阶孤子的图像。

本文的结构安排如下: 在第 2 节中, 对方程进行了谱分析, 并通过引入仿射参数构建了黎曼曲面。在第 3 节中, 我们构建了 Jost 解和散射矩阵, 并证明了它们的解析性, 对称性和渐近行为。在第 4 节中, 我们构建了 RH 问题。在第 5 节中, 我们给出了离散谱和留数条件, 在第 6 节中, 我们得到了求解的重构公式, 并验证了 RH 问题的可解性。在第 7 节中, 我们得到了 N 孤子解, 并绘制了 1 孤子和 2 孤子的图像。最后, 第 8 节给出了相关结论。

## 2. 谱分析和黎曼面

本文考虑如下边界条件下的 Novel Kundu-NLS 方程:

$$\begin{aligned} i\mu_t + \mu_{xx} + 2\alpha\mu^2\mu^* - (\Theta_t + \Theta_x^2 - i\Theta_{xx})\mu + 2i\theta_x\mu_x + (4i\mu_x - 4\beta\mu - 4\Theta_x\mu)\beta &= 0, \\ \mu(x, t) \rightarrow \mu_{\pm}e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta(x, t)}, x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中  $\delta_1 = \mu_0^2 - 2\beta^2/\alpha$ ,  $\mu_{\pm}$  是不依赖于  $x, t$  的,  $|\mu_{\pm}| = \mu_0$ ,  $\mu - \mu_{-} \in L^{1,2}(R)$  以及  $\mu - \mu_{+} \in L^{1,2}(R)$ 。方程(1)的 Lax 对定义如下:

$$\begin{aligned} \phi_x(x, t, k) &= (-i(k + \beta)\sigma_3 + \sqrt{\alpha}Q)\phi, \\ \phi_t(x, t, k) &= (-2ik^2\sigma_3 + 2\sqrt{\alpha}kQ - i\alpha\sigma_3Q^2 + i\sqrt{\alpha}\sigma_3Q_x - 2\sqrt{\alpha}\beta Q)\phi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中  $Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu e^{i\Theta} \\ -\bar{\mu}e^{-i\Theta} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 为了将方程(2.1)变为常数边界, 我们做如下的一个变换:

$$\mu \rightarrow \mu e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta(x, t)}, \phi \rightarrow e^{i\alpha\delta_1 t \sigma_3} \phi, \tag{2.3}$$

那么方程(1.2)会变为:

$$i\mu_t + \mu_{xx} - 2\alpha\mu_0^2\mu + 2\alpha|\mu|^2\mu + 4i\beta\mu_x = 0, \tag{2.4}$$

推导过程见附录 1。

此时相应的边界条件为:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mu(x, t) = \mu_{\pm}. \tag{2.5}$$

Lax 对(2.2)变为:  $\phi_x = X\phi, \phi_t = T\phi$ 。其中

$$X = -i(k + \beta)\sigma_3 + \sqrt{\alpha}Q, Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\bar{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$T = -2i(k^2 - \beta^2)\sigma_3 + 2(k - \beta)\sqrt{\alpha}Q + i\sqrt{\alpha}\sigma_3Q_x + i\sqrt{\alpha}(|\mu|^2 - \mu_0^2)\sigma_3. \tag{2.7}$$

在非零渐近边界条件下, Lax 对的极限谱问题为:

$$\Psi_x = X_{\pm}\Psi, \Psi_t = T_{\pm}\Psi, \tag{2.8}$$

$$X_{\pm} = -i(k + \beta)\sigma_3 + \sqrt{\alpha}Q_{\pm}, T_{\pm} = -2i(k + \beta)(k - \beta)\sigma_3 + 2k\sqrt{\alpha}Q_{\pm} = 2(k - \beta)X_{\pm},$$

矩阵  $X_{\pm}$  的特征值为  $\pm i\lambda$ , 其中  $\lambda$  满足  $\lambda^2 = (k + \beta)^2 + \alpha\mu_0^2 = (k + \beta + i\sqrt{\alpha}\mu_0)(k + \beta - i\sqrt{\alpha}\mu_0)$ , 其支点为  $k = -\beta \pm i\sqrt{\alpha}\mu_0$ 。将沿线段  $[-\beta - i\sqrt{\alpha}\mu_0, -\beta + i\sqrt{\alpha}\mu_0]$  割开的两个复平面  $S_1$  和  $S_2$  粘合在一起, 我们可以得到一个黎曼曲面, 在  $S_1$  平面上引入局部极坐标, 令

$$k + \beta + i\sqrt{\alpha}\mu_0 = r_1 e^{i\theta_1}, k + \beta - i\sqrt{\alpha}\mu_0 = r_2 e^{i\theta_2}, -\frac{\pi}{2} < \theta_j < -\frac{3}{2}\pi, j = 1, 2, \tag{2.9}$$

我们在 Riemann 面上得到两个单值解析函数:

$$\lambda(k) = \begin{cases} (r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}, S_1 \\ -(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}, S_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

为了避免  $\lambda$  的多值性, 我们引入仿射参数  $z = m + \lambda$ , 其中  $m = k + \beta$ , 并且可以得到两个单值函数

$$m(z) = \frac{1}{2}(z - \alpha\mu_0^2/z), \lambda(z) = \frac{1}{2}(z + \alpha\mu_0^2/z), \quad (2.11)$$

根据方程(2.10), 我们可以得到

$$\text{Im } \lambda(k) = \begin{cases} (r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, S_1 \\ -(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, S_2 \end{cases}, \quad \text{Im } \lambda(z) = \frac{1}{2|z|^2} (|z|^2 - \alpha\mu_0^2) \text{Im } z,$$

$$\lambda(z) = \frac{z^2 + \alpha\mu_0^2}{2z} = \frac{(|z|^2 - \alpha\mu_0^2)z + \alpha\mu_0^2(z + \bar{z})}{2|z|^2} = \frac{1}{2|z|^2} [ (|z|^2 - \alpha\mu_0^2)z + 2\alpha\mu_0^2 \text{Re } z ],$$

对于  $m \in P_1$ , 有  $z = m + \sqrt{m^2 + \alpha\mu_0^2} = m + m \left( 1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{m^2} + \dots \right) = 2m + o(m^{-1}) \rightarrow \infty$ 。

对于  $m \in P_2$ , 我们有  $z = m - \sqrt{m^2 + \alpha\mu_0^2} = \frac{-\alpha\mu_0^2}{m + \sqrt{m^2 + \alpha\mu_0^2}} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ 。

### 3. Jost 函数的解析性、对称性以及渐近性

#### 3.1. Jost 函数

由于  $X_{\pm}$  具有两个特征值  $\pm i\lambda$ , 我们可以得到  $X_{\pm}$  和  $T_{\pm}$  的两个特征向量

$$Y_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\alpha}\mu_{\pm} \\ i\sqrt{\alpha}\bar{\mu}_{\pm} & 1 \end{pmatrix} = I + \frac{i}{z} \sigma_3 \sqrt{\alpha} Q_{\pm}, \quad (3.1)$$

故  $X_{\pm}$  和  $T_{\pm}$  可以表示为

$$X_{\pm} = Y_{\pm} (-i\lambda\sigma_3) Y_{\pm}^{-1}, T_{\pm} = Y_{\pm} (-2i(k - \beta)\lambda\sigma_3) Y_{\pm}^{-1}. \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(2.8), 我们可以得到  $(Y_{\pm}^{-1}\Psi)_x = -i\lambda\sigma_3 Y_{\pm}^{-1}\Psi$ ,  $(Y_{\pm}^{-1}\Psi)_t = -2i(k - \beta)\lambda\sigma_3 Y_{\pm}^{-1}\Psi$ , 由此可以得到渐近谱问题(2.8)的解  $\Psi = Y_{\pm} e^{i\theta(z)\sigma_3}$ , 其中  $\theta(z) = \lambda(z) [-x - 2(k(z) - \beta)t]$ 。因此, Lax 对具有渐近于  $\phi_{\pm}(x, t, z)$  的 Jost 解  $\phi_{\pm} \sim Y_{\pm} e^{i\theta(z)\sigma_3}, x \rightarrow \infty$ 。通过变换  $\varphi_{\pm} = \phi_{\pm} e^{-i\theta(z)\sigma_3}$ , 可以得到  $\varphi_{\pm} \sim Y_{\pm}, x \rightarrow \pm\infty$ 。进一步可以得到等价 Lax 对

$$(Y_{\pm}^{-1}\varphi_{\pm})_x - i\lambda [Y_{\pm}^{-1}\varphi_{\pm}, \sigma_3] = \sqrt{\alpha} Y_{\pm}^{-1} \Delta Q_{\pm} \varphi_{\pm}, (Y_{\pm}^{-1}\varphi_{\pm})_t - 2i(k - \beta)\lambda [Y_{\pm}^{-1}\varphi_{\pm}, \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1} \Delta T_{\pm} \varphi_{\pm}, \quad (3.3)$$

其中  $\Delta X_{\pm} = X - X_{\pm} = \sqrt{\alpha}(Q - Q_{\pm}) = \sqrt{\alpha}\Delta Q_{\pm}$  并且  $\Delta T_{\pm} = T - T_{\pm}$ 。上述两个式子可以写成如下的全微分:

$$d(e^{-i\theta(z)\sigma_3} Y_{\pm}^{-1} \varphi_{\pm}) = e^{-i\theta(z)\sigma_3} [Y_{\pm}^{-1} (\sqrt{\alpha}\Delta Q_{\pm} dx + \Delta T_{\pm} dt) \varphi_{\pm}],$$

由此可以得到两个 Volterra 积分方程

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, t, z) &= Y_- + \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^x Y_- e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} \left[ Y_-^{-1} \Delta Q_-(y, t, z) \varphi_-(y, t, z) \right] dy, \\ \varphi_+(x, t, z) &= Y_+ - \sqrt{\alpha} \int_x^{+\infty} Y_+ e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} \left[ Y_+^{-1} \Delta Q_+(y, t, z) \varphi_+(y, t, z) \right] dy \end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.2. 散射矩阵

由于  $\phi_{\pm}$  为 Lax 对  $\phi_x = X\phi, \phi_t = T\phi$  的两个矩阵解, 那么  $\phi_+$  和  $\phi_-$  线性相关, 因此存在矩阵  $S(z)$  使得

$$\varphi_+ e^{i\theta(z)\sigma_3} = \varphi_- e^{i\theta(z)\sigma_3} S(z), \tag{3.5}$$

其中  $S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix}$ . 令  $\varphi_{\pm} = (\varphi_{\pm,1}, \varphi_{\pm,2})$ , 那么可以得到

$$\varphi_{+,1} = s_{11}(z)\varphi_{-,1}(z) + s_{21}(z)e^{-2i\theta(z)}\varphi_{-,2}(z), \varphi_{+,2} = s_{12}(z)e^{2i\theta(z)}\varphi_{-,1}(z) + s_{22}(z)\varphi_{-,2}(z). \tag{3.6}$$

### 3.3. $\varphi_{\pm}$ 和 $S(\lambda)$ 的解析性

**定理 3.2.1.** 对于  $\mu - \mu_{\pm} \in L^1(R)$  以及  $t \in R^+$ , 存在唯一特征函数  $\varphi_{\pm}$  满足(3.7)式。

证明: 我们仅证明  $\varphi_-$  的第一列, 其余类似。记  $\omega(x, t, z) = Y_-^{-1}\varphi_{-,1}$  那么  $\varphi_-$  的第一列可以表示为

$$\omega(x, t, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x F\omega(y, t, z) dy, \tag{3.7}$$

其中  $F = F(x-y, z) = \text{diag}(1, e^{2i\lambda(x-y)})Y_-^{-1}(z)\Delta X Y_-$ . 令  $D_+^{\varepsilon} = D_+ \setminus (B_{\varepsilon}(i\sqrt{\alpha}\mu_0) \cup B_{\varepsilon}(-i\sqrt{\alpha}\mu_0))$ , 其中  $B_{\varepsilon}(\pm i\sqrt{\alpha}\mu_0) = \{z \in C : |z \mp i\sqrt{\alpha}\mu_0| < \varepsilon\sqrt{\alpha}\mu_0\}$ , 定义递推序列

$$\omega^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega^{(n+1)}(x, t, z) = \int_{-\infty}^x F\omega^{(n)}(y, t, z) dy, n = 1, 2, \dots, \tag{3.8}$$

由此构造了一个 Neumann 级数

$$\omega(x, t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^{(n)}(x, t, z). \tag{3.9}$$

容易证明  $\omega(x, t, z)$  是方程(3.9)在  $D_+^{\varepsilon}$  唯一的向量型解析解。

**推论 3.1.** 对于  $\mu - \mu_{\pm} \in L^1(R)$  以及  $t \in R$ , 有  $\varphi_{-,1}$  和  $\varphi_{+,2}$  在  $D^+$  上解析, 并且  $\varphi_{+,1}$  和  $\varphi_{-,2}$  在  $D^-$  上解析。

由于  $trX = trT = 0$ , 利用 Abel 公式, 可以得到  $(\det \phi_{\pm})_x = (\det \phi_{\pm})_t = 0$ 。根据  $\phi_{\pm} \sim Y_{\pm} e^{i\theta(z)\sigma_3}, x \rightarrow \infty$ , 我们可以得到

$$\det(\varphi_{\pm}) = \det(\phi_{\pm} e^{-i\theta(z)\sigma_3}) = \det(\phi_{\pm}), \tag{3.10}$$

那么有  $(\det \varphi_{\pm})_x = (\det \varphi_{\pm})_t = 0$ ,  $\det \varphi_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \det(\varphi) = \det(Y_{\pm}) = \gamma \neq 0$ , 意味着  $\varphi_{\pm}$  是一个可逆矩阵。根据方程(3.6), 可以得到

$$\begin{aligned} s_{11} &= \det(\varphi_{+,1}, \varphi_{-,2})/\gamma, s_{21} = e^{2i\theta(z)} \det(\varphi_{-,1}, \varphi_{+,1})/\gamma, \\ s_{12} &= e^{-2i\theta(z)} \det(\varphi_{+,2}, \varphi_{-,2})/\gamma, s_{22} = \det(\varphi_{-,1}, \varphi_{+,2})/\gamma. \end{aligned} \tag{3.11}$$

根据  $\varphi_{\pm}$  的各列的解析性可以推知散射数据  $s_{11}$  在  $D^-$  上是解析的,  $s_{22}$  在  $D^+$  上是解析的。

### 3.4. $\varphi_{\pm}$ 和 $S(\lambda)$ 的对称性

**定理 3.2.** 对于任意的  $z \in D^+$ , Jost 解, 散射数据以及反射系数有以下两种对称性。

I) 第一对称性

$$\varphi_{\pm}(x, t, z) = -\overline{\sigma\varphi_{\pm}(x, t, \bar{z})}\sigma, \overline{S(\bar{z})} = -\sigma S(z)\sigma$$

II) 第二对称性

$$\varphi_{\pm}(x, t, z) = \frac{i\sqrt{\alpha}}{z}\varphi_{\pm}\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)\sigma_3 Q_{\pm}, S(z) = (\sigma_3 Q_{\pm})^{-1} S\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)\sigma_3 Q_{\pm},$$

其中

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明: 根据方程(3.3), 有

$$\left(Y_{\pm}^{-1}(z)\varphi_{\pm}(z)\right)_x - i\lambda(z)\left[Y_{\pm}^{-1}(z)\varphi_{\pm}(z), \sigma_3\right] = \sqrt{\alpha}Y_{\pm}^{-1}(z)\Delta Q_{\pm}(z)\varphi_{\pm}(z). \quad (3.12)$$

将  $z$  替换为  $\bar{z}$ , 然后同时对上述方程两边取共轭, 并两端乘以矩阵  $\sigma$ , 可以得到

$$\left(\sigma Y_{\pm}^{-1}(\bar{z})\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma\right)_x + i\lambda(\bar{z})\sigma\left[Y_{\pm}^{-1}(\bar{z})\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}, \sigma_3\right]\sigma = \sqrt{\alpha}\sigma Y_{\pm}^{-1}(\bar{z})\Delta Q_{\pm}(\bar{z})\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma, \quad (3.13)$$

注意到

$$\overline{Y_{\pm}^{-1}(\bar{z})}\sigma = -Y_{\pm}^{-1}(z), \lambda(\bar{z}) = \lambda(z), \sigma\sigma_3\sigma = \sigma_3, \sigma\Delta Q_{\pm}(\bar{z})\sigma = -\Delta Q_{\pm}(z), \quad (3.14)$$

那么有

$$\left(Y_{\pm}^{-1}(z)\sigma\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma\right)_x - i\lambda(z)\left[Y_{\pm}^{-1}(z)\sigma\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma, \sigma_3\right] = \sqrt{\alpha}Y_{\pm}^{-1}(z)\Delta Q_{\pm}(z)\sigma\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma. \quad (3.15)$$

对比方程(3.3)和方程(3.15), 可以发现  $\varphi$  和  $-\sigma\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma$  满足同一个一阶齐次线性微分方程并且有相同的渐近性:  $\varphi, \sigma\overline{\varphi_{\pm}(\bar{z})}\sigma \rightarrow Y_{\pm}, |x| \rightarrow \infty$ , 由此可以得到

$$\varphi_{\pm}(x, t, z) = -\overline{\sigma\varphi_{\pm}(x, t, \bar{z})}\sigma. \quad (3.16)$$

根据方程(3.5), 有

$$S(z) = e^{-i\theta(z)\sigma_3}\varphi_{-}^{-1}(x, t, z)\varphi_{+}(x, t, z)e^{i\theta(z)\sigma_3}, \quad (3.17)$$

注意到  $\overline{\theta(\bar{z})} = \theta(z)$ ,  $\sigma e^{-i\theta(z)\sigma_3}\sigma = -e^{i\theta(z)\sigma_3}$ , 结合方程(3.16), 可以得到  $-\sigma\overline{S(\bar{z})}\sigma = S(z)$ 。从关系  $k\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right) = k(z)$ ,  $\lambda\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right) = -\lambda(z)$ ,  $\theta\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right) = -\theta(z)$ , 可以得到  $\phi(x, t, z)$  是散射方程  $\phi_x = X\phi, \phi_t = T\phi$  的一个解, 那么  $\phi\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)C$  仍然也是方程  $\phi_x = X\phi, \phi_t = T\phi$  的一个解, 其中  $C$  是一个与  $x, t$  无关的  $2 \times 2$  矩阵, 为了得到对称关系  $\phi(x, t, z) = \phi\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)C$ ,  $\phi\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)C, \phi(x, t, z)$  需要有相同的渐近条件,  $\phi\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)C \sim Y_{\pm}\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)e^{-i\theta(z)\sigma_3}C = Y_{\pm}(z)e^{i\theta(z)\sigma_3}, x \rightarrow \pm\infty$ , 通过计算可以得到  $C = \frac{i\sqrt{\alpha}}{z}\sigma_3 Q_{\pm}$ , 根据谱问题解的唯一性, 可以得到

$$\phi(x, t, z) = \frac{i\sqrt{\alpha}}{z}\phi\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right)\sigma_3 Q_{\pm}. \quad (3.18)$$

再次根据  $\varphi_{\pm} = \phi_{\pm} e^{-i\theta(z)\sigma_3}$ , 可以得到  $\varphi_{\pm}(x, t, z) = \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \varphi_{\pm}\left(x, t, -\frac{\alpha\mu_0^2}{z}\right) \sigma_3 Q_{\pm}$ 。根据方程(3.17), 有

$$S(z) = (\sigma_3 Q_{-})^{-1} S\left(\frac{-\alpha\mu_0^2}{z}\right) \sigma_3 Q_{+}。$$

至此对称性得证。

### 3.5. $\varphi_{\pm}$ 和 $S(\lambda)$ 的渐近性

为了得到 Riemann-Hilbert 问题, 需要对 Jost 解以及散射矩阵在  $z \rightarrow \infty$  和  $z \rightarrow 0$  上的渐近性进行讨论。

定理 3.3

$$\varphi_{\pm} = I + O\left(\frac{1}{z}\right), z \rightarrow \infty, \varphi_{\pm} = \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_{\pm} + O(1), z \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

证明: 我们知道  $Y_{\pm} = I + \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_{\pm}, Y_{\pm}^{-1} = \frac{1}{\gamma} \left( I - \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_{\pm} \right)$ , 在  $z \rightarrow \infty$  点做渐近展开

$$\varphi_{\pm} = \varphi_0^{\pm} + \frac{\varphi_1^{\pm}}{z} + \frac{\varphi_2^{\pm}}{z^2} + \dots \quad (3.20)$$

将方程(3.19), (3.20)代入方程(3.3), 通过对比不同次数的  $z$  的次数, 可以得到

$$\begin{aligned} \varphi_{0,x}^{\pm} - \frac{i}{2} [\varphi_1^{\pm} - i\sqrt{\alpha} \sigma_3 Q_{\pm} \varphi_0^{\pm}, \sigma_3] &= \sqrt{\alpha} (Q - Q_{\pm}) \varphi_0^{\pm}, \\ -\frac{i}{2} [\varphi_1^{\pm} - i\sqrt{\alpha} \sigma_3 Q_{\pm} \varphi_0^{\pm}, \sigma_3] + 2i\beta [\varphi_0^{\pm}, \sigma_3] &= \sqrt{\alpha} (Q - Q_{\pm}) \varphi_0^{\pm}, \end{aligned}$$

根据上述的方程, 可以知道  $\varphi_0^{\pm}$  是一个对角矩阵并且  $\varphi_{0,x}^{\pm} = 0$ 。因此

$$I = \lim_{z \rightarrow \infty} Y_{\pm} = \lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_0^{\pm} + O(z^{-1})). \quad (3.21)$$

综上有  $\varphi_0^{\pm} = I$  以及  $\mu(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}\mu_{\pm} + i \lim_{z \rightarrow \infty} (z\varphi_{\pm})_{12}}{\sqrt{\alpha}}$ 。对点  $z \rightarrow 0$  进行渐近展开, 有  $\widetilde{\varphi_{(-1),x}^{\pm}} = 0$ ,

$i\sqrt{\alpha} \sigma_3 Q_{\pm} = \lim_{z \rightarrow 0} z Y_{\pm} = \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} z \varphi_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 0} (\widetilde{\varphi_{(-1),x}^{\pm}} + O(z^{-1}))$ 。根据上述结果以及方程(3.5), 有

$$S(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), z \rightarrow \infty, \quad S(z) = \text{diag}\left(\frac{\mu_{-}}{\mu_{+}}, \frac{\mu_{+}}{\mu_{-}}\right) + O(z), z \rightarrow 0。$$

根据方程(3.6), 我们定义分片解析矩阵  $M^{+} = \begin{pmatrix} \varphi_{-,1} & \varphi_{+,2} \\ s_{22} & \end{pmatrix}, M^{-} = \begin{pmatrix} \varphi_{+,1} & \varphi_{-,2} \\ s_{11} & \end{pmatrix}$ 。利用 Jost 函数以及散射系数的渐近性, 可以得到

$$M^{\pm} \sim I + O\left(\frac{1}{z}\right), z \rightarrow \infty, M^{\pm} \sim \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_{\pm} + O(1), z \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

定理 3.4. I)  $M^{\pm}(x, t, z)$  在  $C \setminus \Sigma$  上是解析的;

II)  $M^{-}(x, t, z) = M^{+}(x, t, z)(I - G(x, t, z))$ ;

III)  $M^{\pm}(x, t, z)$  在集合  $\{z: s_{11}(z) = s_{22}(z) = 0\}$  上满足留数条件。

其中

$$G(x, t, z) = e^{i\theta(z)\sigma_3} \begin{pmatrix} \rho(z)\tilde{\rho}(z) & -\tilde{\rho}(z) \\ \rho(z) & 0 \end{pmatrix}, \rho(z) = \frac{s_{21}}{s_{11}}, \tilde{\rho}(z) = \frac{s_{12}}{s_{22}}. \quad (3.23)$$

Novel Kundu-NLS 方程的解可以表示为 Riemann-Hilbert 问题的解

$$\mu(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}\mu_- + i \lim_{z \rightarrow \infty} (zM^-)_{12}}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3.24}$$

#### 4. 离散谱和留数条件以及 Riemann-Hilbert 问题可解性

假设  $z_n$  为  $s_{11}(z)$  在  $D^+$  上的单零点, 基于对称性可知

$$s_{11}(z_n) = 0 \Leftrightarrow s_{22}(\bar{z}_n) = 0 \Leftrightarrow s_{22}\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{z_n}\right) = 0 \Leftrightarrow s_{11}\left(-\frac{\alpha\mu_0^2}{\bar{z}_n}\right) = 0. \tag{4.1}$$

定义  $\xi_n = z_n, \bar{\xi}_{n+N} = -\frac{\sqrt{\alpha}\mu_0^2}{\bar{z}_n}, n = 1, 2, \dots, N$ , 那么离散谱可以表示为  $\Xi = \{\xi_n, \bar{\xi}_n, n = 1, 2, \dots, 2N\}$ 。

对于  $s_{11}(\xi_n) = 0$ , 根据方程(3.15), 可以知道  $\varphi_{+1}(\xi_n)$  和  $e^{-2i\theta(\xi_n)}\varphi_{-2}(\xi_n)$  成比例, 由此存在一个常数  $b_n \neq 0$ , 使得  $\varphi_{+1}(x, t, \xi_n) = b_n e^{-2i\theta(\xi_n)}\varphi_{-2}(x, t, \xi_n), n = 1, 2, \dots, 2N$ 。由此, 在  $z = \xi_n$  时的留数为

$$\text{Res}_{z=\xi_n} \left[ \frac{\varphi_{+1}(x, t, z)}{s_{11}(\xi_n)} \right] = \frac{\varphi_{+1}(\xi_n)}{s'_{11}(\xi_n)} = C_n e^{-2i\theta(\xi_n)}\varphi_{-2}(x, t, \xi_n), \tag{4.2}$$

其中  $C_n = \frac{b_n}{s'_{11}(\xi_n)}$  是一个常数。同样地, 对于  $s_{22}(\bar{\xi}_n) = 0$ , 有  $\varphi_{+2}(x, t, \bar{\xi}_n) = d_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}\varphi_{-1}(x, t, \bar{\xi}_n)$ 。

根据上式, 在  $z = \bar{\xi}_n$  时的留数为  $\text{Res}_{z=\bar{\xi}_n} \left[ \frac{\varphi_{+2}(x, t, z)}{s_{22}(\bar{\xi}_n)} \right] = \frac{\varphi_{+2}(\bar{\xi}_n)}{s'_{22}(\bar{\xi}_n)} = D_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}\varphi_{-1}(x, t, \bar{\xi}_n)$ ,  $D_n = \frac{d_n}{s'_{22}(\bar{\xi}_n)}$  是

一个常数, 事实上, 上述方程两边同时取共轭, 再作用  $\sigma$ , 有  $\overline{\sigma\varphi_{+2}(x, t, \bar{\xi}_n)} = \bar{d}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}\overline{\sigma\varphi_{-1}(x, t, \bar{\xi}_n)}$ 。根据以上方程容易有  $\varphi_{+1}(\xi_n) = -\bar{d}_n e^{-2i\theta(\xi_n)}\varphi_{-2}(\xi_n), n = 1, 2, \dots, 2N$ , 进一步地, 我们还可以知道  $\bar{d}_n = -b_n$  以及关系  $\bar{D}_n = \frac{\bar{d}_n}{s'_{22}(\bar{\xi}_n)} = -\frac{b_n}{s'_{11}(\xi_n)} = -C_n$ 。最后, 给出留数条件如下

$$\text{Res}_{z=\bar{\xi}_n} M^+(z) = \left(0, -\bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}\varphi_{-1}(x, t, \bar{\xi}_n)\right), n = 1, 2, \dots, 2N, \text{Res}_{z=\xi_n} M^-(z) = \left(C_n e^{-2i\theta(\xi_n)}\varphi_{-2}(x, t, \xi_n), 0\right)。$$

##### 4.1. 重构公式

为了利用 Plemelj 公式求解 Riemann-Hilbert 问题, 我们需要通过去除  $M$  再渐近性和极点的奇性, 将原来的 Riemann-Hilbert 问题转化为规范的 Riemann-Hilbert 问题:

$$\begin{aligned} & M^- - I - \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_- - \sum_{n=1}^{2N} \left( \frac{\text{Res}_{z=\bar{\xi}_n} M^+}{z - \bar{\xi}_n} + \frac{\text{Res}_{z=\xi_n} M^-}{z - \xi_n} \right) \\ &= M^+ - I - \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_- - \sum_{n=1}^{2N} \left( \frac{\text{Res}_{z=\xi_n} M^-}{z - \xi_n} + \frac{\text{Res}_{z=\bar{\xi}_n} M^+}{z - \bar{\xi}_n} \right) - M^+ G \end{aligned}$$

上述方程左边前四项在  $D^-$  上解析, 而第五项的极点  $z = \xi_n \in D^+$ 。因此  $z = \xi_n$  在  $D^-$  上解析, 因此上式左边整体在  $D^-$  上解析, 类似地, 上式的右边整体在  $D^+$  上解析。根据 Plemelj 公式, 可以得到

$$M(x, t, z) = I + \frac{i\sqrt{\alpha}}{z} \sigma_3 Q_- + \sum_{n=1}^{2N} \frac{\text{Res}_{z=\xi_n} M^-}{z - \xi_n} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{\text{Res}_{z=\bar{\xi}_n} M^+}{z - \bar{\xi}_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{M^+(s)G(s)}{s - z} ds, z \in C \setminus \Sigma. \tag{4.3}$$



我们分别在  $D^+$  和  $D^-$  上考察(4.3)的第一列和第二列。现在我们考虑  $M^-$  的第二列元素

$$\varphi_{-,2}(x,t,\xi_n) = \begin{pmatrix} i\sqrt{\alpha}\mu_- \\ \xi_n \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{\bar{C}_k e^{2i\theta(\bar{\xi}_k)\varphi_{-,1}(x,t,\bar{\xi}_k)}}{\xi_n - \bar{\xi}_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(M^-G)_2}{s - \xi_n} ds. \quad (4.4)$$

对于  $M^+$  的第一列元素, 我们有  $\varphi_{-,1}(x,t,\bar{\xi}_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha}\bar{\mu}_- \\ \bar{\xi}_n \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{2N} \frac{C_j e^{-2i\theta(\xi_j)\varphi_{-,2}(x,t,\xi_j)}}{\bar{\xi}_n - \xi_j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(M^+G)_1}{s - \bar{\xi}_n} ds$ , 当  $z \rightarrow \infty$ , 我们能够得到方程(4.3)的渐近展开

$$M(x,t,z) = I + \frac{i}{z} \sqrt{\alpha} \sigma_3 Q_- + \sum_{n=1}^{2N} \left( \text{Res}_{\xi_n} M^- + \text{Res}_{\bar{\xi}_n} M^+ \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} M^-(s) G(s) ds + O(z^{-2}), \quad (4.5)$$

令  $M = M^-$ , 并且比较上述矩阵以及方程(4.5)的对应元素, 我们得到 Novel Kundu-NLS 方程的位势函数和 Riemann-Hilbert 问题相联系的重构公式。

$$\mu(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha}\mu_- - i \sum_{n=1}^{2N} \bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)\varphi_{-,11}(x,t,\bar{\xi}_n)} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} (M^-G)_{12} ds}{\sqrt{\alpha}}. \quad (4.6)$$

### 4.2. 迹公式和 $\theta$ 条件

定义如下两个函数  $\beta^\pm$ :

$$\beta^+ = s_{22}(z) \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \bar{\xi}_j}, \beta^- = s_{11}(z) \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \bar{\xi}_j}{z - \xi_j}. \quad (4.7)$$

根据散射矩阵的解析性, 我们知道上述函数分别在  $D^+$  和  $D^-$  上没有零点。

根据  $\det S(z) = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = 1$ , 我们有  $\frac{1}{s_{11}s_{22}} = 1 - \rho(z)\bar{\rho}(z) = 1 + \rho(z)\overline{\rho(\bar{z})}$ 。进一步地, 我们有

$$\beta^+ \beta^- = s_{11}s_{22} = \frac{1}{1 + \rho(z)\overline{\rho(\bar{z})}}, \quad \log \beta^+ - (-\log \beta^-) = -\log [1 + \rho(z)\overline{\rho(\bar{z})}], z \in \Sigma, \quad \text{根据 Plemelj 公式有:}$$

$$\log \beta^\pm = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\log [1 + \rho(s)\overline{\rho(\bar{s})}]}{s - z} ds, z \in D_\pm, \quad \text{将上述方程代入方程(6.7), 我们可以得到如下公式:}$$

$$s_{11}(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\log [1 + \rho(s)\overline{\rho(\bar{s})}]}{s - z} ds} \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \bar{\xi}_j}, z \in D^-, \quad (4.8)$$

$$s_{22}(z) = e^{-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\log [1 + \rho(s)\overline{\rho(\bar{s})}]}{s - z} ds} \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \bar{\xi}_j}{z - \xi_j}, z \in D^+.$$

在无反射势的条件下上述公式可以化简为  $s_{11}(z) = \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \bar{\xi}_j}, z \in D^-, s_{22}(z) = \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \bar{\xi}_j}{z - \xi_j}, z \in D^+$ 。

令  $z \rightarrow 0$ ,

$$\mu_- / \mu_+ = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\log [1 + \rho(s)\overline{\rho(\bar{s})}]}{s} ds} e^{2i \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j)}. \quad (4.9)$$

因此, 可以得到如下  $\theta$  条件

$$\arg(\mu_-/\mu_+) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\log[1 + \rho(s)\overline{\rho(\bar{s})}]}{s} ds + 2 \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j). \tag{4.10}$$

特别地, 在无反射势的条件下, 上述公式可以化简为  $\arg(\mu_-/\mu_+) = 2 \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j)$ 。

### 4.3. 无反射势情况

在无反射势的情况下, 通过计算, 我们知道方程(4.4)以及(4.6)可以被化简为如下形式

$$\varphi_{-,12}(x, t, \xi_j) = \frac{i\sqrt{\alpha}\mu_-}{\xi_j} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{\bar{C}_k e^{2i\theta(\bar{\xi}_k)\varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_k)}}{\xi_j - \bar{\xi}_k}, \varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_n) = 1 + \sum_{j=1}^{2N} \frac{C_j e^{-2i\theta(\xi_j)\varphi_{-,12}(x, t, \xi_j)}}{\bar{\xi}_n - \xi_j}, \tag{4.11}$$

$$\mu(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha}\mu_- - i \sum_{n=1}^{2N} \bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)\varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_n)}}{\sqrt{\alpha}} ds. \tag{4.12}$$

引入记号  $c_j(x, t, z) = \frac{C_j}{z - \xi_j} e^{-2i\theta(\xi_j)}$ ,  $j = 1, \dots, 2N$ , 那么  $\overline{c_k(\bar{\xi}_j)} = \frac{\bar{C}_k}{\bar{\xi}_j - \xi_k} e^{-2i\theta(\bar{\xi}_k)} = \frac{\bar{C}_k}{\bar{\xi}_j - \xi_k} e^{2i\theta(\bar{\xi}_k)}$ 。

根据(4.11)的第一个分量, 可得

$$\varphi_{-,12}(x, t, \xi_j) = \frac{i\sqrt{\alpha}\mu_-}{\xi_j} - \sum_{k=1}^{2N} \overline{c_k(\bar{\xi}_j)} \varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_k), \varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_n) = 1 + \sum_{j=1}^{2N} c_j(\bar{\xi}_n) \varphi_{-,12}(x, t, \bar{\xi}_j).$$

结合上述两个方程, 可以得到

$$\varphi_{-,11}(x, t, \bar{\xi}_n) = 1 + i\sqrt{\alpha}\mu_- \sum_{j=1}^{2N} \frac{c_j(\bar{\xi}_n)}{\xi_j} - \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^{2N} c_j(\bar{\xi}_n) \overline{c_k(\bar{\xi}_j)} \varphi_{-,11}(\bar{\xi}_k), n = 1, 2, \dots, 2N. \tag{4.13}$$

## 5. N-孤子解

引入记号  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{2N})^T$ ,  $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{2N})^T$ , 其中

$$X_n = \varphi_{-,11}(\bar{\xi}_n), B_n = 1 + i\sqrt{\alpha}\mu_- \sum_{j=1}^{2N} \frac{c_j(\bar{\xi}_n)}{\xi_j}, n = 1, \dots, 2N.$$

定义一个  $2N \times 2N$  的矩阵  $A = (A_{n,k}), A_{n,k} = \sum_{j=1}^{2N} c_j(\bar{\xi}_n) \overline{c_k(\bar{\xi}_j)}$ 。方程(6.27)可以被改写为

$$\mathbf{MX} = \mathbf{B}, \mathbf{M} = I + A.$$

根据 Cramer 法则, 上述方程的解可以表示为  $X_n = \frac{\det \mathbf{M}_n^{rep}}{\det \mathbf{M}}, n = 1, \dots, 2N$ , 其中

$$\mathbf{M}_n^{rep} = (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{n-1}, \mathbf{B}, \mathbf{M}_{n+1}, \dots, \mathbf{M}_{2N}).$$

最后, 将解代入方程(3.24)中可以得到

$$\mu(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha}\mu_- - \frac{i}{\det \mathbf{M}} \sum_{n=1}^{2N} Y_n \det \mathbf{M}_n^{rep}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}\mu_- + i \frac{\det \mathbf{M}^{aug}}{\det \mathbf{M}}}{\sqrt{\alpha}}.$$

其中  $\mathbf{M}^{aug}$  是一个  $(2N+1) \times (2N+1)$  的矩阵, 且  $Y_n = \bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}$ ,  $\mathbf{M}^{aug} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y} \\ \mathbf{B} & \mathbf{M} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{2N})$ 。

### 5.1.1-孤子解

当  $N=1$  时, 我们可以发现如果  $\mu(x,t)$  是 Novel Kundu-NLS 方程的一个解, 那么  $c\mu(cx, c^2t)$  同样也是该方程的一个解, 不妨设  $\mu_0=1$  以及  $\xi_1=\zeta\sqrt{\alpha}e^{i\eta}, \zeta>1, \eta\in(-\pi,0)$ , 那么可以得到其他离散谱点为

$$\xi_2 = \frac{-\sqrt{\alpha}e^{i\eta}}{\zeta}, \bar{\xi}_1 = \zeta\sqrt{\alpha}e^{-i\eta}, \bar{\xi}_2 = \frac{-\sqrt{\alpha}e^{-i\eta}}{\zeta}.$$

根据  $\theta$  条件(4.10), 我们可以得到  $\arg(\mu_-/\mu_+) = 2\sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j) = 4\eta$ , 由此, 我们令  $\mu_+ = 1, \mu_- = e^{4i\eta}$ , 并且

我们知道  $\theta(\xi_j) = \frac{1}{2}(\xi_j + \alpha/\xi_j)(-x - (\xi_j - \alpha/\xi_j - 4\beta)t)$ , 以及  $C_1 = \frac{b_1}{s'_{11}(\xi_1)}, C_2 = \frac{b_2}{s'_{11}(\xi_2)}$ ,

$$c_k(\bar{\xi}_j) = \frac{C_k}{\bar{\xi}_j - \xi_k} e^{-2i\theta(\bar{\xi}_k)}, \text{ 其中 } s_{11} = \frac{(z - \xi_1)(z - \xi_2)}{(z - \bar{\xi}_1)(z - \bar{\xi}_2)}, s_{22} = \frac{(z - \bar{\xi}_1)(z - \bar{\xi}_2)}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)}.$$

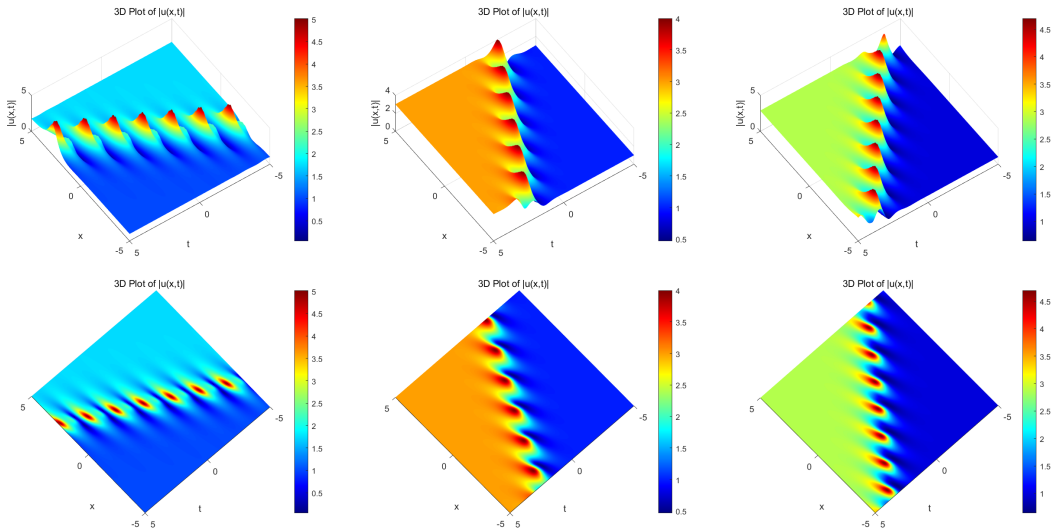
结合上述的散射数据直接计算就可以得到 1-孤子解

$$\mu(x,t) = \left( \sqrt{\alpha}e^{4i\eta} + i \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 \\ B_1 & M_{11} & M_{12} \\ B_2 & M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}} \right) / \sqrt{\alpha}$$

$$B_n = 1 + i\sqrt{\alpha}e^{4i\eta} \sum_{j=1}^{2N} \frac{c_j(\bar{\xi}_n)}{\xi_j}, Y_n = \bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}, M_{nk} = \delta_{nk} + \sum_{j=1}^{2N} c_j(\bar{\xi}_n) \overline{c_k(\bar{\xi}_j)}, n, k = 1, 2.$$

从图 1 我们可以发现, 孤子在运动中呈现周期性, 随着离散谱不同参数的变化, 孤子的相位, 振幅以及速度都会发生相应的变化。并且我们通过上述两种不同  $\alpha$  的数值会影响周期孤子的周期大小和相位的变化。

1) 当  $\alpha=1, \beta=0.5, \zeta=2, b_1=1, b_2=1$  时



2) 当  $\alpha = 2, \beta = 0.5, \zeta = 2, b_1 = 1, b_2 = 1$  时

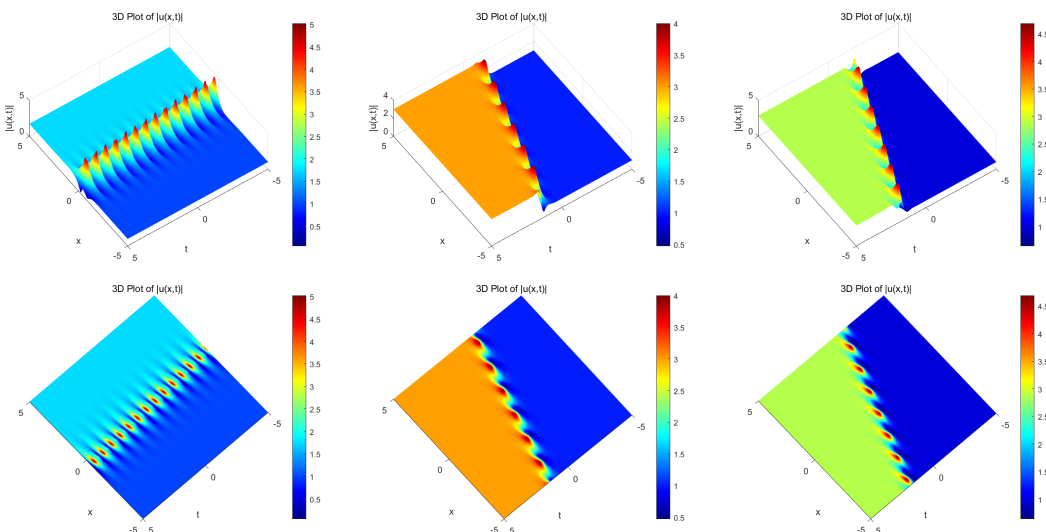


Figure 1. Evolutionary figure of the 1-soliton solution  
图 1. 1-孤子解的演化图像

### 5.2. 2-孤子解

当  $N = 2$  时, 我们假设

$$\xi_1 = \zeta_1 \sqrt{\alpha} e^{i\eta_1}, \xi_2 = \zeta_2 \sqrt{\alpha} e^{i\eta_2}, \zeta_1, \zeta_2 > 1, \eta_1, \eta_2 \in (-\pi, 0),$$

其他离散谱点为

$$\bar{\xi}_3 = \frac{-\sqrt{\alpha} e^{i\eta_1}}{\zeta_1}, \bar{\xi}_4 = \frac{-\sqrt{\alpha} e^{i\eta_2}}{\zeta_2}, \bar{\xi}_1 = \zeta_1 \sqrt{\alpha} e^{-i\eta_1}, \bar{\xi}_2 = \zeta_2 \sqrt{\alpha} e^{-i\eta_2}, \bar{\xi}_3 = \frac{-\sqrt{\alpha} e^{-i\eta_1}}{\zeta_1}, \bar{\xi}_4 = \frac{-\sqrt{\alpha} e^{-i\eta_2}}{\zeta_2}$$

根据  $\theta$  条件(6.19), 我们有  $\arg(\mu_- / \mu_+) = 2 \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j) = 4\eta_1 + 4\eta_2$ , 令  $\mu_+ = 1, \mu_- = e^{4i\eta_1 + 4i\eta_2}$ , 同样我们知道

$$C_i = \frac{b_i}{s'_{11}(\xi_i)}, \quad c_k(\bar{\xi}_j) = \frac{C_k}{\bar{\xi}_j - \xi_k} e^{-2i\theta(\xi_k)} \text{ 并且 } \theta(\xi_j) = \frac{1}{2}(\xi_j + \alpha/\xi_j)(-x - (\xi_j - \alpha/\xi_j - 4\beta)t), \text{ 其中}$$

$$s_{11} = \frac{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)(z - \xi_4)}{(z - \bar{\xi}_1)(z - \bar{\xi}_2)(z - \bar{\xi}_3)(z - \bar{\xi}_4)}, \quad s_{22} = \frac{(z - \bar{\xi}_1)(z - \bar{\xi}_2)(z - \bar{\xi}_3)(z - \bar{\xi}_4)}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)(z - \xi_4)}.$$

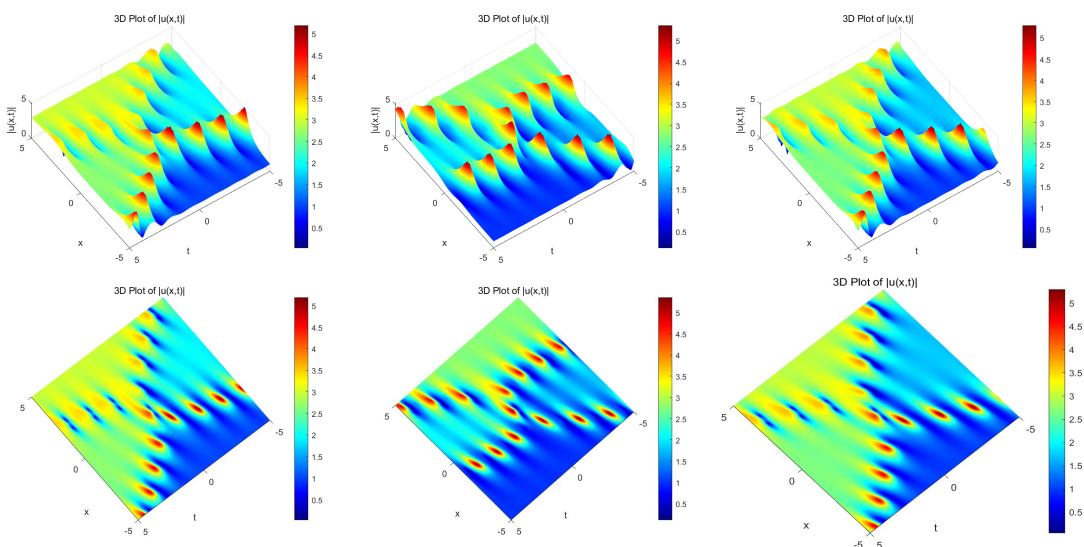
将上述的散射数据代入方程(7.16)并且通过计算可以得到 2 孤子解。

$$\mu(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha} e^{4i\eta_1 + 4i\eta_2} + i \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ B_1 & M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ B_2 & M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ B_3 & M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ B_4 & M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}},$$

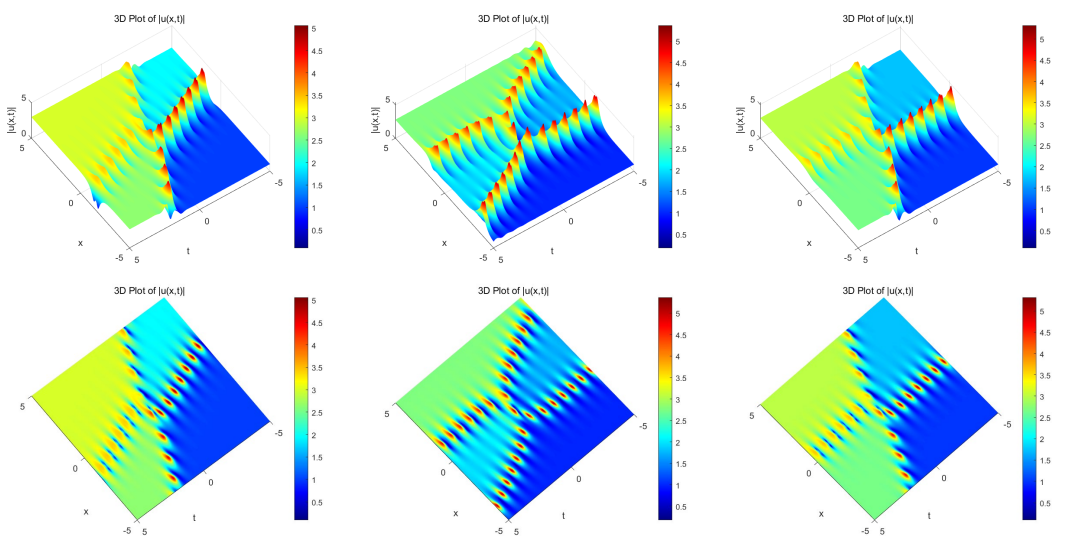
$$B_n = 1 + i\sqrt{\alpha}e^{4i\eta_n + 4i\eta_2} \sum_{j=1}^{2N} \frac{c_j(\bar{\xi}_n)}{\xi_j}, Y_n = \bar{C}_n e^{2i\theta(\bar{\xi}_n)}, n = 1, 2, 3, 4,$$

$$M_{nk} = \delta_{nk} + \sum_{j=1}^{2N} c_j(\bar{\xi}_n) \overline{c_k(\bar{\xi}_j)}, n, k = 1, 2, 3, 4.$$

1) 当  $\alpha = 1, \beta = 0.5, \zeta_1 = \zeta_2 = 2, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$  时



2) 当  $\alpha = 2, \beta = 0.5, \zeta_1 = \zeta_2 = 2, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$  时



**Figure 2.** Evolutionary figure of the 2-soliton solution  
**图 2.** 2-孤子解的演化图像

从图 2 我们可以发现, 孤子碰撞前后峰值高度明显下降, 方向以及速度与碰撞前对比发生了改变, 孤子在碰撞后主孤子能量向周围扩散, 形成波纹状次级波包的现象, 这说明发生了衍射效应, 碰撞后孤子的形状发生变化且无法恢复, 从而可以看出孤子运动过程中发生了非弹性碰撞, 并且我们发现上述两种不同  $\alpha$  的数值会影响孤子的相位, 振幅和速度。

## 6. 结论

本文采用 Riemann-Hilbert 方法研究了具有非零边界的 Novel Kundu-NLS 方程的孤子解, 通过求解单极点情况下的 Riemann 问题, 我们给出了 Novel Kundu-NLS 方程 N 阶孤子解的一般形式。最后通过对 1-孤子和 2-孤子图像进行分析, 发现离散谱的不同会导致孤子出现不同的振幅、相位以及速度, 同时, 具有不同系数  $\alpha$  的孤子解的相位和周期也会发生变化。我们还发现, 在 2 孤子解图像中孤子之间会发生非弹性碰撞, 并且在 2-孤子碰撞的过程中出现了衍射效应。

## 基金项目

山西省基础研究计划, 项目编号 202403021221030。

## 参考文献

- [1] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M. (1967) Method for Solving the Korteweg-Devries Equation. *Physical Review Letters*, **19**, 1095-1097. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.19.1095>
- [2] Nocolis, G. (1995). Introduction to Nonlinear Science. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139170802>
- [3] Byer, R.L. (1974) Nonlinear Optical Phenomena and Materials. *Annual Review of Materials Science*, **4**, 147-190. <https://doi.org/10.1146/annurev.ms.04.080174.001051>
- [4] Bekir, A. (2008) New Solitons and Periodic Wave Solutions for Some Nonlinear Physical Models by Using the Sine-Cosine Method. *Physica Scripta*, **77**, Article ID: 045008. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/77/04/045008>
- [5] Fucik, S. and Kufner, A. (2014) Nonlinear Differential Equations. Elsevier.
- [6] Kudryashov, N.A. (2012) One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 2248-2253. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.10.016>
- [7] Roubicek, T. (2013) Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. Springer Science & Business Media.
- [8] Zafrany, A., Malomed, B.A. and Merhasin, I.M. (2005) Solitons in a Linearly Coupled System with Separated Dispersion and Nonlinearity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **15**, Article ID: 037108. <https://doi.org/10.1063/1.1894705>
- [9] Arshad, M., Seadawy, A.R. and Lu, D. (2017) Modulation Stability and Optical Soliton Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with Higher Order Dispersion and Nonlinear Terms and Its Applications. *Superlattices and Microstructures*, **112**, 422-434. <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.09.054>
- [10] Gu, C.H. (2013) Soliton Theory and Its Applications. Springer Science & Business Media.
- [11] Munteanu, L. and Donescu, S. (2004) Introduction to Soliton Theory: Applications to Mechanics. Springer Science & Business Media.
- [12] Ricketts, D.S. and Ham, D. (2018) Electrical Solitons: Theory, Design, and Applications. CRC Press.
- [13] Hu, J. and Zhang, N. (2024) A  $\delta^-$ -Dressing Method for the Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation. *Mathematics*, **12**, Article No. 278. <https://doi.org/10.3390/math12020278>
- [14] Li, J. and Xia, T. (2021) A Riemann-Hilbert Approach to the Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation and Its Multi-Component Generalization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **500**, Article ID: 125109. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125109>
- [15] Zhang, C., Li, C. and He, J. (2014) Darboux Transformation and Rogue Waves of the Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 2411-2425. <https://doi.org/10.1002/mma.3232>
- [16] Wang, X. and Han, B. (2020) The Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation: Breathers, Rogue Waves and Their Dynamics. *Journal of the Physical Society of Japan*, **89**, Article ID: 014001. <https://doi.org/10.7566/jpsj.89.014001>
- [17] Zhao, Q., Zhang, X. and Liu, F. (2023) Degenerate and Bound-State Solitons of a Novel Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation Based on Generalized Darboux Transformation. *Optik*, **281**, Article ID: 170827. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170827>
- [18] Chen, Y. and Li, B. (2024) N-Soliton Solutions for the Novel Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation and Riemann-Hilbert Approach. *Wave Motion*, **127**, Article ID: 103293. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2024.103293>
- [19] Qin, M., Du, Z., Song, X. and Sun, Y. (2025) Robust Inverse Scattering Transform in a Kundu-Nonlinear Schrödinger Equation under Non-Zero and Zero Backgrounds: Breathers, Rogue Waves and Higher-Order Solitons. *Physica Scripta*, **100**, Article ID: 045243. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/adc2b1>

## 附录 1

方程(2.1)~(2.5)推导过程

通过变换(2.4)我们可以知道(2.1)式变换之后的各个项的情况如下

$$\begin{aligned} i\mu_t &\rightarrow e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta} \left( i\mu_t - (2\alpha\delta_1 - \Theta_t) \mu \right), \\ \mu_x &\rightarrow e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta} \left( \mu_x - i\Theta_x \mu \right), \\ \mu_{xx} &\rightarrow e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta} \left( \mu_{xx} - 2i\Theta_x \mu_x - (\Theta_x^2 + i\Theta_{xx}) \mu \right), \\ 2\alpha\mu^2 \mu^* &\rightarrow 2\alpha e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta} |\mu|^2 \mu \end{aligned}$$

将上述导数与非线性项代入方程(1.3)并约掉非零公因子  $e^{2i\alpha\delta_1 t - i\Theta}$ ，我们就得到了(2.5)式。