

考虑媒体报道影响的时滞结核病模型

耿硕涵, 魏子涵, 王光庆, 李金辉*

阜阳师范大学数学与统计学院, 安徽 阜阳

收稿日期: 2026年3月21日; 录用日期: 2026年4月16日; 发布日期: 2026年4月23日

摘要

本文建立了考虑媒体报道影响的时滞结核病模型。首先, 计算出无病平衡点, 使用下一代矩阵法确定了基本再生数, 并分析了无病平衡点的局部和全局稳定性。其次, 探讨了地方病平衡点的存在性, 给出了多种存在情形, 并利用Hurwitz准则分析了其稳定性。再次, 通过分析特征方程的纯虚根, 证明了Hopf分支的存在性, 得到了模型发生Hopf分支的条件。最后, 通过数值分析, 验证了理论的正确性。

关键词

媒体报道, 基本再生数, 时滞, 稳定性

Time-Delay Tuberculosis Model Considering the Influence of Media Reports

Shuohan Geng, Zihan Wei, Guangqing Wang, Jinhui Li*

School of Mathematics and Statistics, Fuyang Normal University, Fuyang Anhui

Received: March 21, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

In this paper, a time-delay tuberculosis model considering the influence of media reports is established. First, the disease-free equilibrium is calculated, the basic reproduction number is determined by using the next generation matrix method, and the local and global stabilities of the disease-free equilibrium are analyzed. Second, the existence of the endemic equilibrium is explored, various existence cases are given, and its stability is analyzed by using the Hurwitz criterion. Third, by analyzing the pure imaginary roots of the characteristic equation, the existence of the Hopf bifurcation is proved, and the conditions for the model to undergo Hopf bifurcation are obtained. Finally, through numerical analysis, the correctness of the theory is verified.

*通讯作者。

文章引用: 耿硕涵, 魏子涵, 王光庆, 李金辉. 考虑媒体报道影响的时滞结核病模型[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 596-608. DOI: 10.12677/aam.2026.154186

Keywords

Media Reports, Basic Reproduction Number, Time Delay, Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

结核病是由结核分枝杆菌引起的一种慢性传染病，其中肺部感染(即肺结核)最为常见[1]。肺结核潜伏期长、传播机制复杂，已成为全球重大的公共卫生挑战。根据世界卫生组织 2025 年报告，全球新增结核病患者 1070 万例，其中中国新增病例数 75.97 万例(占全球发病数的 7.1%)，在 30 个结核病高负担国家中位居第 3 [2]。因此，研究肺结核的传播机制来帮助疾病的防控是至关重要的。

肺结核根据有无传染性可分为活动性肺结核与非活动性肺结核。当机体初次感染肺结核后，短期内进展为活动性肺结核的风险相对较高，而随着病程推进，这种进展概率会逐步衰减。基于此病程特点，学界常将肺结核的疾病进程划分为快速进展阶段与缓慢进展阶段。活动性肺结核的发生通常源于以下三种机制：第一种为原发性感染，第二种为内源性激活，第三种为外源性再感染[3]。快速进展阶段的潜伏期平均约 5 年，在该时滞区间内，感染者可能长期无症状却具备传染潜力，这使得防控实践中对传染源的早期识别、密切接触者追踪等核心环节的推进难度显著提升。

近年来，媒体报道通过信息扩散显著影响公众行为模式，这对于预防与控制各种传染病的传播也发挥着至关重要的作用。例如，在新型冠状病毒肺炎(COVID-19)流行期间，媒体及时通报疫情数据，大量宣传减少接触和戴好口罩等举措，从而改变公众行为，有效控制了疾病的传播[4] [5]。然而，现有结核病模型多未整合媒体报道的动态效应与时滞机制，难以精准描述潜伏期对传播路径的影响。

数学模型如今已被广泛应用于肺结核疾病传播机理的研究，最早的模型可追溯到 Ross-Macdonald 模型[6] [7]。此后，多种数学模型被建立，用以描述和预测肺结核的传播规律，其中常微分模型因忽略潜伏期、感染期、干预延迟等时滞效应，难以准确刻画疾病传播的阶段特征与复杂动态；而时滞微分方程模型通过纳入时滞项，更真实地刻画了疾病传播的时间依赖性特征，如今，传染病动力学研究已从常微分方程向时滞微分方程拓展[8]-[10]。其中 Beretta 等人[8]系统地将时滞微分方程引入传染病模型，并通过 Lyapunov 泛函、线性化方法等重点分析了各类时滞模型的全局稳定性。Colijn 等人[3]建立了一类含时滞的肺结核传播模型，比较全面地考虑了肺结核的发病机制，如内源性激活，感染且不具备传染性的个体及恢复个体仍有被传染性(外源性再感染)等因素，但最终未对其模型进行稳定性分析。Guo 等人[10]构建了一个考虑年龄依赖潜伏期和治疗时滞的结核病传播模型，证明了无病平衡点的全局稳定性，地方病平衡点的存在性与持久性及其全局稳定性，并基于数据提出了控制策略。这些转变不仅深化了对疾病传播机制的理解，也为精准防控策略的制定提供了可靠的理论工具。

在传染病模型的研究中大量学者引入媒体影响的方式通常为饱和函数[11] [12]或指数函数[13] [14]。2008 年，Liu 和 Cui [11]提出了一个考虑媒体对传播率的影响的 SIRS 模型，并对无病平衡点和地方病平衡点进行了研究。Zhao 等人在上述研究模型的基础上引入了媒体报道的时间滞后，他们发现时滞可以使稳定的地方病平衡点失稳，并且使模型产生稳定的周期解。

受上述的启发，本文提出了受媒体报道影响的传染率：

$$\beta(m, I) = \beta_1 - (\beta_1 - \beta_0) \frac{m}{m+I},$$

其中 β_1 表示疾病发生时, 媒体没有报道相关信息, 传染率达到最大值, β_0 表示通过媒体报道相关信息使传染率达到最小值, m 表示媒体报道的信息数量。

考虑到健康的人群受到肺结核病菌的感染后不会立即发病, 于是我们将总人口 N 划分为: S , L , I , T , 即 $N = S + L + I + T$, 并建立了以下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta(m, I)SI, \\ \frac{dL}{dt} = p\beta(m, I(t-\tau))S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + \varepsilon)L, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon L + (1-p)\beta(m, I(t-\tau))S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\gamma + \mu + d)I, \\ \frac{dT}{dt} = \gamma I - \mu T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 S , L , I , T 分别表示易感个体的数量, 已被感染但不具备传染性的个体数量, 被感染且具有传染性的个体数量和恢复个体的数量, b 代表易感个体的恢复率, K 代表最大环境容纳量, p 表示易感个体与感染个体接触成为活动性肺结核病(即快速发展肺结核病例)的比例, 易感个体与具备传染性个体接触后会进入肺结核的快速发展阶段, 这一阶段持续的时间记作 τ , 即快速发展阶段的潜伏期, μ 表示自然死亡率, d 表示因病死亡率, γ 表示被感染且具有传染性的个体数量的恢复率, ε 表示潜伏者转移至感染者的比例。由于前三个方程和恢复个体 T 不直接相关, 因此只需考虑系统的前三个方程, 即系统可简化为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta(m, I)SI, \\ \frac{dL}{dt} = p\beta(m, I(t-\tau))S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + \varepsilon)L, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon L + (1-p)\beta(m, I(t-\tau))S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\gamma + \mu + d)I \end{cases} \quad (2)$$

文章的结构如下: 第二节对所建立的系统(2)分析了无病平衡点和地方病平衡点的存在性与稳定性, 第三节利用几何稳定性切换准则分析了 Hopf 分支的存在性, 第四节验证了平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性。该研究有助于理解肺结核的传播机制, 为肺结核的防控提供一定的理论指导。该模型也有局限性, 例如没有考虑恢复者的复发及医疗资源的有限性, 这是将来改进的方向。

2. 平衡点的存在性及稳定性

2.1. 无病平衡点的存在性及稳定性

当疾病不存在时, 即 $L = I = 0$, 则系统(2)有无病平衡点 $E_0 = (K, 0, 0)$ 。在 E_0 点, 利用下一代生成矩阵, 可以计算传染矩阵 F 和转移矩阵 V 分别表示为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & p\beta_0 K e^{-\mu\tau} \\ 0 & (1-p)\beta_0 K e^{-\mu\tau} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \mu + \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \gamma + \mu + d \end{pmatrix}.$$

基本再生数可以表示为 $R_0 = \rho(FV^{-1})$, 其中, $\rho(FV^{-1})$ 表示矩阵 FV^{-1} 的谱半径。计算可得系统(2)的基本再生数为:

$$R_0 = \frac{\beta_0 K e^{-\mu\tau} [p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)]}{(\gamma + \mu + d)(\mu + \varepsilon)}. \tag{3}$$

当疾病发生时，媒体没有报道相关信息($m = 0$)，此时传染率达到最大值 β_1 ，系统(2)的基本再生数为：

$$R_1 = \frac{\beta_1 K e^{-\mu\tau} [p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)]}{(\gamma + \mu + d)(\mu + \varepsilon)}. \tag{4}$$

由于 $\beta_1 > \beta_0$ ，则 $R_1 > R_0$ ，接下来讨论无病平衡点的局部与全局稳定性。

定理 2.1 当 $R_0 < 1$ 时，系统的无病平衡点 $E_0 = (K, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的。

证明： 系统在无病平衡点 $E_0 = (K, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0) = \left| J_0 + J_1 e^{-\lambda\tau} - \lambda E \right| = \begin{pmatrix} -b - \lambda & 0 & -\beta_0 K \\ 0 & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & p\beta_0 K e^{-\mu\tau} e^{-\lambda\tau} \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\beta_0 K e^{-\mu\tau} e^{-\lambda\tau} - (\gamma + \mu + d) - \lambda \end{pmatrix},$$

则特征方程为：

$$(-b - \lambda) [\lambda^2 + P_1 \lambda + P_0 + (Q_1(\tau)\lambda + Q_0(\tau))\beta_0 K e^{-\lambda\tau}] = 0,$$

其中

$$P_1 = \gamma + 2\mu + d + \varepsilon, P_0 = (\mu + \varepsilon)(\gamma + \mu + d), Q_1(\tau) = (p-1)e^{-\mu\tau}, Q_0(\tau) = (\mu p - \mu - \varepsilon)e^{-\mu\tau}.$$

特征多项式有负的实特征根 $\lambda = -b$ ，其他的特征根由下式决定

$$\lambda^2 + P_1 \lambda + P_0 + (Q_1(\tau)\lambda + Q_0(\tau))\beta_0 K e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{5}$$

当 $\tau = 0$ 时，上式变成：

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \tag{6}$$

其中

$$B = P_1 + Q_1(0)\beta_0 K = (\mu + \varepsilon) + (\gamma + \mu + d) - (1-p)\beta_0 K > 0,$$

$$C = P_0 + Q_0(0)\beta_0 K = (\mu + \varepsilon)[(\gamma + \mu + d) - (1-p)\beta_0 K] - p\beta_0 K \varepsilon > 0.$$

在(6)中， $\Delta = B^2 - 4C = [(\mu + \varepsilon) + (\gamma + \mu + d) - (1-p)\beta_0 K]^2 + 4p\beta_0 K \varepsilon > 0$ ，所以两根均为负实数根。则 $\tau = 0$ 时，无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。

当 $\tau > 0$ 时，由 Hurwitz 准则，方程(5)的特征根都具有负实部，则无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。将 $\lambda = i\omega$ 带入特征方程(5)，整理实部和虚部后，并运用欧拉公式得到：

$$\omega^2 - P_0 = Q_1(\tau)\omega \sin \omega\tau\beta_0 K + Q_0(\tau)\cos \omega\tau\beta_0 K,$$

$$P_1\omega = -Q_1(\tau)\omega \cos \omega\tau\beta_0 K + Q_0(\tau)\sin \omega\tau\beta_0 K,$$

将以上两式分别平方相加得到：

$$\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0 = 0, \tag{7}$$

其中，当 $R_0 < 1$ 时，

$$C_2 = P_1^2 - 2P_0 - Q_1^2(\tau)\beta_0^2 K^2$$

$$= (\gamma + 2\mu + d + \varepsilon)^2 - 2(\mu + \varepsilon)(\gamma + \mu + d) - (p-1)^2 \beta_0^2 K^2 e^{-2\mu\tau}$$

$$= (\mu + \varepsilon)^2 + (\gamma + \mu + d)^2 - (p-1)^2 \beta_0^2 K^2 e^{-2\mu\tau}$$

$$\geq 2(\mu + \varepsilon)(\gamma + \mu + d) + (1-p)\beta_0^2 K^2 e^{-2\mu\tau} > 0,$$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= P_0^2 - Q_0^2(\tau)\beta_0^2K^2 \\
 &= (\mu + \varepsilon)^2(\gamma + \mu + d)^2 - (\mu p - \mu - \varepsilon)^2\beta_0^2K^2e^{-2\mu\tau} \\
 &= (\mu + \varepsilon)^2 + (\gamma + \mu + d)^2(1 - R_0^2) > 0.
 \end{aligned}$$

因此，方程(7)的四个特征根均有负实部，当 $\tau > 0$ 时，系统的无病平衡点 $E_0 = (K, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的。从而得到当 $R_0 < 1$ 时，系统的无病平衡点 $E_0 = (K, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的。

我们令：

$$\phi = \frac{\beta_1 K e^{-\mu\tau}}{\gamma + \mu + d}.$$

定理 2.2 当 $\phi \leq 1$ 时，无病平衡点 E_0 全局渐近稳定。

证明 首先构造一个 Lyapunov 函数

$$V(t) = S - K - K \ln \frac{S}{K} + (L + I)e^{\mu t} + \int_{t-\tau}^t \beta(m, I(u))S(u)I(u)du.$$

显然 $V(t) \geq 0$ 。对 $V(t)$ 求导得：

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= \left(1 - \frac{K}{S}\right)S' + (L' + I')e^{\mu t} + \beta(m, I)SI - \beta(m, I(t-\tau))S(t-\tau)I(t-\tau) \\
 &= \left(1 - \frac{K}{S}\right)bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) + \beta(m, I)KI - \mu e^{\mu t}L - (r + \mu + d)e^{\mu t}I \\
 &= -bK\left(1 - \frac{S}{K}\right)^2 - \mu e^{\mu t}L + [K\beta(m, I) - (r + \mu + d)e^{\mu t}]I \\
 &\leq -bK\left(1 - \frac{S}{K}\right)^2 - \mu e^{\mu t}L + [K\beta_1 - (r + \mu + d)e^{\mu t}]I \\
 &= -bK\left(1 - \frac{S}{K}\right)^2 - \mu e^{\mu t}L + (r + \mu + d)\left(\frac{K\beta_1 e^{-\mu\tau}}{r + \mu + d} - 1\right)e^{\mu t}I.
 \end{aligned}$$

当 $\phi \leq 1$ 时， $V'(t) \leq 0$ 。 $V'(t) = 0$ 当且仅当 $S = K, L = I = 0$ 。那么，集合 $\{(S, L, I) \in R_+^3 : V'(t) = 0\}$ 的最大不变集为 $\{E_0\}$ 。由 Lyapunov-Lasalle 不变集原理得 $t \rightarrow \infty$ 时，系统(2)的非负解均趋于无病平衡点 E_0 。故当 $\phi \leq 1$ 时，无病平衡点 E_0 全局渐近稳定。

注 1: 由于

$$R_0 < R_1 = \frac{\beta_1 K e^{-\mu\tau}}{\gamma + \mu + d} \cdot \frac{p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)}{\mu + \varepsilon} \leq \frac{\beta_1 K e^{-\mu\tau}}{\gamma + \mu + d},$$

其中

$$\frac{p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)}{\mu + \varepsilon} = \frac{\mu + \varepsilon - p\mu}{\mu + \varepsilon} \leq 1.$$

因此，定理 2.2 中条件实际上比常规无病平衡点全局渐近稳定的条件 $R_0 \leq 1$ 要强。

2.2. 地方病平衡点的存在性和稳定性

正平衡点的存在性

将系统(2)的地方病平衡点记为 $E^*(S^*, L^*, I^*)$ ，令方程右侧为 0，通过计算得到

$$S^* = \frac{K(b - \beta(m, I^*)I^*)}{b}, L^* = \frac{p(\gamma + \mu + d)I^*}{p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)}, \quad (8)$$

且 I^* 满足以下方程

$$\begin{aligned} F_1(I) &= K[b(m+I) - (\beta_1 I + \beta_0 m)I](\beta_1 I + \beta_0 m)[p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)]e^{-\mu I}, \\ F_2(I) &= b(\gamma + \mu + d)(\mu + \varepsilon)(m+I)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $I=0$ 时,

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = R_0,$$

且正平衡点的存在性等价于 $F_1(I) = F_2(I)$ 的正根的存在性, 通过分析, 得到以下地方病平衡点的存在性定理:

定理 2.3

- 1) 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)有唯一正平衡点 $E^* = (S^*, E^*, I^*)$ 。
- 2) 当 $R_0 \leq 1$ 时, 若存在 $x^* > 0$ 使得 $F_1'(x^*) = 0$, 定义

$$R_1 = \frac{F_2(x^*)}{F_1(x^*)}$$

则有

- (a) 当 $R_0 = 1$ 时, 模型(2)有唯一正平衡点 $E_1^* = (S^*, L^*, I^*)$ 。
- (b) 当 $\max\{R_0, R_1\} < 1$ 时, 模型(2)有两个正平衡点 $E_- = (S_-, E_-, I_-)$ 和 $E_+ = (S_+, E_+, I_+)$, 其中 $I_- < I_+$ 。
- (c) 当 $R_0 < R_1 = 1$ 时, 模型(2)有一个二重平衡点 $E_2^* = (S_2^*, L_2^*, I_2^*)$ 。
- 3) 其他情况模型(2)没有正平衡点。

证明 注意到

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} F_1(I) = -\infty, \lim_{I \rightarrow +\infty} F_2(I) = +\infty.$$

首先考虑情况 1) 由于 $R_0 > 1$, 所以 $F_1(0) > F_2(0)$, 我们可以直接得到模型(2)有唯一正平衡点。

再考虑情况 2) 如果 $R_0 = 1$, 则 $F_1(0) = F_2(0)$ 。因为存在 $x^* > 0$ 使得 $F_1'(x^*) = 0$, 进一步可得 $F_1(x^*) < F_2(x^*)$, 因此模型(2)有唯一正平衡点。如果 $R_0 < 1$ 且 $R_1 < 1$, 则 $F_2(0) > F_1(0)$ 且 $F_1(x^*) > F_2(x^*)$, 故模型(2)有 2 个正平衡点。如果 $R_0 < R_1 = 1$, 则 $F_2(0) > F_1(0)$ 且 $F_1(x^*) = F_2(x^*)$, 从而模型(2)有一个二重平衡点。

最后考虑情况 3) 此时仅存在两种情况: 当 $R_0 \leq 1$ 且对所有的 $x > 0$ 有 $F_1'(x) > 0$; 当 $R_0 < 1$, 存在 $x^* > 0$ 使得 $F_1'(x^*) = 0$, 且 $R_1 > 1$ 。

例 1 取参数 $b = 2.5, m = 0.5, \beta_1 = 0.6, \beta_0 = 0.02, p = 0.3, \varepsilon = 0.2, \mu = 0.1, \gamma = 0.8, d = 0.5$, 另外分别取 K 为 90, 77.78, 5.5, 4.6, 4.2 则可以得到 R_0 的值分别为 1.1571, 1, 0.707, 0.0591, 0.054 对应定理 2.3 的五种情形, 见图 1。

当 $R_0 > 1, \tau = 0$ 时, 系统(2)在 E^* 处的特征方程为

$$\lambda^3 + (D_2 + E_2)\lambda^2 + (D_1 + E_1)\lambda + D_0 + E_0 = 0, \quad (10)$$

其中

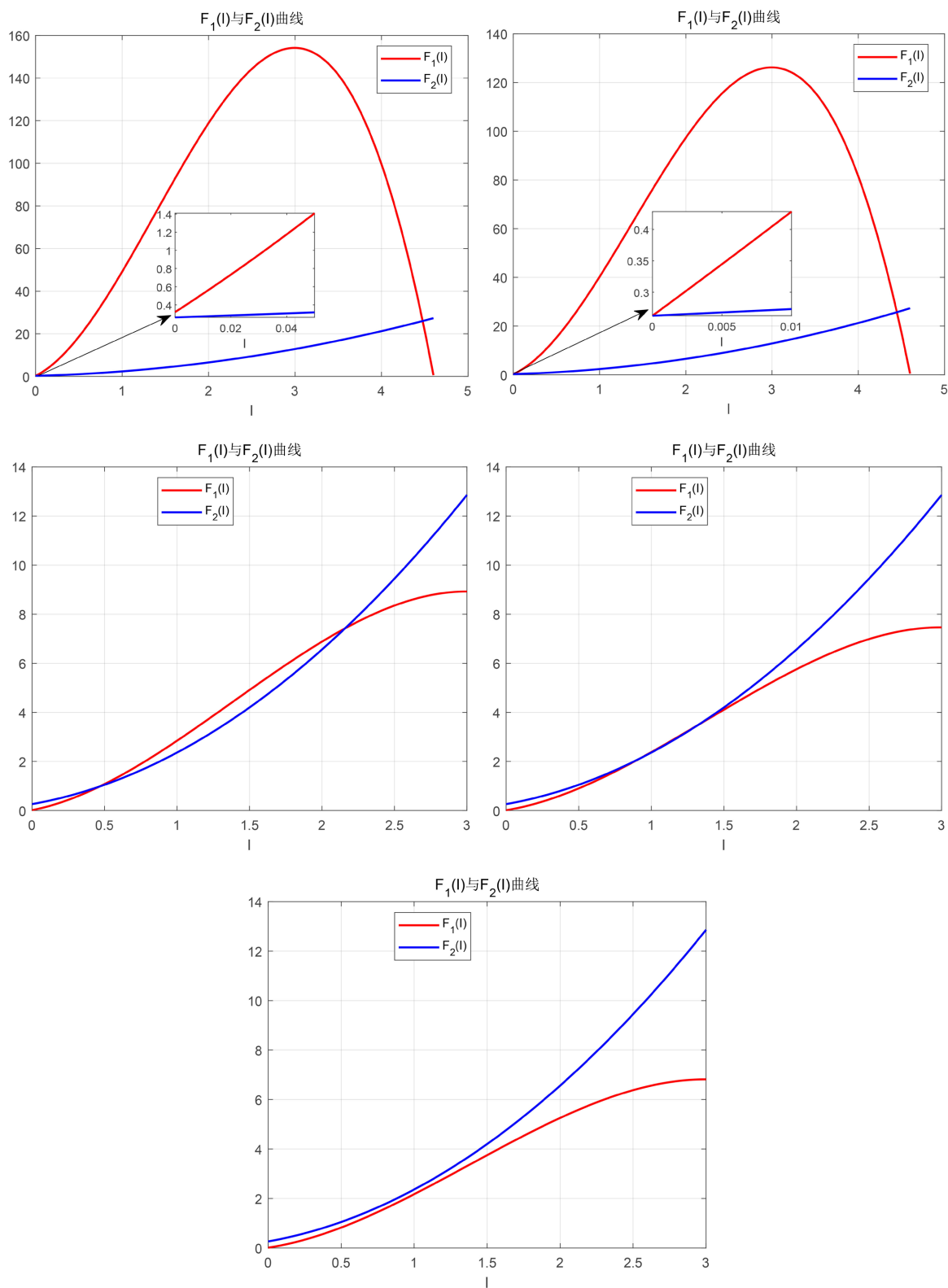


Figure 1. Sketch of intersection line with respect to $F_1(I), F_2(I)$

图 1. $F_1(I), F_2(I)$ 的交线示意图

$$\begin{aligned}
D_2 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), D_1 = a_{22}(a_{11} + a_{33}) + a_{11}a_{33}, D_0 = -a_{11}a_{22}a_{33}, E_2 = -b_{33}, \\
E_1 &= (a_{11} + a_{22})b_{33} - a_{13}b_{31} - a_{32}b_{23}, E_0 = a_{13}(a_{22}b_{31} - a_{32}b_{21}) + a_{11}(a_{32}b_{23} - a_{22}b_{33}), \\
a_{11} &= b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^*, a_{13} = -\beta(m, I^*)S^*, a_{22} = -(\mu + \varepsilon), a_{32} = \varepsilon, a_{33} = -(\gamma + \mu + d), \\
b_{21} &= p\beta(m, I^*)I^*, b_{23} = p\beta(m, I^*)S^*, b_{31} = (1-p)\beta(m, I^*)I^*, b_{33} = (1-p)\beta(m, I^*)S^*.
\end{aligned}$$

令 $a_2 = D_2 + E_2, a_1 = D_1 + E_1, a_0 = D_0 + E_0$, 则

$$\begin{aligned}
a_2 &= (\mu + \varepsilon)(\gamma + \mu + d) - \left(b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^* \right) - (1-p)\beta(m, I^*)S^*, \\
a_1 &= -\left(b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^* \right) \left[(\mu + \varepsilon) + (\gamma + \mu + d) - (1-p)\beta(m, I^*)S^* \right] \\
&\quad + \beta(m, I^*)S^* \left[p\varepsilon - (\mu + \varepsilon)(1-p) - (1-p)\beta(m, I^*)I^* \right], \\
a_0 &= \left(b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^* \right) \left[\beta(m, I^*)S^* (p\varepsilon + (\mu + \varepsilon)(1-p)) - (\mu + \varepsilon)(\gamma + \mu + d) \right] \\
&\quad + \beta^2(m, I^*)S^*I^* \left[p\varepsilon + (\mu + \varepsilon)(1-p) \right].
\end{aligned}$$

由 Hurwitz 准则可得下述地方病平衡点 $E^*(S^*, L^*, I^*)$ 局部渐近稳定的定理。

定理 2.4 当 $\tau = 0, R_0 > 1$ 且条件

$$(H) \quad a_2 > 0, a_0 > 0, a_2a_1 > a_0$$

成立时, $E^*(S^*, L^*, I^*)$ 是局部渐近稳定的。

注 2: 由于模型的复杂性, 尤其是地方病平衡点表达式的复杂性, 很遗憾条件(H)并未验证出来。

3. Hopf 分支

当 $R_0 > 1$ 时, 我们能得到

$$\tau < \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{\beta_0 K [p\varepsilon + (1-p)(\mu + \varepsilon)]}{(\gamma + \mu + d)(\mu + \varepsilon)} \right) =: \tau_{\max}.$$

此时系统在地方病平衡点 $E^*(S^*, L^*, I^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^* - \lambda & 0 & -\beta(m, I^*)S^* \\ p\beta(m, I^*)I^*e^{-\mu\tau}e^{-\lambda\tau} & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & p\beta(m, I^*)S^*e^{-\mu\tau}e^{-\lambda\tau} \\ (1-p)\beta(m, I^*)I^*e^{-\mu\tau}e^{-\lambda\tau} & \varepsilon & (1-p)\beta(m, I^*)S^*e^{-\mu\tau}e^{-\lambda\tau} - (\gamma + \mu + d) - \lambda \end{pmatrix}.$$

故特征方程为:

$$\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_1\lambda + D_0 + (E_2\lambda^2 + E_1\lambda + E_0)e^{-\mu\tau}e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned}
D_2 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), D_1 = a_{22}(a_{11} + a_{33}) + a_{11}a_{33}, D_0 = -a_{11}a_{22}a_{33}, E_2 = -b_{33}, \\
E_1 &= (a_{11} + a_{22})b_{33} - a_{13}b_{31} - a_{32}b_{23}, E_0 = a_{13}(a_{22}b_{31} - a_{32}b_{21}) + a_{11}(a_{32}b_{23} - a_{22}b_{33}), \\
a_{11} &= b - \frac{2b}{K}S^* - \beta(m, I^*)I^*, a_{13} = -\beta(m, I^*)S^*, a_{22} = -(\mu + \varepsilon), a_{32} = \varepsilon, a_{33} = -(\gamma + \mu + d), \\
b_{21} &= p\beta(m, I^*)I^*, b_{23} = p\beta(m, I^*)S^*, b_{31} = (1-p)\beta(m, I^*)I^*, b_{33} = (1-p)\beta(m, I^*)S^*.
\end{aligned}$$

将 $\lambda = i\omega$ 代入特征方程(11), 运用欧拉公式, 分离实部和虚部后可得等式

$$\begin{cases} \left[(-E_2\omega^2 + E_0)\cos\omega\tau + E_1\omega\sin\omega\tau \right] e^{-\mu\tau} = D_2\omega^2 - D_0, \\ \left[E_1\omega\cos\omega\tau + (E_2\omega^2 - E_0)\sin\omega\tau \right] e^{-\mu\tau} = \omega^3 - D_1\omega, \end{cases} \quad (12)$$

对(12)中的两个方程分别平方后相加, 得到如下多项式:

$$G(u) = u^3 + q_2u^2 + q_1u + q_0, \quad u = \omega^2. \quad (13)$$

其中 $q_2 = D_2^2 - 2D_1 - E_2^2e^{-2\mu\tau}$, $q_1 = D_1 - 2D_0D_2 + (-E_1^2 + 2E_0E_2)e^{-2\mu\tau}$, $q_0 = D_0^2 - E_0^2e^{-2\mu\tau}$ 。

同时, 我们将(12)中的 $\sin\omega\tau$ 和 $\cos\omega\tau$ 分离出来, 得到:

$$\begin{cases} \sin\omega\tau = \frac{\left[-E_2\omega^4 + (E_1D_2 + E_2D_1)\omega^3 + E_0\omega^2 - (E_1D_0 + E_0D_1)\omega \right] e^{\mu\tau}}{(E_2\omega^2 - E_0)^2 + E_1^2\omega^2} := h_1(\tau, \omega), \\ \cos\omega\tau = \frac{\left[-E_2D_2\omega^4 + E_1\omega^3 + (E_2D_0 + E_0D_2 - E_1D_1)\omega^2 - E_0D_0 \right] e^{\mu\tau}}{(E_2\omega^2 - E_0)^2 + E_1^2\omega^2} := h_2(\tau, \omega). \end{cases} \quad (14)$$

假设 $J \subseteq \mathbb{R}_{+0}$ 是使得 $\omega(\tau)$ 为(11)的正根的所有 τ 的集合, 且当 $\tau \notin J$ 时, $\omega(\tau)$ 不确定。我们可以将角度 $\theta(\tau) \in [0, 2\pi]$ 定义为(14)的解:

$$\begin{cases} \sin\theta(\tau) = \frac{\left[-E_2\omega^4 + (E_1D_2 + E_2D_1)\omega^3 + E_0\omega^2 - (E_1D_0 + E_0D_1)\omega \right] e^{\mu\tau}}{(E_2\omega^2 - E_0)^2 + E_1^2\omega^2}, \\ \cos\theta(\tau) = \frac{\left[-E_2D_2\omega^4 + E_1\omega^3 + (E_2D_0 + E_0D_2 - E_1D_1)\omega^2 - E_0D_0 \right] e^{\mu\tau}}{(E_2\omega^2 - E_0)^2 + E_1^2\omega^2}, \end{cases} \quad (15)$$

对于 $\tau \in J$, (15)中的自变量 “ $\theta(\tau)$ ” 与(14)中的 “ $\omega(\tau)\tau$ ” 之间的关系为:

$$\omega(\tau)\tau = \theta(\tau) + n2\pi, n \in \mathbb{N}_0. \quad (16)$$

因此, 我们可以定义由下式给出的映射 $\tau_n : J \rightarrow \mathbb{R}_{+0}$,

$$\tau_n(\tau) := \frac{\theta(\tau) + n2\pi}{\omega(\tau)}, n \in \mathbb{N}_0, \tau \in J, \quad (17)$$

其中 $\omega(\tau)$ 是满足 $\tau \in J, J \subseteq \mathbb{R}_{+0}$ 的一个根。我们引入函数 $J \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S_n(\tau) := \tau - \tau_n(\tau), \tau \in J, n \in \mathbb{N}_0, \quad (18)$$

它们在 τ 中是连续且可微的。

定理 3.1 假设 $\omega(\tau)$ 是满足 $\tau \in J, J \subseteq \mathbb{R}_{+0}$ 一个正实根, 且在某一 $\tau^* \in J$,

$$S_n(\tau^*) := 0, n \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

那么在 $\tau = \tau^*$ 处(11)存在一对简单共轭纯虚根 $\lambda_{\pm}(\tau^*) = \pm i\omega(\tau^*)$, 如果 $\delta(\tau^*) > 0$, 则它们从左到右穿过虚轴; 如果 $\delta(\tau^*) < 0$, 则从右到左穿过虚轴, 其中

$$\delta(\tau^*) = \text{sign} \left\{ \left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d \tau} \right|_{\lambda = i\omega(\tau^*)} \right\}. \quad (20)$$

接下来, 我们在附录 1 中的条件(H_i) (其中 $i = 0, 1$)下, 分析正平衡点 $E^* = (S^*, E^*, I^*)$ 的 Hopf 分支。

定理 3.2 我们令

$$W_0 = \{\tau : \tau \in [0, \tau_{\max}) \text{ 满足 } (H_0)\}, \quad (21)$$

设条件(H)成立, 那么(2)在 W_0 内不会发生 Hopf 分支, 且正平衡态 E^* 的稳定性在 W_0 的每个连通子区间内保持不变。

接下来, 当条件(H₁)成立时, 我们进行 Hopf 分支分析。令

$$W_1 = \{\tau : \tau \in [0, \tau_{\max}) \text{ 满足 } (H_1)\}. \quad (22)$$

参考文献[15]的引理 4.2, 我们可得出结论: 当 $\tau \in W_1$ 时, 多项式 $G(u)$ 有唯一单重零点(记为 u^*), 由此可得 $\omega = \sqrt{u^*}$ 且集合 W_1 要么是一个单连通区间, 要么是若干个连通区间的并集。为简便起见, 我们假设:

(A₁) W_1 是一个单连通区间, 满足: $0 \in W_1$ 且 $[0, \tau_{\max}) = W_0 \cup W_1$ 。

则 $W_1 = [0, \sup W_1)$ 。对 $\tau \in W_1$, $n \in N_0$, 根据(18)式, 我们定义

$$\bar{S}_n(\tau) = \sup\{S_n(\tau) : \tau \in W_1\}, \quad (23)$$

其中, $\theta(\tau)$ 是 $\sin \theta = h_1$ 和 $\cos \theta = h_2$ 在 $[0, 2\pi)$ 中的唯一解, 则

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \arccos(h_2(\tau, \omega(\tau))), & h_1(\tau, \omega(\tau)) > 0, \\ 2\pi - \arccos(h_2(\tau, \omega(\tau))), & h_1(\tau, \omega(\tau)) \leq 0. \end{cases} \quad (24)$$

因此, $\pm i\omega(\tau^*)$ 是(11)的一对纯虚特征值, 当且仅当存在某个 $n \in N_0$ 使得 $S_n(\tau^*) = 0$ 。参考文献[16]的定理 2.2 可推得

$$\text{sign}(\text{Re } \lambda'(\tau^*)) = \text{sign}\left(\frac{\partial G(\omega^2)}{\partial \omega}(\omega(\tau^*), \tau^*)\right) \text{sign}(S'_n(\tau^*)) = \text{sign}(S'_n(\tau^*)). \quad (25)$$

我们定义 $N_1 = \{n \in N_0 : \bar{S}_n \leq 0\}$,

定理 3.3 设条件(A₁)成立且当 $\tau = 0$ 时条件(H)成立, 则:

1) 若 $\bar{S}_0 \leq 0$, 则正平衡点 E^* 对所有 $\tau \in [0, \tau_{\max})$ 均为局部渐近稳定。

2) 若 $\bar{S}_0 > 0$, 且对所有 $n \in N_0$ 而言, $\bar{S}_n(\tau)$ 在 W_1 中至多有两个零点(重根按重数算), 则恰好存在 $2N_1$ 个 Hopf 分支值, 记在 $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{2N_1-1}$ 点处会发生 Hopf 分支, 正平衡点 E^* 在 $\tau \in [0, \tau_0) \cup (\tau_{2N_1-1}, \tau_{\max})$ 时为局部渐近稳定, 在 $\tau \in (\tau_0, \tau_{2N_1-1})$ 时不稳定。

4. 数值分析

例 2 当 $\tau = 0$ 时, 取参数 $K = 10, b = 1.1, m = 0.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.2, p = 0.3, \varepsilon = 0.2, \mu = 0.1, \gamma = 0.8, d = 0.1$, 此时 $R_0 = 1.8$, 得平衡点 $E^*(3.9327, 2.6247, 2.3622)$, 分别取初始值 $(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1)$ 得图 2 中蓝色, 红色, 黑色解轨线, 容易看出此时平衡点 E^* 局部渐近稳定。

例 3 取参数 $K = 100, b = 1.1, m = 0.5, \beta_1 = 0.3, \beta_0 = 0.2, p = 0.3, \varepsilon = 0.2, \mu = 0.1, \gamma = 0.8, d = 0.1$, 可得 $S_n(\tau)$ 的图像见图 3, 其中 τ_0, τ_1 是 S_0 的正根, τ_2, τ_3 是 S_1 的正根, 且

$$\tau_0 \approx 1.3 < \tau_2 \approx 13 < \tau_3 \approx 15.63 < \tau_1 \approx 15.64.$$

由图 3 及定理 3.3 可知 τ_0, τ_1 为 2 个 Hopf 分支点, 且 E^* 在 $\tau \in (0, \tau_0) \cup (\tau_1, \tau_{\max})$ 时局部渐近稳定, 在 $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ 时不稳定。此外, 分别取 $\tau = 10, 15, 25$ 在初值 $(2, 2, 2)$ 下可得图 4。

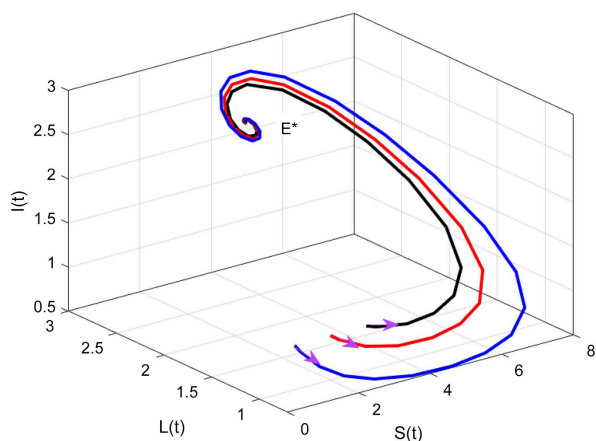


Figure 2. Model solution trajectory diagram
图 2. 模型解轨线图

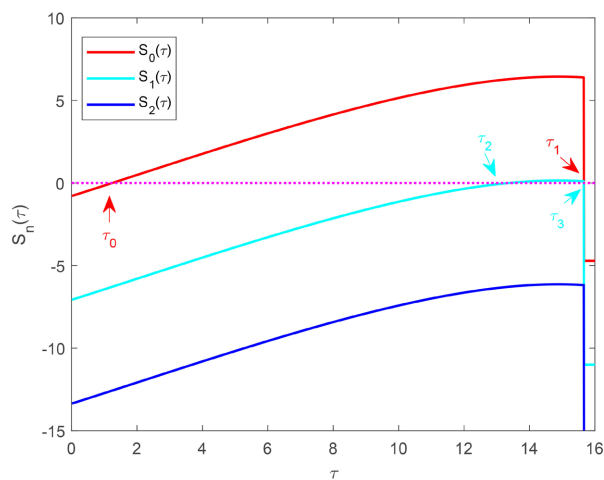
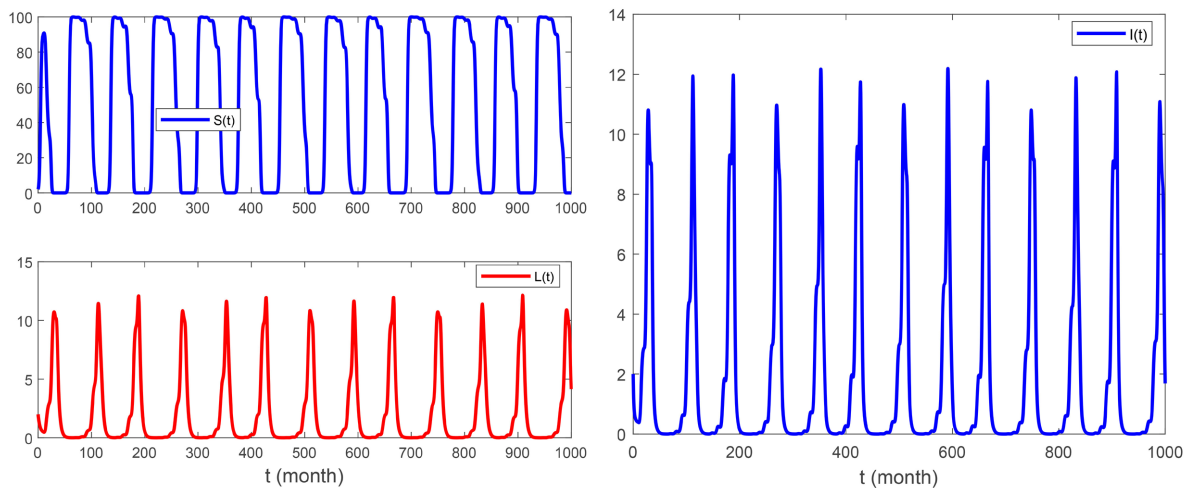


Figure 3. Diagram of $S_n(\tau)$
图 3. $S_n(\tau)$ 的图像



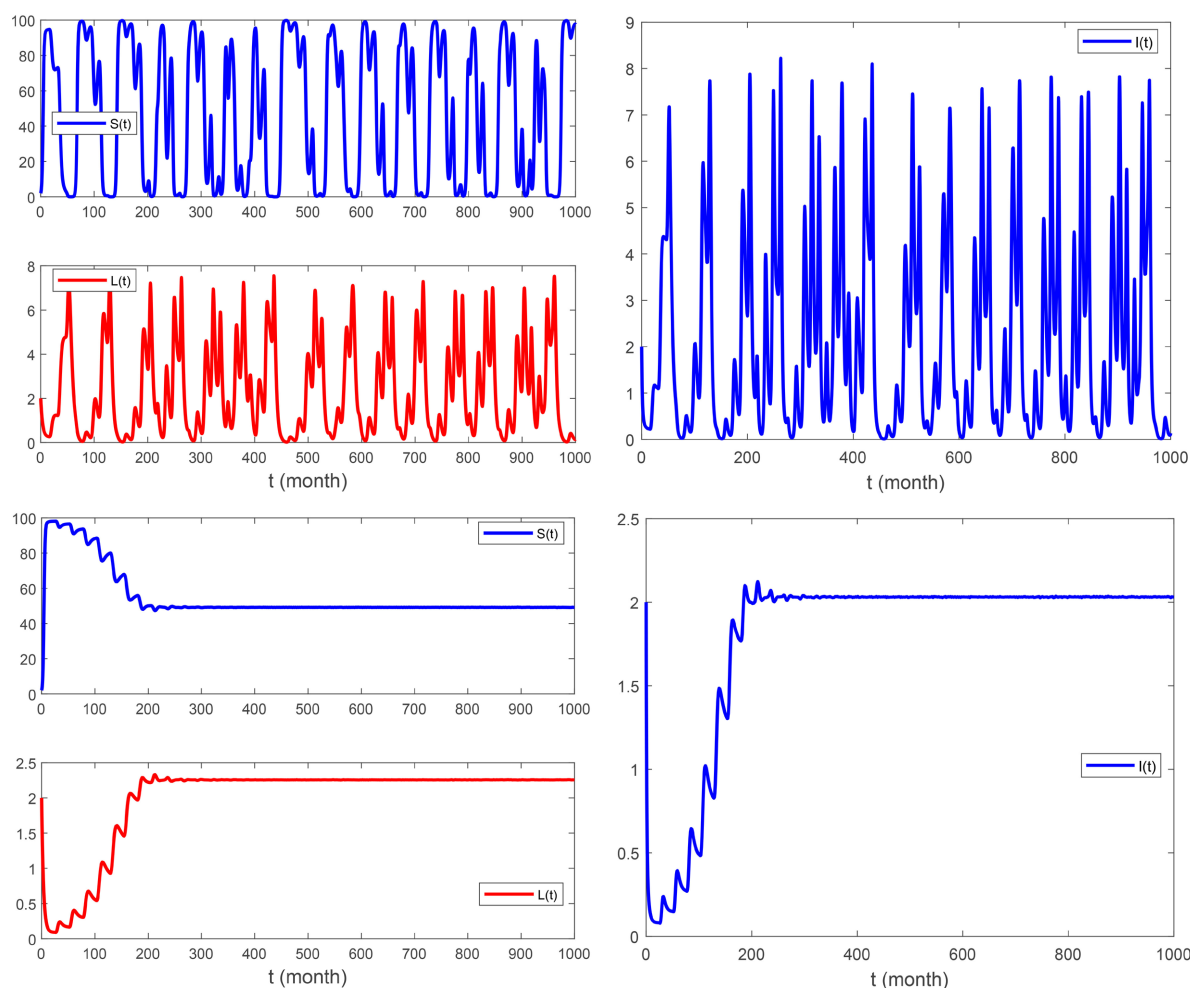


Figure 4. Time series figures of the model

图 4. 模型时间序列图

基金项目

安徽省高等学校自然科学研究重点项目(2023AH050415); 阜阳师范大学博士启动基金项目(2021KYQD0001, 2021KYQD0002); 阜阳师范大学教育教学改革研究项目(2024JYXM0018); 国家级大学生创新创业项目“两菌株肺结核传播的常微分方程模型及其在安徽省的应用”(202410371031); 国家级大学生创新创业项目“基于流行病学模型的包虫病传播与最优控制研究”(202410371033); 省级大学生创新创业项目“环境周期性影响下肺结核动力学模型分析及其在我国的应用”(S202510371027)。

参考文献

- [1] Snider, D., Raviglione, M. and Kochi, A. (1994) Tuberculosis: Pathogenesis, Protection, and Control. American Society for Microbiology, 3-11.
- [2] <https://www.who.int/teams/global-programme-on-tuberculosis-and-lung-health/tb-reports/global-tuberculosis-report-2025>, 2026-04-20.
- [3] Colijn, C., Cohen, T. and Murray, M. (2007) Emergent Heterogeneity in Declining Tuberculosis Epidemics. *Journal of Theoretical Biology*, **247**, 765-774. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.04.015>
- [4] Liu, R., Wu, J. and Zhu, H. (2007) Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases.

- Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **8**, 153-164. <https://doi.org/10.1080/17486700701425870>
- [5] Cui, J., Sun, Y. and Zhu, H. (2008) The Impact of Media on the Control of Infectious Diseases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 31-53. <https://doi.org/10.1007/s10884-007-9075-0>
- [6] Ross, R. (1911) *The Prevention of Malaria*. 2nd Edition, Murray.
- [7] Macdonald, G. (1957) *The Epidemiology and Control of Malaria*. Oxford University Press.
- [8] Beretta, E., Hara, T., Ma, W. and Takeuchi, Y. (2001) Global Asymptotic Stability of an SIR Epidemic Model with Distributed Time Delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **47**, 4107-4115. [https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(01\)00528-4](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(01)00528-4)
- [9] Ruiz-Herrera, A. (2013) Chaos in Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **33**, 1633-1644. <https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.1633>
- [10] Guo, Z., Huo, H., Xiang, H. and Ren, Q. (2023) Global Dynamics of a Tuberculosis Model with Age-Dependent Latency and Time Delays in Treatment. *Journal of Mathematical Biology*, **87**, Article No. 66. <https://doi.org/10.1007/s00285-023-01999-1>
- [11] Liu, Y. and Cui, J. (2008) The Impact of Media Coverage on the Dynamics of Infectious Disease. *International Journal of Biomathematics*, **1**, 65-74. <https://doi.org/10.1142/s1793524508000023>
- [12] Zhao, H. and Zhao, M. (2017) Global Hopf Bifurcation Analysis of an Susceptible-Infective-Removed Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Time Delay. *Journal of Biological Dynamics*, **11**, 8-24. <https://doi.org/10.1080/17513758.2016.1229050>
- [13] Song, P. and Xiao, Y. (2019) Analysis of an Epidemic System with Two Response Delays in Media Impact Function. *Bulletin of Mathematical Biology*, **81**, 1582-1612. <https://doi.org/10.1007/s11538-019-00586-0>
- [14] Wang, N., Qi, L., Bessane, M. and Hao, M. (2023) Global Hopf Bifurcation of a Two-Delay Epidemic Model with Media Coverage and Asymptomatic Infection. *Journal of Differential Equations*, **369**, 1-40. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.05.036>
- [15] Pan, X., Chen, Y. and Shu, H. (2019) Rich Dynamics in a Delayed HTLV-I Infection Model: Stability Switch, Multiple Stable Cycles, and Torus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 2214-2235. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.051>
- [16] Beretta, E. and Kuang, Y. (2002) Geometric Stability Switch Criteria in Delay Differential Systems with Delay Dependent Parameters. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, 1144-1165. <https://doi.org/10.1137/s0036141000376086>

附录

附录 1 $G(u) = 0$ 的简单正根

参考文献[16]的引理 4.2, 我们直接给出下述关于 $G(u)$ 零点的结论:

引理 考虑具有一般实系数 q_0, q_1, q_2 的三次方程 $G(u) = 0$ 。设 $u_{\pm} = \left(-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 3q_1}\right) / 3$ (如果存在)。

我们有以下结果:

- a) $G(u)$ 没有任何正零点当且仅当(H_0): 以下条件之一成立
- (i) $q_2^2 \leq 3q_1$ 和 $q_0 \geq 0$; (ii) $q_2^2 > 3q_1, q_0 \geq 0$, 以及 $u_+ \leq 0$;
- (iii) $q_2^2 > 3q_1, q_0 \geq 0$, 以及 $G(u_+) > 0$ 。
- b) $G(u)$ 恰好有一个简单正零点当且仅当(H_1): 以下条件之一成立
- (i) $q_2^2 < 3q_1$ 和 $q_0 < 0$; (ii) $q_2^2 = 3q_1, q_0 < 0$, 以及 $q_2^3 \neq 27q_0$;
- (iii) $q_2^2 > 3q_1, q_0 < 0$, 以及 $u_- < 0$; (iv) $q_2^2 > 3q_1, q_0 < 0$, 以及 $G(u_+)G(u_-) > 0$;
- (v) $q_2^2 > 3q_1, q_0 = 0$, 以及 $u_- \leq 0 < u_+$ 。
- c) $G(u)$ 恰好有两个简单正零点当且仅当(H_2): 以下条件之一成立
- (i) $q_2^2 > 3q_1, q_0 > 0, u_+ > 0$ 且 $G(u_+) < 0$; (ii) $q_2^2 > 3q_1, q_0 = 0, u_- > 0$ 且 $G(u_-) < 0$ 。
- $G(u)$ 恰好有三个简单正零点当且仅当(H_3) $q_2^2 > 3q_1, q_0 < 0, u_- > 0$ 且 $G(u_+)G(u_-) < 0$ 。