

随机McKean-Vlasov微分方程分裂步 θ 方法的长时间性态分析

任俊杰

中国地质大学(武汉)数学与物理学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年3月2日; 录用日期: 2026年3月26日; 发布日期: 2026年4月7日

摘要

本文主要研究漂移项系数满足超线性增长及单边Lipschitz条件的随机McKean-Vlasov微分方程的分裂步 θ 方法的长时间性态。基于对分布的交互粒子逼近, 引入了分裂步 θ 方法对相应的粒子系统进行离散化处理。研究表明: 当参数 θ 满足 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时, 该分裂步 θ 方法具有均方收缩性; 而当 $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ 时, 该方法具有均方稳定性; 而对于 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ 的情形, 则需要附加线性增长条件以保证均方稳定性。最后, 我们通过数值实验验证了理论结果。

关键词

随机McKean-Vlasov微分方程, 分裂步 θ 方法, 收缩性, 稳定性, 非全局Lipschitz条件, 交互粒子系统

Analysis of Long-Time Behavior of the Split-Step θ Method for Stochastic McKean-Vlasov Differential Equations

Junjie Ren

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 7, 2026

Abstract

This paper focuses on the long-time behavior of the split-step θ -method for stochastic McKean-

Vlasov differential equations with drift coefficients satisfying super-linear growth and a one-sided Lipschitz condition. Based on the interacting-particle approximation of the distribution, a split-step θ -method is introduced to discretize the corresponding particle system. The analysis shows that the method possesses mean-square contraction when the parameter θ lies in the interval $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, and that it is mean-square stable for $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$. For the case $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, an additional linear growth condition is required to ensure mean-square stability. Finally, numerical experiments are provided to validate the theoretical findings.

Keywords

Stochastic McKean-Vlasov Differential Equations, Split-Step θ Method, Contractivity, Stability, Non-Globally Lipschitz Conditions, Interacting Particle Systems

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

与标准的随机微分方程(SDEs)不同, 随机 McKean-Vlasov 微分方程(MV-SDEs)不仅依赖于当前的状态, 还依赖于其分布, 因而在物理[1], 金融[2]和控制理论[3]中都有广泛的应用。基于漂移项和扩散项都满足关于状态和测度的线性增长和 Lipschitz 条件, 经典的 MV-SDEs 强解的存在唯一性理论已然成立[4], 而关于弱解和强解的进一步理论结果可以在[5][6]及其所引用的文献中找到。然而, 许多实际模型的系数常呈现超线性增长或仅满足非全局 Lipschitz 条件, 例如, 描述种群演化的 Cucker-Smale 群体运动模型[7], 以及神经科学中的 Hodgkin-Huxley 模型和 FitzHugh-Nagumo 模型[8][9]。在非全局 Lipschitz 条件下, 关于漂移项满足单边 Lipschitz 条件或漂移项与扩散项满足耦合单调性条件时, 解的存在唯一性结果可参考文献[10][11]。

由于此类 MV-SDEs 的解析解通常难以获得, 数值模拟则成为另一条求解思路, 而 MV-SDEs 模拟的关键在于需要在每个时间步对分布进行逼近。由于混沌传播的理论结果, 原始的 MV-SDEs 可以看作交互粒子系统在粒子数量趋于无穷时的极限。因此, MV-SDEs 的数值模拟过程为: 选取适当的粒子数目用有限粒子系统的经验测度逼近真实测度, 然后引入恰当的时间离散方法进行离散。基于此, 文献[12]提出了 Euler-Maruyama 的离散格式, 并在漂移项和扩散项关于状态和测度均满足全局 Lipschitz 条件的假设下, 推导了一维 MV-SDEs 关于时间步长与粒子数量的强收敛阶, 其他相关研究参考[13]。

然而, 对具有超线性增长且单边 Lipschitz 连续漂移项的 SDEs, 使用显式 Euler-Maruyama 格式得到的数值解在均方意义下可能发散[14]; 当将其应用于具有类似条件的 MV-SDEs 时会出现“粒子腐蚀”现象[15]。“粒子腐蚀”现象是指, 当数值格式无法有效处理漂移项或扩散项系数的超线性增长时, 在较大步长下容易诱发某个粒子的数值解发散。由于模拟随机 McKean-Vlasov 方程的核心在于粒子间通过经验分布进行耦合, 单个粒子的发散状态会立即被引入该经验分布, 进而污染所有其他粒子所满足的动力学方程, 致使整个粒子系统发生连锁式数值崩溃。此外, 该现象呈现一个反直觉特性: 系统粒子数越多, 出现初始发散粒子的概率越高, 因而整体模拟越容易触发“粒子腐蚀”。为克服这一问题, [15]提出了驯服 Euler-Maruyama 方法及针对状态分量的隐式方法, 证明了该方法的强收敛性与粒子系统的混沌传播性

质。后续研究进一步放宽了条件限制：[16]仅要求漂移项关于状态分量满足单边局部 Lipschitz 条件，扩散项关于状态分量满足 $\frac{1}{2} + \alpha$ -Hölder 连续；[17]则进一步允许漂移项在状态分量和测度分量上均具有超线性增长。此外，其他重要进展包括能够保持数值不变测度收敛性的截断 Euler-Maruyama 方法[18]、具有最优半阶收敛速率的截断 θ 方法[19]以及适用于扩散项超线性增长情况的自适应格式[20]等。值得一提的是，文献[21]提出了一种基于算子的通用分析框架，统一建立了多种数值方法的强收敛性，从而为构造新算法和统一分析提供了有效工具。

本文旨在针对漂移项满足超线性增长与非全局 Lipschitz 条件的 MV-SDEs，发展高效稳健的数值方法。重点研究将适用于确定性刚性常微分方程的单支 θ 方法[22]推广至随机情形后所得的分裂步 θ 方法[23]，并将其扩展应用于该类方程的数值求解。该方法通过分步计算策略有效抑制数值模拟中出现的“粒子腐蚀”现象：其隐式步骤在数值上实现了对漂移项的预平均与平衡调节，从而抑制了超线性增长项的直接放大；后续更新则基于此经稳定的中间状态进行，确保各粒子在每一时间步所受等效漂移力可控，进而从源头阻断了因个别粒子发散、经分布耦合引发系统崩溃的链式反应。在假设漂移项对状态分量满足单边全局 Lipschitz 条件与超线性增长，而对分布及其他变量满足全局 Lipschitz 条件的框架下，本文系统分析了该方法的长时间性态。理论结果表明，在步长满足一定约束时，分裂步 θ 方法于参数范围 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 内具有均方收缩性，于 $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ 内具有均方稳定性，而对 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ 的情形，则需要附加额外的线性增长条件以保证均方稳定性。

本文的结构安排如下：第二章节介绍必要的预备知识与假设条件；第三章节给出分裂步 θ 方法及其均方收缩性与均方稳定性的证明；随后通过若干数值实验验证理论结果；最后总结全文并展望后续研究工作。

2. 预备知识和假设

在本文中，设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 为完备概率空间，其滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足一般条件，即 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 单调递增、右连续，且 \mathcal{F}_0 包含所有 P 零测集。 W_t 是关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的 m 维标准布朗运动。记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $|\cdot|$ 分别为 \mathbb{R}^d 上的欧式内积和欧式范数。若 A 为矩阵，则 A^* 和 $|A|$ 分别表示其转置与范数。令 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 为 \mathbb{R}^d 上的 Borel σ -代数， $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 为 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上所有概率测度构成的集合。进一步， $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 表示所有具有有限二阶矩的 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 组成的集合：

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(dx) < \infty \right\}.$$

对任意 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ ， $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上 μ 和 ν 的 Wasserstein 距离定义如下：

$$\mathcal{W}_2(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ 表示 μ 与 ν 所有概率测度耦合构成的集合，即 $\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)$ 当且仅当 $\pi(\cdot, \mathbb{R}^d) = \mu(\cdot)$ 且 $\pi(\mathbb{R}^d, \cdot) = \nu(\cdot)$ 。

在本文中，考虑如下 d -维随机 McKean-Vlasov 微分方程

$$dX_t = f(t, X_t, \mu_t^X) dt + g(t, X_t, \mu_t^X) dW_t, X_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d), \quad (2.1)$$

其中 μ_t^X 表示过程 X 在时刻 t 的分布，且初值 ξ 是 \mathbb{R}^d 中满足 $E|\xi|^p < \infty$ 的 \mathcal{F}_0 -可测随机变量。映射 $f: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 和 $g: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ 可测，并满足如下假设。

假设 2.1. (参考[15] [24])对任意 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 及 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, 假设:

(1) 漂移项 f 关于 x 满足单边 Lipschitz 条件, 关于分布满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L_f < 0, L > 0$, 对所有 $t \in [0, T]$ 有

$$\langle x - y, f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu) \rangle \leq L_f |x - y|^2, \tag{2.2}$$

$$|f(t, x, \mu) - f(t, x, \nu)|^2 \leq L\mathcal{W}_2^2(\mu, \nu). \tag{2.3}$$

此外 f 关于 x 满足如下增长条件: 存在常数 $L > 0, q > 0$, 使得对所有 $t \in [0, T], \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$|f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu)| \leq L(1 + |x|^q + |y|^q)|x - y|. \tag{2.4}$$

(2) 扩散项 g 关于 x 和分布均满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L_g > 0$, 使得对所有 $t \in [0, T]$ 有

$$|g(t, x, \mu) - g(t, y, \nu)|^2 \leq L_g(|x - y|^2 + (\mathcal{W}_2(\mu, \nu))^2). \tag{2.5}$$

(3) 漂移项 f 与扩散项 g 关于时间 t 满足 $\frac{1}{2}$ -Hölder 连续, 即存在常数 $L > 0$, 使得对所有 $t, s \in [0, T]$ 有

$$|f(t, x, \mu) - f(s, x, \mu)| \vee |g(t, x, \mu) - g(s, x, \mu)| \leq L|t - s|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

其中 $a \vee b = \max\{a, b\}$ 。

在假设 2.1 条件下, 令 $C_f = \sup_{t \in [0, T]} |f(t, 0, \delta_0)|^2$ 且 $C_g = \sup_{t \in [0, T]} |g(t, 0, \delta_0)|^2$, 那么对所有 $t \in [0, T]$, 任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mu \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\begin{aligned} \langle x, f(t, x, \mu) \rangle &= \langle x - 0, f(t, x, \mu) - f(t, 0, \mu) \rangle + \langle x, f(t, 0, \mu) \rangle \\ &\leq L_f |x|^2 + \frac{1}{2}(|x|^2 + |f(t, 0, \mu) - f(t, 0, \delta_0)|^2 + |f(t, 0, \delta_0)|^2) \\ &\leq C_f + \left(L_f + \frac{1}{2}\right)|x|^2 + \frac{1}{2}L\mathcal{W}_2^2(\mu, \delta_0), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} |g(t, x, \mu)|^2 &\leq 2|g(t, x, \mu) - g(t, 0, \delta_0)|^2 + 2|g(t, 0, \delta_0)|^2 \\ &\leq 2C_g + 2L_g|x|^2 + 2L_g(\mathcal{W}_2(\mu, \delta_0))^2. \end{aligned}$$

定义

$$K = \max\left\{C_f, L_f + \frac{1}{2}, L, 2C_g, 2L_g\right\},$$

则有

$$\langle x, f(t, x, \mu) \rangle \vee |g(t, x, \mu)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + (\mathcal{W}_2(\mu, \delta_0))^2). \tag{2.7}$$

在假设 2.1 下关于方程(2.1)强解的存在唯一性已在文献[10]中建立。

现在对每个 $i = 1, 2, \dots, N$, 令 (W^i, X_0^i) 为 (W, X_0) 的独立样本, 首先考虑与方程(2.1)关联的如下非交互粒子系统

$$dX_t^i = f(t, X_t^i, \mu_t^{X^i})dt + g(t, X_t^i, \mu_t^{X^i})dW_t^i, X_0^i = X_0^i, t \in [0, T]. \tag{2.8}$$

由于该系统只是原始方程(2.1)的 N 个独立样本, 故有 $\mu_t^{X^i} = \mu_t^X$ 。将 μ_t^X 替换为其对应的经验测度

$$\mu_t^{X,N}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{X_t^{j,N}}(\mathrm{d}x),$$

其中 $\delta_{X_t^{j,N}}$ 为点 $X_t^{j,N}$ 处的狄拉克测度, 则可以得到如下交互粒子系统

$$\mathrm{d}X_t^{i,N} = f\left(t, X_t^{i,N}, \mu_t^{X,N}\right) \mathrm{d}t + g\left(t, X_t^{i,N}, \mu_t^{X,N}\right) \mathrm{d}W_t^{i,N}, X_0^i = X_0^i, t \in [0, T].$$

3. 分裂步 θ 方法的长时间性态分析

现在将时间区间 $[0, T]$ 通过均匀步长 $h = \frac{T}{M}$ 划分为 M 步, 并将文献[22]中提出的分裂步 θ 方法应用于方程(2.9)。我们得到如下数值格式

$$Y_n^{i,N,M} = X_n^{i,N,M} + \theta h f\left(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}\right), \quad (3.1)$$

$$X_{n+1}^{i,N,M} = X_n^{i,N,M} + h f\left(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}\right) + g\left(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}\right) \Delta W_n^i. \quad (3.2)$$

其中 $X_n^{i,N,M}$ 是 $X_n^{i,N}$ 的近似, $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, M$, 且

$$\mu_n^{X,N,M}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{X_n^{j,N,M}}(\mathrm{d}x),$$

初值 $X_0^{i,N,M} = X_0^i$, $\Delta W_n^i = W_{n+1}^i - W_n^i$ 是独立的 $N(0, \Delta t)$ -分布高斯随机变量。参数 $\theta \in [0, 1]$ 。当 $\theta = 0$ 时, 数值格式(3.1)~(3.2)退化为经典 Euler-Maruyama 方法。对任意 $\theta \in (0, 1]$, 我们需要求解隐式方程。由压缩映射定理易知, 若 $\theta h L_f < 1$, 则隐式方程(3.1)存在唯一解。

3.1. 分裂步 θ 方法的均方收缩性

定义 3.1. (参考[25]) 设 X_t 和 Z_t 为方程(2.1)具有不同初值条件 $X_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$ 和 $Z_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$ 的两个解。如果存在实数 $\lambda < 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Z_t|^2\right] \leq e^{\lambda t} \mathbb{E}\left[|X_0 - Z_0|^2\right],$$

则 MV-SDE (2.1)的解是指数均方收缩的。

定义 3.2. 设 $X_n^{i,N,M}$ 和 $Z_n^{i,N,M}$ 为方程(2.1)同一数值格式针对不同初值条件 X_0^i 和 Z_0^i 的数值解, 其中 X_0^i 和 Z_0^i 分别为 X_0 和 Z_0 的独立同分布样本, 且对充分大的 $m \in N$ 有 $X_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$ 且 $Z_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$ 。如果有

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}^{i,N,M} - Z_{n+1}^{i,N,M}|^2\right] \leq \Lambda \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E}\left[|X_n^{i,N,M} - Z_n^{i,N,M}|^2\right],$$

其中 $0 < \Lambda \leq 1$, 当 $\Lambda < 1$ 时, 称该格式具有均方收缩性, 且由递归计算可知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E}\left[|X_n^{i,N,M} - Z_n^{i,N,M}|^2\right] = 0.$$

定理 3.1. 设假设 2.1 成立, $h > 0$ 满足 $1 - \theta h(2L_f + 1) > 0$ 且 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, 并假设存在充分大的 $m \in N$ 使得 $X_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$ 且 $Z_0 \in L_0^m(\mathbb{R}^d)$, 而 X_0^i 和 Z_0^i 分别为 X_0 和 Z_0 的独立同分布样本。

定义两个族 $\left\{ \left(X_n^{i,N,M}, Y_n^{i,N,M} \right) \right\}_{i,n}$ 和 $\left\{ \left(Z_n^{i,N,M}, G_n^{i,N,M} \right) \right\}_{i,n}$ 为 SST 格式(3.1)~(3.2)关于对应经验测度对 $\left\{ \mu_n^{X,N,M} \right\}_n$ 和 $\left\{ \mu_n^{Z,N,M} \right\}_n$ 的输出, 其输入的初始条件分别为 $\left\{ X_0^{i,N,M} \right\}_i$ 和 $\left\{ Z_0^{i,N,M} \right\}_i$ 。则对任意 $n \in N$, 有

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \leq (1 + \phi h)^n \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_0^{i, N, M} - Z_0^{i, N, M} \right|^2 \right], \quad (3.3)$$

其中

$$\phi = \frac{2L_f + 2L_g + 2\sqrt{L} \sqrt{(1 - \theta h(2L_f + 1))(1 + L\theta h)} + (2L_f L + L_g L - 2L_f L_g - L_g) \theta h}{1 - \theta h(2L_f + 1)}. \quad (3.4)$$

由于 $h > 0$ 满足 $1 - \theta h(2L_f + 1) > 0$, 若 $L_f < -L_g - \sqrt{L}$ 且 h 充分小, 那么 $\phi < 0$, 从而有 $0 < 1 + \phi h < 1$, 则此时 SST 格式具有均方收缩性且渐近稳定。

证明. 与文献[25]中的证明类似, 我们有

$$\mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{1 - \theta h(2L_f + 1)} \left(\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 + L\theta h \mathcal{W}_2(\mu_n^{X, N, M}, \mu_n^{Z, N, M}) \right) \right]. \quad (3.5)$$

根据(3.1)~(3.2)的表达式, 由于 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 和假设 2.1, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} - Z_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 + 2 \left\langle Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M}, f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) - f(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{Z, N, M}) \right\rangle h \right. \\ & \quad \left. + (1 - 2\theta) \left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) - f(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{Z, N, M}) \right|^2 h^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| g(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) - g(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{Z, N, M}) \right|^2 (\Delta W_n^i)^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 + L_g h \left| Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M} \right|^2 + L_g h \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| X_N^{j, N, M} - Z_n^{j, N, M} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + 2h \left\langle Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M}, f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) - f(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + 2h \left| Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M} \right| \left| f(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) - f(t_n + \theta h, G_n^{i, N, M}, \mu_n^{Z, N, M}) \right| \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + (2L_f h + L_g h) \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ & \quad + L_g h \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| X_N^{j, N, M} - Z_n^{j, N, M} \right|^2 \right] + 2\sqrt{L} h \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} - G_n^{i, N, M} \right|^2 \right]} \sqrt{\mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| X_n^{j, N, M} - Z_n^{j, N, M} \right|^2 \right]}. \end{aligned}$$

对两边同时取上确界, 并由(3.5)可得

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} - Z_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] \leq (1 + \phi h) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 \right],$$

其中 ϕ 由(3.4)给出。通过简单的递推关系可得

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} - Z_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \leq (1 + \phi h)^n \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_0^{i, N, M} - Z_0^{i, N, M} \right|^2 \right].$$

3.2. 分裂步 θ 方法的均方稳定性

在分裂步 θ 方法的长时性态分析中, 均方稳定性仍是关键的组成部分。事实上, 我们推测, 如果一种方法具有均方稳定性, 则“粒子腐蚀”效应可能会得到有效的抑制。因此, 我们将在以下部分给出该方法均方稳定性的证明。

定义 3.3. (参考[26])称 MV-SDE (2.1)的解 X_t 是均方稳定的, 如果有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_t|^2 \right] = 0.$$

定义 3.4. 称 SST 格式(3.1)~(3.2)的数值解 $X_n^{i,N,M}$ 在均方意义下指数稳定, 如果有

$$\mathbb{E} \left[|X_{n+1}^{i,N,M}|^2 \right] \leq e^{\eta h} \mathbb{E} \left[|X_n^{i,N,M}|^2 \right],$$

其中 $\eta < 0$ 。则由简单的递归计算可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_n^{i,N,M}|^2 \right] = 0.$$

假设 3.1. 存在两个常数 $\alpha < 0$ 和 $\beta > 0$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\langle x, f(t, x, \mu) \rangle + \frac{1}{2} |g(t, x, \mu)|^2 \leq \alpha |x|^2 + \beta \mathcal{W}_2(\mu)^2.$$

在假设 2.1 和假设 4.1 成立的条件下, MV-SDE (2.1)的均方稳定性已在文献[26]中建立。

定理 3.2. 设假设 2.1 和假设 3.1 成立, 且 $\alpha + 2\beta < 0$, $\hat{h} = \frac{2\theta - 1}{4\beta\theta^2}$ 。则以下结论成立:

(1). 若 $\theta > \frac{1}{2}$, 则对任意 $0 < h < \hat{h}$, SST 格式(3.1)~(3.2)是指数均方稳定的, 即

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[|X_{n+1}^{i,N,M}|^2 \right] \leq \exp \left(\frac{2(\alpha + 2\beta)h(2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2)}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[|X_n^{i,N,M}|^2 \right],$$

其中 $\frac{2(\alpha + 2\beta)h(2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2)}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} < 0$ 。

(2). 若 $0 \leq \theta \leq 1/2$ 且存在常数 γ 使得

$$|f(t, x, \mu)|^2 \leq \gamma (|x|^2 + \mathcal{W}_2(\mu)^2), \quad (3.6)$$

则存在正常数 h_1 , 使得对任意 $0 < h < h_0$, SST 格式(3.1)~(3.2)是指数均方稳定的, 即

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[|X_{n+1}^{i,N,M}|^2 \right] \leq \exp \left(\frac{f(h)h}{2 + 2\gamma\theta^2 h^2} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[|X_n^{i,N,M}|^2 \right],$$

其中

$$f(h) = (12\beta\gamma - 4(\alpha + 2\beta)\gamma)\theta^2 h^2 + 3\gamma(1 - 2\theta)h + 2(\alpha + 2\beta).$$

定理 3.2 中(1)排除 $\theta = \frac{1}{2}$ 的情形, 原因在于当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 表达式 $2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 < 0$, 不满足不等式推导所依赖的非负性前提。进一步地, 此时相关指数项的指数部分不能保证其为负, 导致指数衰减性质无法保证, 从而定理结论中的稳定性估计不再成立。

证明. (1) 由 SST 格式(3.1)~(3.2)可得

$$\begin{aligned} |X_{n+1}^{i,N,M}|^2 &= |X_n^{i,N,M}|^2 + (1 - 2\theta)h^2 \left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}) \right|^2 + \left| g(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}) \Delta W_n^i \right|^2 \\ &\quad + 2 \left\langle Y_n^{i,N,M}, hf(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}) \right\rangle + 2 \left\langle X_n^{i,N,M}, g(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}) \Delta W_n^i \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle hf(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}), g(t_n + \theta h, Y_n^{i,N,M}, \mu_n^{X,N,M}) \Delta W_n^i \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

对(3.7)两边取期望并代入 SST 格式(3.1), 然后对两边取上确界, 可得

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| g \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2 \right] \\ &\quad + 2h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left\langle Y_n^{i, N, M}, f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right\rangle \right] \\ &\quad + (1-2\theta)h^2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2 \right] \\ &\leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2\alpha h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2\beta h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\quad + (1-2\theta)h^2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2 \right], \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E} \left[\left| \Delta W_n^i \right|^2 \right] = h$ 。由(3.1)可得

$$\begin{aligned} \left| X_n^{i, N, M} \right|^2 &= \left| Y_n^{i, N, M} - \theta h f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 + 2\theta^2 h^2 \left| f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

因此, 容易得到

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2(\alpha + 2\beta)h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\quad + (1-2\theta + 4\beta h\theta^2)h^2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于 $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ 且 $\alpha + 2\beta < 0$, 存在常数 $\hat{h} = \frac{2\theta - 1}{4\beta\theta^2}$ 使得对所有 $0 < h < \hat{h}$, 不等式 $2\theta - 1 \geq 4\beta h\theta^2$ 成立, 于是

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] \leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right].$$

由(3.1)可得

$$h f \left(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M} \right) = \frac{Y_n^{i, N, M} - X_n^{i, N, M}}{\theta}. \quad (3.10)$$

将(3.10)代入(3.9)可得

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \frac{(1-\theta)^2 + 4\beta h\theta^2}{\theta^2} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{(1-2\theta) + 4\beta h\theta^2}{\theta^2} + 2(\alpha + 2\beta)h \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2}{\theta^2} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left\langle 2Y_n^{i, N, M}, X_n^{i, N, M} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

由 $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$, $\alpha + 2\beta < 0$ 及 $0 < h < \hat{h}$, 应用基本不等式可得

$$\begin{aligned} \left\langle 2Y_n^{i, N, M}, X_n^{i, N, M} \right\rangle &\leq \left(\frac{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2} \right) \left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} \right) \left| X_n^{i, N, M} \right|^2, \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \left(1 + \frac{2(\alpha + 2\beta)h(2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2)}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\leq \exp \left(\frac{2(\alpha + 2\beta)h(2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2)}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

易知 $\frac{2(\alpha + 2\beta)h(2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2)}{2\theta - 1 - 4\beta h\theta^2 - 2(\alpha + 2\beta)\theta^2 h} < 0$ 。

(2) 结合(3.6)和(3.8)并取上确界可得

$$\begin{aligned} &\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right|^2 \right] \\ &\leq \gamma \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 + \left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\leq \gamma \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[3 \left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 + 2\theta^2 h^2 \left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

因此, 存在正常数 $h_1 = \sqrt{\frac{1}{2\gamma\theta^2}}$, 使得对所有满足 $0 < h < h_1$ 的步长, 以下不等式成立:

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right|^2 \right] \leq \frac{3\gamma \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right]}{1 - 2\gamma\theta^2 h^2}. \quad (3.11)$$

定义

$$f(h) = (12\beta\gamma - 4(\alpha + 2\beta)\gamma)\theta^2 h^2 + 3\gamma(1 - 2\theta)h + 2(\alpha + 2\beta),$$

利用(3.9)和(3.11), 在 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ 条件下可得

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2(\alpha + 2\beta)h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\quad + (1 - 2\theta + 4\beta h\theta^2)h^2 \mathbb{E} \left[\left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right|^2 \right] \\ &\leq \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + \frac{f(h)}{1 - 2\gamma\theta^2 h^2} h \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

由于 $\alpha + 2\beta < 0$ 且 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, 易知存在正常数 h_2 使得 $f(h_2) = 0$, 则对所有 $0 < h < h_2$ 有 $f(h) < 0$ 。

联立方程(3.1)和(3.6), 并在两边取期望和上确界可得

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq 2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2\theta^2 h^2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| f(t_n + \theta h, Y_n^{i, N, M}, \mu_n^{X, N, M}) \right|^2 \right] \\ &\leq 2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] + 2\gamma\theta^2 h^2 \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 + \left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

那么

$$\sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| Y_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \geq \frac{1 - 2\gamma\theta^2 h^2}{2 + 2\gamma\theta^2 h^2} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right].$$

令 $h_0 = \min\{h_1, h_2\}$, 利用(3.12)及 $0 < h < h_0$ 可得

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}^{i, N, M} \right|^2 \right] &\leq \left(1 + \frac{f(h)h}{2 + 2\gamma\theta^2 h^2} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right] \\ &\leq \exp \left(\frac{f(h)h}{2 + 2\gamma\theta^2 h^2} \right) \sup_{i \in [1, N]} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{i, N, M} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

4. 数值模拟

Ginzburg-Landau 方程是经典的非全局 Lipschitz 常微分方程, 在数值模拟中常作为重要示例被广泛使用。本文为说明理论结果, 考虑其带有平均场扰动的随机版本如下

$$dX_t = \left(\frac{\sigma^2}{2} X_t - X_t^3 + c\mathbb{E}[X_t] \right) dt + \sigma X_t dW_t, X_0 = x_0.$$

由于 Ginzburg-Landau 方程(4.1)的系数不满足假设 2.1 所需要的必要条件, 我们将其重新定义如下:

$$dX_t = (aX_t - X_t^3 + c\mathbb{E}[X_t]) dt + \sigma X_t dW_t, X_0 = x_0.$$

容易验证方程当 $a < 0$ 时(4.2)的漂移项和扩散项满足假设 2.1, 因此该方程存在唯一强解。

4.1. 均方收缩性验证

由(4.2)表达式易知 $L_f = a$, $L = c^2$ 和 $L_g = \sigma^2$ 。此处取参数 $a = -8$, $c = 4$, $\sigma = 1$, $T = 100$, $N = 1000$, 它们满足 $L_f < -L_g - \sqrt{L}$, 由[27]可知该系统是保守的且当 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然有 $X_t = 0$ 。采用不同的初值条件 $x_0 = 1$ 和 $z_0 = 2$, 于是我们可以得到

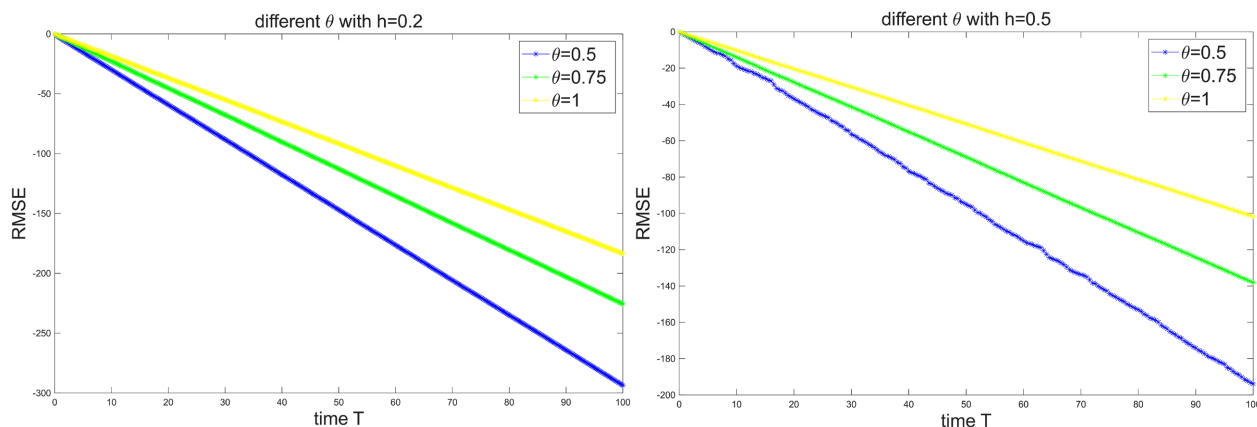
$$\phi = \frac{-14 + 8\sqrt{1 + 19\theta h + 60\theta^2 h^2} - 45\theta h}{1 + 15\theta h}.$$

选取三个不同的 θ 值: 0.5, 0.75, 1 以及它们对应的最大步长 0.58, 0.39 和 0.29 使得 $\phi < 0$ 从而测试分裂步 θ 方法的均方收缩性。

定义在时刻 $T = Mh$ 处 x_0 和 z_0 之间的均方根误差如下:

$$RMSE := \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| X_M^{j, N, M} - Z_M^{j, N, M} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

相应的结果在图 1 中展示。(从左到右, 从上到下依次为 $h = 0.2$, $h = 0.5$, $h = 1$ 和 $h = 2$ 时的结果。)



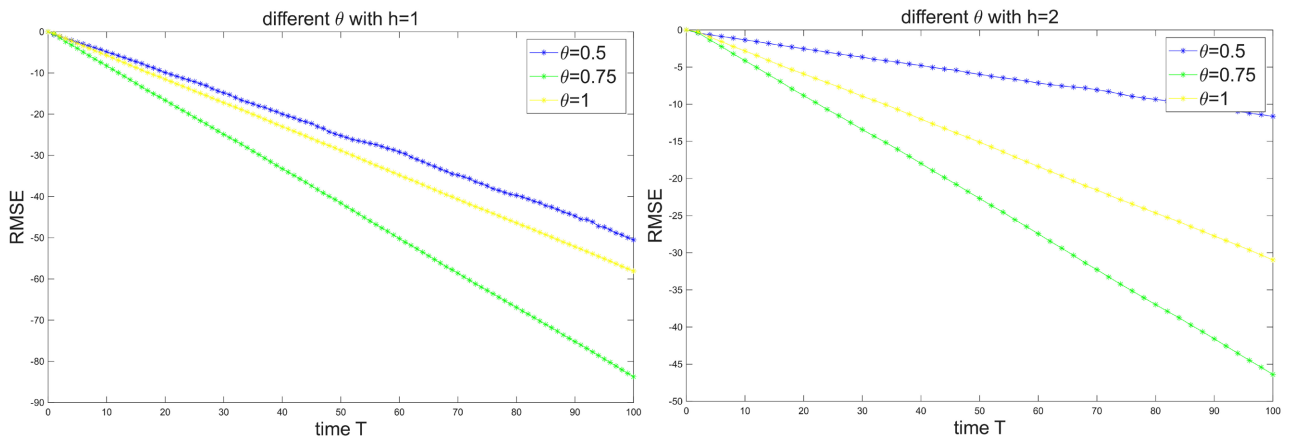


Figure 1. The mean-square contractivity under different step sizes
图 1. 不同步长下的均方收缩性

如图 1 所示, 在步长 $h \leq 0.5$ 时, 三个 θ 值对应的分裂步 θ 方法均表现出均方收缩性, 这与定理 3.1 的结果一致。而随着步长逐步增大, 三个 θ 值对应的分裂步 θ 方法仍表现出较好的均方收缩性, 这表明我们理论分析中设定的条件较为严格, 可以适当放宽。

4.2. 均方稳定性验证

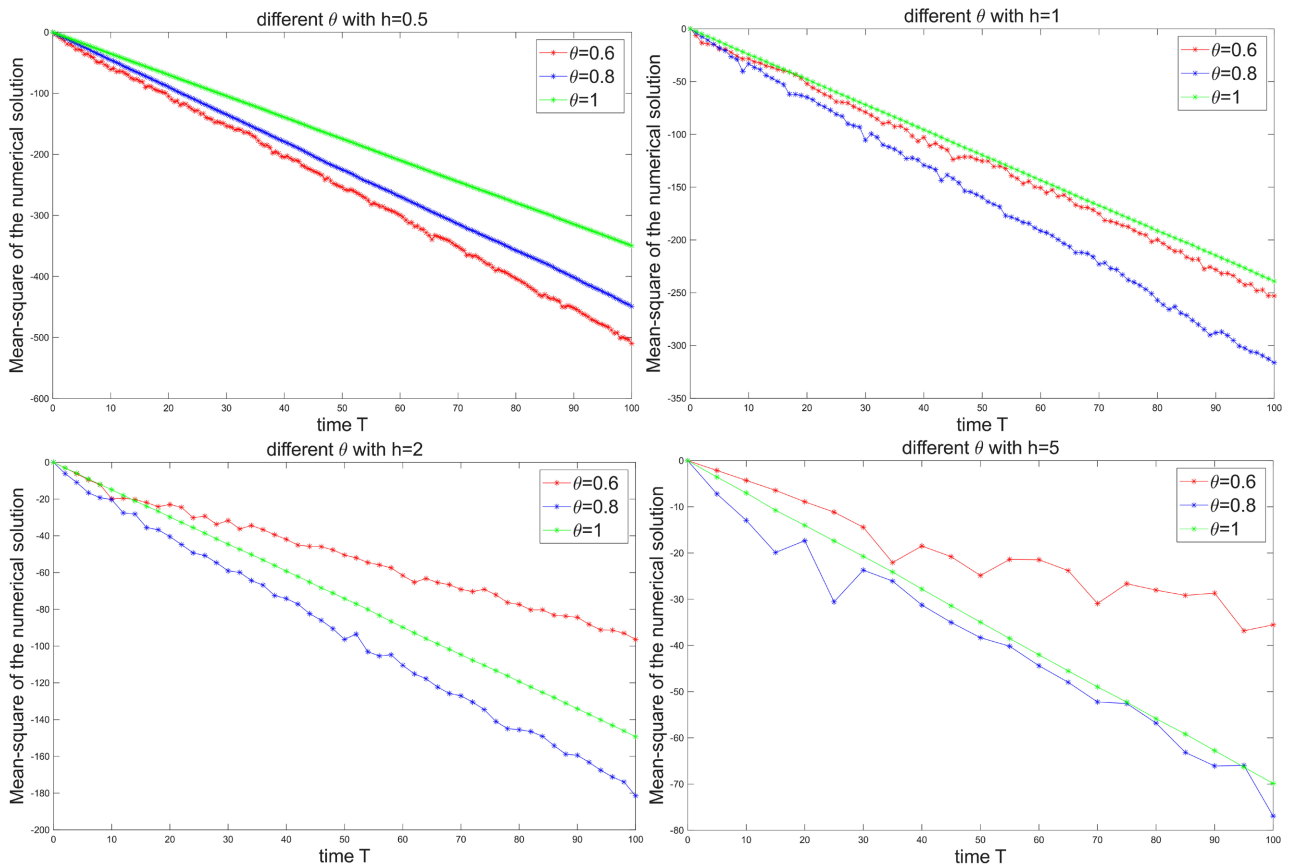


Figure 2. The mean-square stability under different step sizes
图 2. 不同步长下的均方稳定性

在本小节中, 为了验证定理 3.2 提出的均方稳定性分析, 我们考虑更改方程(4.2)的参数设置, 选取 $a = -4$, $c = 0.5$, $\sigma = 1$ 。这样以来, 我们可以明确定理 3.2 中参数 $\alpha = a + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{c^2}{2}$ 和 $\beta = \frac{c^2}{2}$, 从而确保条件 $\alpha + 2\beta < 0$ 成立。此外, 设置 $T = 100$, 初值条件和其他所有模拟设置与之前的实验保持一致。考察三个不同的 θ 取值: 0.6, 0.8 和 1, 对每个 θ , 其对应的理论最大稳定步长分别为 1.1, 1.9 和 2.0。相应的结果展示在图 2 中。(从左到右, 从上到下依次为 $h = 0.5$, $h = 1$, $h = 2$ 和 $h = 5$ 时的结果。)

图 2 表明, 当 $h \leq 1$ 即步长满足约束条件时, 三个 θ 值对应的分裂步 θ 方法均呈现出均方稳定性, 这与定理 3.2 所得结论一致。当步长增大至 $h = 2$ 时, $\theta = 0.6$ 时的曲线逐渐偏离, 而当步长进一步增大至 $h = 5$ 时, $\theta = 0.6$ 和 $\theta = 0.8$ 对应的曲线开始振荡, 不再具有均方稳定性, 而 $\theta = 1$ 对应的曲线仍保持线性。这说明该方法的均方稳定性需要步长受限于一一定范围, 且较大的 θ 值其稳定性更强。

5. 总结

本文研究了漂移项系数满足状态分量超线性增长及单边 Lipschitz 条件的随机 McKean-Vlasov 微分方程的数值逼近问题。针对这类具有非全局 Lipschitz 系数的方程, 基于对分布的交互粒子逼近, 提出了分裂步 θ 方法对相应的粒子系统进行离散化处理。主要理论结果如下:

在均方收缩性方面, 我们证明了当参数 θ 满足 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 且步长满足一定条件时, 该方法具有均方收缩性。这一性质表明数值解在长期演化过程中能够保持对初值差异的压缩效应, 为数值模拟的可靠性提供了理论保障。

在均方稳定性方面, 我们进一步证明了当 $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ 时, 该方法具有均方稳定性, 而在 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ 时, 则需要额外附加线性增长条件才能保证均方稳定性。特别地, 我们给出了保证方法稳定性的步长阈值条件。这一结果表明适当选择参数 θ 可以增强数值方法的稳定性。

通过 Ginzburg-Landau 方程的数值实验, 我们验证了理论分析的正确性。实验结果表明: 在满足理论条件时, 分裂步 θ 方法表现出良好的均方收缩性和稳定性; 参数 θ 的增大会增强方法的稳定性, 允许采用更大的时间步长; 理论分析给出的步长条件相对保守, 实际应用中可能具有放宽的余地。未来的研究可以深入探索更多分布逼近的替代方法, 并考察其在生物, 金融等领域更复杂模型中的应用。

参考文献

- [1] Guhke, C., Gajewski, P., Maurelli, M., Friz, P.K. and Dreyer, W. (2018) Stochastic Many-Particle Model for LFP Electrodes. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **30**, 593-628. <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0629-7>
- [2] Carmona, R., Delarue, F. and Lachapelle, A. (2013) Control of McKean-Vlasov Dynamics versus Mean Field Games. *Mathematics and Financial Economics*, **7**, 131-166. <https://doi.org/10.1007/s11579-012-0089-y>
- [3] Hafayed, M., Boukaf, S., Shi, Y. and Meherrem, S. (2016) A McKean-Vlasov Optimal Mixed Regular-Singular Control Problem for Nonlinear Stochastic Systems with Poisson Jump Processes. *Neurocomputing*, **182**, 133-144. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.11.082>
- [4] Sznitman, A.S. (1991) Topics in Propagation of Chaos. In: *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, Springer, 165-251.
- [5] Bauer, M., Meyer-Brandis, T. and Proske, F. (2018) Strong Solutions of Mean-Field Stochastic Differential Equations with Irregular Drift. *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1-35. <https://doi.org/10.1214/18-ejp259>
- [6] Mishura, Y. and Veretennikov, A. (2021) Existence and Uniqueness Theorems for Solutions of McKean-Vlasov Stochastic Equations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, **103**, 59-101. <https://doi.org/10.1090/tpms/1135>
- [7] Bolley, F., Cañizo, J.A. and Carrillo, J.A. (2011) Stochastic Mean-Field Limit: Non-Lipschitz Forces and Swarming. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **21**, 2179-2210. <https://doi.org/10.1142/s0218202511005702>
- [8] Baladron, J., Fasoli, D., Faugeras, O. and Touboul, J. (2012) Mean-Field Description and Propagation of Chaos in Networks of Hodgkin-Huxley and Fitzhugh-Nagumo Neurons. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **2**, Article No.

10. <https://doi.org/10.1186/2190-8567-2-10>
- [9] Bossy, M., Faugeras, O. and Talay, D. (2015) Clarification and Complement to “Mean-Field Description and Propagation of Chaos in Networks of Hodgkin-Huxley and Fitzhugh-Nagumo Neurons”. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **5**, Article No. 19. <https://doi.org/10.1186/s13408-015-0031-8>
- [10] dos Reis, G., Salkeld, W. and Tugaut, J. (2019) Freidlin-Wentzell LDP in Path Space for McKean-Vlasov Equations and the Functional Iterated Logarithm Law. *The Annals of Applied Probability*, **29**, 1487-1540. <https://doi.org/10.1214/18-aap1416>
- [11] Kumar, C., Neelima, R.C. and Stockinger, W. (2022) Well-Posedness and Tamed Schemes for McKean-Vlasov Equations with Common Noise. *The Annals of Applied Probability*, **32**, 3283-3330. <https://doi.org/10.1214/21-aap1760>
- [12] Bossy, M. and Talay, D. (1997) A Stochastic Particle Method for the McKean-Vlasov and the Burgers Equation. *Mathematics of Computation*, **66**, 157-193. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-97-00776-x>
- [13] Antonelli, F. and Kohatsu-Higa, A. (2002) Rate of Convergence of a Particle Method to the Solution of the McKean-Vlasov Equation. *The Annals of Applied Probability*, **12**, 423-476. <https://doi.org/10.1214/aoap/1026915611>
- [14] Hutzenhaler, M., Jentzen, A. and Kloeden, P.E. (2010) Strong and Weak Divergence in Finite Time of Euler’s Method for Stochastic Differential Equations with Non-Globally Lipschitz Continuous Coefficients. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **467**, 1563-1576. <https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0348>
- [15] dos Reis, G., Engelhardt, S. and Smith, G. (2022) Simulation of McKean-Vlasov SDEs with Super-Linear Growth. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **42**, 874-922. <https://doi.org/10.1093/imanum/draa099>
- [16] Liu, H., Shi, B. and Wu, F. (2023) Tamed Euler-Maruyama Approximation of McKean-Vlasov Stochastic Differential Equations with Super-Linear Drift and Hölder Diffusion Coefficients. *Applied Numerical Mathematics*, **183**, 56-85. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.08.012>
- [17] Soni, S., Kumar, C. and Reis, G. (2025) Tamed Euler Approximation for Fully Superlinear Growth McKean-Vlasov SDE and Their Particle Systems: Sharp Rates for Strong Propagation of Chaos, Convergence and Ergodicity.
- [18] Cui, Y.P., Li, X.Y., Liu, Y., *et al.* (2024) Explicit Numerical Approximations for McKean-Vlasov Stochastic Differential Equations in Finite and Infinite Time.
- [19] Chu, H., Yuan, H. and Zhu, Q. (2025) Convergence and Stability of the Truncated Stochastic Theta Method for McKean-Vlasov Stochastic Differential Equations under Local Lipschitz Conditions. *Mathematics*, **13**, Article 2433. <https://doi.org/10.3390/math13152433>
- [20] Reisinger, C. and Stockinger, W. (2022) An Adaptive Euler-Maruyama Scheme for McKean-Vlasov SDEs with Super-Linear Growth and Application to the Mean-Field Fitzhugh-Nagumo Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **400**, Article 113725. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113725>
- [21] Jian, J., Song, Q., Wang, X., Zhang, Z. and Zhao, Y. (2025) On Modified Euler Methods for McKean-Vlasov Stochastic Differential Equations with Super-Linear Coefficients. *Automatica*, **177**, Article 112284. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2025.112284>
- [22] Higham, D.J., Mao, X. and Stuart, A.M. (2002) Strong Convergence of Euler-Type Methods for Nonlinear Stochastic Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 1041-1063. <https://doi.org/10.1137/s0036142901389530>
- [23] Huang, C. (2012) Exponential Mean Square Stability of Numerical Methods for Systems of Stochastic Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 4016-4026. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.03.005>
- [24] Bao, J., Reisinger, C., Ren, P. and Stockinger, W. (2021) First-Order Convergence of Milstein Schemes for McKean-Vlasov Equations and Interacting Particle Systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **477**, Article 20200258. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0258>
- [25] dos Reis, G. and Chen, X. (2022) A Flexible Split-Step Scheme for MV-SDEs. *Applied Mathematics and Computation*, **427**, Article 127180.
- [26] Yue, C. (2017) Exponential Mean-Square Stability of the Improved Split-Step Theta Methods for Non-Autonomous Stochastic Differential Equations. *Science China Mathematics*, **60**, 735-744. <https://doi.org/10.1007/s11425-016-0132-2>
- [27] Ding, X. and Qiao, H. (2021) Stability for Stochastic McKean-Vlasov Equations with Non-Lipschitz Coefficients. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **59**, 887-905. <https://doi.org/10.1137/19m1289418>