Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 35-41
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154133

Hans汉斯

三阶可对角化系数矩阵下Yang-Baxter矩阵方程组的解

李傲楠[1*]，易胜辉[2]

[1]赣南师范大学数学与计算机科学学院，江西 赣州
[2]于都县罗江中心小学，江西 赣州

收稿日期：2026年3月2日；录用日期：2026年3月26日；发布日期：2026年4月3日

摘 要

本文给出了Yang-Baxter矩阵方程组在系数矩阵为三阶可对角化的情况下的解。通过对系数矩阵进行相似变换为Jordan标准型，再从解的结构出发分类讨论，使用Gröbner基技术来给出这个方程组的对应解。

关键词

Yang-Baxter矩阵方程，Gröbner基，Jordan标准型

On the Solutions to the Third-Order Yang-Baxter Matrix Equations with Diagonalizable Coefficient Matrices

Ao'nan Li[1*], Shenghui Yi[2]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi
[2]Yudu Luojiang Central Primary School, Ganzhou Jiangxi

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 3, 2026

Abstract

This paper investigates the solutions to the third-order Yang-Baxter matrix equations under the condition that the coefficient matrices are diagonalizable. By applying similarity transformations to reduce the coefficient matrices to their Jordan canonical forms, the structure of the solutions is

*通讯作者。

文章引用: 李傲楠, 易胜辉. 三阶可对角化系数矩阵下 Yang-Baxter 矩阵方程组的解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 35-41. DOI: 10.12677/aam.2026.154133

analyzed through case classifications. The corresponding solutions are explicitly derived using Gröbner basis techniques.

Keywords

Yang-Baxter Matrix Equations, Gröbner Basis, Jordan Canonical Form

1. 引言

本文研究 Yang-Baxter 矩阵方程组

$$\begin{cases} AXA = XBX, \\ XAX = BXB \end{cases} \tag{1}$$

的解，其中 A 和 B 为 3 阶实可对角化系数矩阵。Yang-Baxter 矩阵方程 $AXA = XAX$ 因其与数学物理中 Yang-Baxter 方程在形式上相似而得名。Yang-Baxter 方程由 Yang [1]和 Baxter [2]在统计力学中提出，用于描述一维量子多体系统中的散射行为，是现代数学和理论物理中一个基础而深刻的函数方程。虽然其形式简洁，却像一条隐秘的脉络，贯穿于完全可积系统、统计力学、量子群、扭结理论[3]乃至量子计算等多个重要领域。而 Yang-Baxter 矩阵方程是一个具有丰富代数结构和数值挑战性的非线性矩阵方程，其研究不仅深化了对矩阵函数与广义逆的理解，也推动了高效数值算法的发展。在纯粹数学与计算数学中占有重要地位，尤其在幂零阵[4] [5]、秩 2 矩阵[6]等特殊矩阵类[7]上的解的结构分析以及对角元的元素分析[8]等方面取得了系统而完整的成果。

文献[9]主要研究 Yang-Baxter 矩阵方程组(1)，它打破经典 Yang-Baxter 方程 $AXA = XBX$ 的对称性，从而摆脱“$X = A$”这一平凡解的困扰，并探索当两个系数矩阵 A 和 B 不同时更丰富的数学结构。首先，作者建立了该方程组与一个“块状”经典 Yang-Baxter 方程之间的深刻联系，从而能够利用已知的结论。其次，他们从谱理论、交换性等角度系统地分析了解的代数性质，给出了可逆解、奇异解存在的必要条件，并特别研究了一类重要的“交织解”(即满足 $AX = XB$ 且 $BX = XA$ 的解)。第三，文章运用 Brouwer 不动点定理等拓扑工具，探讨了在系数矩阵满足特定条件时，双随机解的存在性问题。第四，文章完整刻画了一类非常重要的特殊情况：当 A 和 B 是幂等正交补矩阵时，方程组的所有解的结构，并给出了明确的分块形式。最后，作为具体实现的典范，作者利用计算交换代数中的 Gröbner 基技术，完全分类并显式地给出了当 A 和 B 为 2 阶矩阵时(包括可对角化与不可对角化情形)，方程组的所有可能解。本文在[8]的基础上给出了三阶 Yang-Baxter 矩阵方程组在系数矩阵可对角化的情况下的解以扩充 Yang-Baxter 矩阵方程组解的探索。

2. 三阶系数矩阵可对角化的解

为得到主要结论，给出如下引理。

引理 1 [9] 矩阵 X 是方程组(1)的解当且仅当 $\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix}$ 是方程

$$\hat{X}\hat{A}\hat{X} = \hat{A}\hat{X}\hat{A} \tag{2}$$

的解，其中 $\hat{A}=\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$。

引理 2 [9] (正则解的必要条件)设 A 和 B 为非奇异矩阵。则

(a) 方程组(1)存在非奇异解，仅当 $\det\left(A^3\right)=\det\left(B^3\right)$。特别地，若 A 和 B 的特征值均为实数，则(1)存在非奇异解的必要条件是 $\det(A)=\det(B)$。

(b) 若方程组(1)确实存在一个非奇异解 X，则 X^2 必定与 BA 相似。

接下来讨论当 A 和 B 为若尔当标准型形式的 3×3 矩阵时，方程组(1)的解，由引理 1 可知，求方程组(1)的解等价于求方程(2)的解。

定理 1 设 A,B 是三阶可对角化矩阵，满足 $AB=BA$，则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=C=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix},\quad P^{-1}BP=D=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}。$$

则方程组(1)的解具有如下结构。

(a) 对角解：若 $x_{ij}=0,i\neq j$，则对每个 $i=1,2,3$，有 $\begin{cases}x_{ii}^2\alpha_i=\beta_i^2x_{ii}\\ x_{ii}^2\beta_i=\alpha_i^2x_{ii}\end{cases}$，特别的，当 $\alpha_i=\beta_i$ 时，$x_{ii}=0$ 或 $x_{ii}=\beta_i$。

(b) 分块对角解：若 $X=diag\left(X_1,x_{33}\right)$，其中 X_1 为 2×2 矩阵，则原方程组可分解为关于 X_1 的二阶 Yang-Baxter 矩阵方程组和关于 x_{33} 的标量方程。

(c) 一般解：当 X 可逆时，存在可逆矩阵 Q 使得解具有特定形式。当 X 秩为 1 时，方程组(1)的解为 $X=uv^{\mathrm{T}}$，且 $v^{\mathrm{T}}Au\neq0$ 且 $v^{\mathrm{T}}Bu\neq0$，此时 u 是 A 和 B 的共同特征向量，v 是 A^{T} 和 B^{T} 的共同特征向量，且特征值满足 $\lambda\delta=\gamma\left(v^{\mathrm{T}}u\right),\lambda\left(v^{\mathrm{T}}u\right)=\gamma\theta$。

证明：(a) 对角解

若 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & 0 & 0\\ 0 & x_{22} & 0\\ 0 & 0 & x_{33}\end{bmatrix}$，方程组(1)化为 $\begin{cases}x_{ii}^2\alpha_i=\beta_i^2x_{ii},\\ x_{ii}^2\beta_i=\alpha_i^2x_{ii},\end{cases}\left(i=1,2,3\right)$。

由上可知，若 $\alpha_i=\beta_i$，则 $x_{ii}=0$ 或 $x_{ii}=\beta_i$。

(b) 分块对角解

若 $X=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & x_{33}\end{bmatrix}$，其中 $X_1=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$，则方程组(1)可以分解为低维子系统，降为二阶矩阵的运算，这样就转化为了[8]中的二阶的情况，从而可得到对应解。

(c) 一般解

一般情况需解 18 个多项式方程，通过计算 Gröbner 基，可得以下形式的解：

当 $\det(X)\neq0$ 时，即考虑方程组的一般型非奇异解，此时方程组的解满足 $X^2=U(AB)U^{-1}$，其中 U 表示某一可逆矩阵，$AB=\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2\beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3\end{bmatrix}$，其显示解可表示为 $X=U\left(\sqrt{AB}\right)U^{-1}$。

当 $\det(X)=0$ 时，即考虑方程组的一般型奇异解，可通过解的秩来分类讨论。

若 $r(X)=1$，设 $X=uv^{\mathrm{T}}$，其中 $u,v\in R^3$，则 $\det(X)=0$，代入方程得

$$\begin{cases}Auv^{\mathrm{T}}A=uv^{\mathrm{T}}Buv^{\mathrm{T}},\\ uv^{\mathrm{T}}Auv^{\mathrm{T}}=Buv^{\mathrm{T}}B,\end{cases}$$

其等价于

$$\begin{cases}(Au)(v^{\mathrm{T}}A)=(v^{\mathrm{T}}Bu)uv^{\mathrm{T}},\\(v^{\mathrm{T}}Au)uv^{\mathrm{T}}=(Bu)(v^{\mathrm{T}}B),\end{cases}$$

若 $v^{\mathrm{T}}Au\neq 0$ 且 $v^{\mathrm{T}}Bu\neq 0$，则需

$$\frac{Bu}{v^{\mathrm{T}}Au}=\frac{u}{v^{\mathrm{T}}B}\text{ 和 }\frac{Au}{v^{\mathrm{T}}Bu}=\frac{u}{v^{\mathrm{T}}A},$$

可知 u 是 A 和 B 的共同特征向量，v 是 A^{T} 和 B^{T} 的共同特征向量。

设 $Au=\lambda u, Bu=\gamma u, A^{\mathrm{T}}v=\delta v, B^{\mathrm{T}}v=\theta v$，将此式代入原方程组可得

$$\lambda\delta=\gamma(v^{\mathrm{T}}u),\lambda(v^{\mathrm{T}}u)=\gamma\theta.$$

选择满足上述条件的 u,v 即可得到秩 1 解。

定理 1 中我们假定了系数矩阵 A 和 B 满足交换条件 $AB=BA$。这一假设使得 A 和 B 可以同时对角化(因二者均为可对角化矩阵)，从而将原方程组简化为关于对角元的标量方程或低维分块问题，极大地降低了求解难度。在此简化框架下，我们得以系统分类并显式给出对角解、分块对角解及部分一般解的结构。

然而，当 $AB\neq BA$ 时，问题将变得极为复杂。此时 A 和 B 无法通过同一相似变换同时对角化，即使二者各自可对角化，它们相对于同一基的矩阵表示也不再是对角形式。这意味着方程组(1)将化为关于未知矩阵 X 的更为复杂的多项式方程组，其代数结构高度依赖于 A 和 B 的非交换性。

因此，本文仅处理交换情形，旨在为后续研究提供基础。对于非交换情形下三阶可对角化系数矩阵的 Yang-Baxter 方程组，仍有待深入探索，例如可尝试利用广义特征向量、若尔当标准型或数值方法进行研究。

对于秩 2 解，由于其计算非常复杂，我们给出秩 2 解存在的必要条件：

定理 2 秩 2 解存在的必要条件是 $r(A)+r(B)\leq 2$ 或 $r(A)=r(B)=2$，并且当 $r(A)=r(B)=2$ 时，A 和 B 的核空间满足 $Ker(A)=Ker(B)$。

证明： 假设 X 是方程组(1)的秩 2 解。由于 A 和 B 可对角化且 $AB=BA$，存在一个可逆矩阵 $P\in R^{3\times 3}$，使得

$$P^{-1}XP=Y=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $X_1\in R^{2\times 2}$ 是可逆矩阵。

$$\text{令 } P^{-1}AP=C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix},\quad P^{-1}BP=D=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\D_{21} & D_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $C_{11},D_{11}\in R^{2\times 2}$，$C_{12},D_{12}\in R^{2\times 1}$，$C_{21},D_{21}\in R^{1\times 2}$，$C_{22},D_{22}\in R^{1\times 1}$。

则方程组(1)等价于

$$\begin{cases}YCY=DYD,\\YDY=CYC,\end{cases}$$

且满足 $r(C)=r(A)$、$r(D)=r(B), Ker(C)=P^{-1}Ker(A)$、$Ker(D)=P^{-1}Ker(B)$。

展开矩阵 YCY：

$$YCY=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1C_{11}X_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

展开矩阵 DYD：

$$DYD=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11}X_1D_{11}&D_{11}X_1D_{12}\\D_{21}X_1D_{11}&D_{22}X_1D_{12}\end{bmatrix}.$$

由矩阵相等的充要条件，对应分块元素相等可知：

$$D_{11}X_1D_{12}=0,D_{21}X_1D_{11}=0,D_{22}X_1D_{12}=0.$$

因 X_1 可逆，$D_{11}X_1$ 列满秩，故 $D_{11}X_1D_{12}=0$ 蕴含 $D_{12}=0$；同理 X_1D_{11} 行满秩，故 $D_{21}X_1D_{11}=0$ 蕴含 $D_{21}=0$。因此 D 简化为分块对角矩阵：

$$D=\begin{bmatrix}D_{11}&0\\0&D_{22}\end{bmatrix}.$$

展开矩阵 YDY：

$$YDY=\begin{bmatrix}X_1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1D_{11}X_1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

展开矩阵 CYC：

$$CYC=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}X_1C_{11}&C_{11}X_1C_{12}\\C_{21}X_1C_{11}&C_{22}X_1C_{12}\end{bmatrix}.$$

同理，由矩阵相等得：

$$C_{11}X_1C_{12}=0,C_{21}X_1C_{11}=0,C_{22}X_1C_{12}=0.$$

因 X_1 可逆，故 $D_{12}=0$，$D_{21}=0$。因此 C 简化为分块对角矩阵：

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&0\\0&C_{22}\end{bmatrix}.$$

由上可知分块矩阵的秩满足 $r(C)=r(C_{11})+r(C_{22})$、$r(D)=r(D_{11})+r(D_{22})$，结合 $r(C)=r(A),r(D)=r(B)$，分如下两种情况讨论：

(1)：若 $r(A)+r(B)\le 2$，此时 $r(C)+r(D)\le 2$。由于 C_{11},D_{11} 是 2×2 矩阵，其秩的非负整数组合必然满足分块对角结构的相容性，方程组的约束自然成立，在这种情况下，存在秩 2 解是可能的。

(2)：若 $r(A)=r(B)=2$，此时 $r(C)=r(D)=2$。对于 3 阶分块对角矩阵 $C=\begin{bmatrix}C_{11}&0\\0&C_{22}\end{bmatrix}$，秩为 2 的充要条件是对角块秩之和为 2。因 C_{11} 是 2 阶矩阵，C_{22} 是常数，故可能为 $r(C_{11})=2$，$r(C_{22})=0$ 或 $r(C_{11})=1$，$r(C_{22})=1$。

$r(C_{11})=2$，$r(C_{22})=0$ 时：

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&0\\0&0\end{bmatrix},Ker(C)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}\middle|t\in R\right\}.$$

$r(C_{11})=1$，$r(C_{22})=1$ 时：

因 C_{11} 是 2 阶秩 1 矩阵(存在非零列向量 P、行向量 q^T 使得 $C_{11}=pq^{\mathrm{T}}$)，且 $C_{22}\ne 0$ (1 阶非零矩阵，即常数非零)，故 $C=\begin{bmatrix}pq^{\mathrm{T}}&0\\0&c\end{bmatrix}$。

由上知 $Ker(C)=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| q^{\mathrm{T}}x_1=0, x_1\in R^2\right\}$。

同理，对 $D=\begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$，因 D_{11} 是 2 阶矩阵，D_{22} 是常数，故可能为 $r(D_{11})=2$，$D_{22}=0$ 或 $r(D_{11})=1$，$r(D_{22})=1$。

$r(D_{11})=2$，$r(D_{22})=0$ 时：

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Ker(D)=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \middle| t\in R\right\}.$$

$r(D_{11})=1$，$r(D_{22})=1$ 时：

因 D_{11} 是 2 阶秩 1 矩阵(存在非零列向量 l、行向量 s^T 使得 $D_{11}=ls^{\mathrm{T}}$)，且 $D_{22}\neq 0$ (1 阶非零矩阵，即常数非零)，故 $D=\begin{bmatrix} ls^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$。

由上知 $Ker(C)=\left\{\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| s^{\mathrm{T}}y_1=0, y_1\in R^2\right\}$。

故 $Ker(C)=Ker(D)$，由 $Ker(C)=P^{-1}Ker(A)$、$Ker(D)=P^{-1}Ker(B)$ 可得 $Ker(A)=Ker(B)$。

综上，秩 2 解存在的必要条件为 $r(A)+r(B)\leq 2$ 或 $r(A)=r(B)=2$ 且 $Ker(A)=Ker(B)$。

3. 数值例子

例 3.1 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，显然 A 和 B 本身就是对角矩阵，因此存在可逆矩阵 $P=I$ (单位矩阵)使得 $P^{-1}AP=A$，$P^{-1}BP=B$。它们的特征值分别为：$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=2$，$\beta_1=1$，$\beta_2=2$，$\beta_3=2$。

由定理 1，可设对角形式的解为 $X=diag\{x_{11},x_{22},x_{33}\}$。对于每个 i，x_{ii} 必须满足方程组：

$$\begin{cases} x_{ii}{}^2\alpha_i=\beta_i{}^2x_{ii}, \\ x_{ii}{}^2\beta_i=\alpha_i{}^2x_{ii}, \end{cases}$$

逐项求解可得四个对角解：$X_1=diag\{0,0,0\}$，$X_2=diag\{1,0,0\}$，$X_3=diag\{0,0,2\}$，$X_4=diag\{1,0,2\}$。

该数值算例验证了定理 1 中关于对角解的结论。通过选取简单的对角矩阵 A 和 B，我们系统地求出了所有可能的对角解，求得的所有解满足原 Yang-Baxter 矩阵方程组。此算例为理论结果提供了具体的数值支持。

4. 总结和展望

本文给出了三阶 Yang-Baxter 矩阵方程组在系数矩阵可对角化的情况下的解，通过对系数矩阵进行相似变换为 Jordan 标准型，通过对解的结构分析给出了对角解，分块对角解的结构，对于一般解，我们给出了其显示解以及秩 1，秩 2 解存在的条件。但本文并未进一步讨论系数矩阵不可对角化下解的存在情况，我们也希望在接下来的工作中进一步研究解的存在条件以及求解高阶 Yang-Baxter 矩阵方程组。

基金项目

赣南师范大学研究生创新基金项目(YCXJ24-A11)。

参考文献

[1] Yang, C.N. (1967) Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction. *Physical Review Letters*, **19**, 1312-1315. https://doi.org/10.1103/physrevlett.19.1312

[2] Baxter, R.J. (1972) Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model. *Annals of Physics*, **70**, 193-228. https://doi.org/10.1016/0003-4916(72)90335-1

[3] Yang, C. and Ge, M. (1989) Braid Group, Knot Theory, and Statistical Mechanics. World Scientific.

[4] Zhou, D. and Ding, J. (2017) Solving the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for Nilpotent Matrices of Index Three. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**, 303-315. https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1284320

[5] Dong, Q., Ding, J. and Huang, Q. (2018) Commuting Solutions of a Quadratic Matrix Equation for Nilpotent Matrices. *Algebra Colloquium*, **25**, 31-44. https://doi.org/10.1142/s1005386718000032

[6] Yin, H., Wang, X., Tang, X. and Chen, L. (2018) On the Commuting Solutions to the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for Identity Matrix Minus Special Rank-Two Matrices. *Filomat*, **32**, 4591-4609. https://doi.org/10.2298/fil1813591y

[7] Nichita, F. (2012) Introduction to the Yang-Baxter Equation with Open Problems. *Axioms*, **1**, 33-37. https://doi.org/10.3390/axioms1010033

[8] Jedlicka, P. and Pilitowska, A. (2025) Diagonals of Solutions of the Yang-Baxter Equation. *Forum Mathematicum*, **38**, 321-338. https://doi.org/10.1515/forum-2024-0409

[9] Askar, A., Mukherjee, H. and Djordjevic, B. (2024) Solutions to a System of Yang-Baxter Matrix Equations. *Filomat*, **38**, 10169-10192. https://doi.org/10.2298/fil2429169a