

# Yamabe流下一类非线性抛物型方程的梯度估计

黄陈林\*, 杨 飞

中国地质大学数学与物理学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年3月2日; 录用日期: 2026年3月26日; 发布日期: 2026年4月3日

## 摘 要

本文研究Yamabe曲率流下非线性抛物方程  $(\Delta_\phi - \partial_t)u = au(\ln u)^\alpha$  正解的梯度估计, 得到了该方程的Hamilton型、Li-Yau型和Souplet-Zhang型三种梯度估计。本文将相关结果系统地推广至更一般的非线性抛物方程情形。

## 关键词

梯度估计, 抛物型方程, Harnack不等式

# Gradient Estimates for a Nonlinear Parabolic Equation under the Yamabe Flow

Chenlin Huang\*, Fei Yang

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 3, 2026

## Abstract

This paper addresses the issue of the limited universality of gradient estimation methods for positive solutions to nonlinear parabolic equations. We establish gradient estimates for positive

\*通讯作者。

solutions of the equation  $(\Delta_\phi - \partial_t)u = au(\ln u)^\alpha$  obtaining three types of estimates: the Hamilton-type, Li-Yau-type, and Souplet-Zhang-type. Our work systematically extends the relevant results to a broader class of nonlinear parabolic equations.

## Keywords

Gradient Estimates, Parabolic Equations, Harnack Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

梯度估计是研究几何中抛物型偏微分方程解的重要工具。1986年, Li与Yau [1]对热方程 $(\Delta - \partial_t)u = 0$ 提出了著名的 Li-Yau 估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \leq \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)} + \frac{n\alpha^2}{2t},$$

其中  $\alpha > 1$  为任意常数。随后, Hamilton [2]于 1993 年中证明了紧流形上热方程的椭圆型梯度估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - e^{2Kt} \frac{u_t}{u} \leq e^{4Kt} \frac{n}{2t},$$

该方法后来被称为 Hamilton 型梯度估计, 并由 Kotschwar [3]推广到非紧情形。2006年, Souplet 与 Zhang [4]发展出适用于热方程的局部化椭圆型梯度估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{\sinh(Kt)\cosh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)}\right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{nK}{2}(\coth(Kt) + 1),$$

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2t} + \frac{nK}{2} \left(1 + \frac{1}{3}Kt\right),$$

形成了 Souplet-Zhang 型估计方法。

以上成果均立足于固定度量的情形, 当背景流形的度量随时间依几何流演化时, 相关研究需要进一步拓展。在此框架下, 许多学者针对热方程正解, 系统性建立了一系列梯度估计与 Harnack 不等式[5]-[8]。于此同时, Li 与 Zhu [9]在 Ricci 流条件下推导了方程 $(\Delta_\phi - \partial_t)u + hu^p = 0$ 的若干正解估计。2020年, Zhang [10]进一步推进了该研究方向, 得到了 Yamabe 流下方程 $(\Delta_\phi - \partial_t)u = hu^q$ 的梯度估计。

在上述成果及相关工作[11]-[16]的启发下, 本文研究一类非线性推广后的抛物方程:

$$(\Delta_\phi - \partial_t)u = au(\ln u)^\alpha, \quad (1.1)$$

并对其正解建立若干梯度估计。其中 $(M^n, g(t))$ 为完备 Yamabe 流的解, 满足

$$\partial_t g = -Rg, \quad (1.2)$$

这里  $a, \alpha > 1$  为任意常数,  $R$  为流形的数量曲率。

本文所研究的  $n$  维光滑测度空间 $(M^n, g, e^{-\phi} dv)$ 由无边的  $n$  维完备黎曼流形 $(M^n, g(t))$ 配备带权测度

$e^{-\phi} dv$  构成, 其中  $\phi \in C^2(M)$ ,  $dv$  为度量  $g$  的体积元, 方程(1.1)中的算子  $\Delta_\phi$  定义为  $\Delta_\phi := \Delta - \nabla_{\nabla\phi}$ . 本文所假定的 Bakry-Émery-Ricci 曲率定义为:

$$Ric_\phi := Ric + Hess\phi.$$

进一步, 对任意整数  $m > n$ , 可定义  $(m-n)$ -Bakry-Émery-Ricci 曲率:

$$Ric_\phi^{m-n} := Ric + Hess\phi - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{m-n}.$$

该曲率是经典 Ricci 曲率在光滑测度空间中的自然推广, 刻画了带权测度与标准体积测度的偏差程度. 从几何意义上看,  $(m-n)$ -Bakry-Émery-Ricci 曲率的下界条件, 本质上是对带权测度下流形的曲率刚性进行约束, 其作用与经典 Ricci 曲率下界在黎曼流形分析中的作用相呼应, 能够保证流形上的函数分析性质(如梯度估计、Harnack 不等式)的有效性, 是本文推导梯度估计的核心几何假设之一.

本文对于 Yamabe 流而言, 其核心是通过流形的数量曲率调整度量, 使流形的标量曲率趋于常数, 已有研究表明完备 Yamabe 流的解在合理的初始条件下, 数量曲率及其梯度会保持有界性, 这也是本文对数量曲率施加有界假设的合理性所在: 一方面, Yamabe 流的演化方程本身会对数量曲率的增长进行约束, 避免其出现爆破性无界; 另一方面, 数量曲率及其梯度的有界性是保证流形几何结构稳定性的基本条件, 也是后续构造截断函数、推导辅助函数演化估计的必要前提.

设  $u = u(x, t)$  为定义在抛物柱  $Q_{\rho, T} := B(\bar{x}, \rho) \times [0, T]$  上满足方程(1.1)的正函数. 由于  $u$  在紧集上恒正, 存在正常数  $D_1$  与  $D_2$ , 使得在  $Q_{\rho, T}$  上有  $D_1 \leq u \leq D_2$  成立. 我们得到方程(1.1)的下列估计:

**定理 1.1: (Li-Yau 型估计)** 设  $(M^n, g(t)), t \in [0, T]$  为 Yamabe 流(1.2)下满足方程(1.1)的  $n$  维完备流形, 且在  $Q_{\rho, T}$  上满足

$$Ric_\phi^{m,n} \geq -(m-1)K_1, \quad |R| \leq K_2, \quad |\nabla R| \leq K_3,$$

其中  $K_1, K_2, K_3 > 0$ . 则对任意正解  $u$  和给定常数  $\beta > 1$  及  $0 < \epsilon < 1$ , 存在正常数  $C_{1/2}$  与  $\bar{C}$  使得

$$\begin{aligned} & |\nabla f|^2 - \beta \partial_t f - \beta a f^\alpha \\ & \leq \sqrt{\frac{m(n-2)K_3}{4(2-\epsilon)}} \beta^{\frac{3}{2}} + \frac{m\beta^2}{2-\epsilon} \left[ \frac{\bar{C}+1}{t} + \frac{(C_{1/2}+3)K_2}{2} + \frac{C_{1/2}}{\rho} (m-1) \left( \sqrt{K_1} + \frac{2}{\rho} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{C_{1/2}}{\rho^2} \left( 1 + 2C_{1/2} + \frac{\beta^2 m C_{1/2}}{2\epsilon(\beta-1)} \right) + 2|a\alpha| (\ln D_2)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)K_1}{\beta-1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta|a\alpha(\alpha-1)|}{2(\beta-1)} (\ln D_2)^{\alpha-1} + \frac{(m-2)K_3}{8(\beta-1)} \beta \right]. \end{aligned}$$

其中  $f := \ln u$ .

**定理 1.2: (Hamilton 型估计)** 设  $(M^n, g(t)), t \in [0, T]$  为 Yamabe 流(1.2)下满足方程(1.1)的  $n$  维完备流形, 且在  $Q_{\rho/2, T}$  上满足

$$Ric_\phi \geq -(n-1)K_4, \quad |R| \leq K_2,$$

其中  $K_2, K_4 > 0$ . 则对任意正解  $u$ , 存在依赖于  $n$  的正常数  $c$ , 使得在  $Q_{\rho/2, T}$  上成立

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u|}{\sqrt{u}} & \leq c \left\{ \frac{C_{1/2}}{\rho} [|\beta| + (n-1)K_4(\rho-1)] + \frac{C_{1/2}}{\rho^2} + \frac{C}{t} + \frac{C_{1/2}K_2}{2} + \frac{\sqrt{5C_{1/2}^2}}{\rho^2} \right. \\ & \quad \left. + 2(n-1)K_4 + K_2 + |a|(\ln D_2)^\alpha + 2|a\alpha|(\ln D_2)^{\alpha-1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$\beta := \max_{(x,t) \in \partial B(\hat{x},1) \times [0,T]} \Delta_\phi r(x,t)$ 。

**定理 1.3: (Souplet-Zhang 型估计)** 设  $(M^n, g(t)), t \in [0, T]$  为 Yamabe 流(1.2)下满足方程(1.1)的  $n$  维完备流形, 且在  $Q_{\rho,T}$  上满足

$$Ric_\phi \geq -(n-1)K_4, \quad |R| \leq K_2,$$

其中  $K_2, K_4 > 0$ 。则对任意正解  $u$ , 存在依赖于  $n$  的正常数  $c$ , 使得在  $Q_{\rho/2,T}$  上成立

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq c \left( \frac{C_{1/2}^2 \ln \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 + C_{1/2}}{\rho^2} + \frac{C_{1/2} [|\beta| + (n-1)K_4(\rho-1) + 1]}{\rho} + \frac{\bar{C}}{t} + \frac{C_{1/2}K_2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2|a\alpha|(\ln D_2)^{\alpha-1} + 2(n-1)K_4 + K_2 + (\ln D_2)^{2\alpha} \left( 1 + \ln \frac{D_2}{u} \right)$$

其中  $f := \ln u$ ,  $\beta := \max_{(x,t) \in \partial B(\hat{x},1) \times [0,T]} \Delta_\phi r(x,t)$ 。里  $a, \alpha > 1$  为任意常数,  $R$  为流形的数量曲率。

为证明上述定理, 我们首先引入阶段函数并介绍下属引理:

**引理 1.4.** 给定  $\tau \in (0, T]$ , 存在光滑截断函数  $\Psi(x, t) < 1$  满足下列估计[17] [18]:

1)  $Ric_\phi^{m,n} \geq -(m-1)K_1$ , ( $K_1 > 0$ ), 在该点处有

$$\Delta_\phi \Psi \geq -\frac{C_{1/2}}{\rho}(m-1) \left( \sqrt{K_1} + \frac{2}{\rho} \right) - \frac{C_{1/2}}{\rho^2}.$$

2) 若  $Ric_\phi \geq -(n-1)K_4$  在开球  $B(\bar{x}, \rho)$  上成立, 且存在点  $(x_0, t_0) \in \overline{B(\bar{x}, \rho)} \times [0, \rho]$  满足  $d_{g(t_0)} r(x_0, \bar{x}) \geq 1$ , 则在该点处有

$$\Delta_\phi \Psi \geq -\frac{C_{1/2}}{\rho} [|\beta| + (n-1)K_4(\rho-1)] - \frac{C_{1/2}}{\rho^2}.$$

3) 若数量曲率满足  $|R| \leq K_2$ , 则

$$\partial_t \Psi \leq \frac{\bar{C}}{\tau} + \frac{C_{1/2}K_2}{2}.$$

## 2. 主要定理证明

**定理 1.1** 的证明: 证明过程可分为以下两步进行: 构造辅助函数  $F$ , 得到辅助函数  $F$  的上界估计, 利用截断函数  $\Psi$  对  $\Psi F$  的极大值点进行估计。

### 步骤 1. 辅助函数 $F$ 的上界估计

针对 Li-Yau 型估计的抛物型特征, 需要构造同时包含解的梯度平方、解的对数导数以匹配非线性抛物方程的结构。此处定义  $F := t(|\nabla f|^2 - \beta \partial_t f - \beta a f^\alpha)$ , 这里  $f = \ln u$ ,  $\beta > 1$  为任意常数, 利用方程, 可得  $F$  对应的演化方程如下:

$$\partial_t F = \frac{F}{t} + t \partial_t (|\nabla f|^2 - \beta \partial_t f - \beta a f^\alpha), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_\phi F &= \Delta F - \langle \nabla F, \nabla \phi \rangle \\
 &= t \left[ 2|\text{Hess}f|^2 + 2\nabla_i \nabla_j f \cdot \nabla_j f - 2\nabla_i \nabla_j f \cdot \nabla_j f \cdot \nabla_i \phi - \beta \alpha \alpha f^{\alpha-1} \Delta_\phi f \right] \\
 &\quad - t\beta \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2} |\nabla f|^2 - t\beta \Delta_\phi \partial_t f \\
 &= t \left[ 2|\text{Hess}f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla \Delta_\phi f \rangle + 2\text{Hess}\phi(\nabla f, \nabla f) + 2\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \beta \alpha \alpha f^{\alpha-1} \Delta_\phi f \right] \\
 &\quad - t\beta \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2} |\nabla f|^2 - t\beta \Delta_\phi \partial_t f \\
 &= 2t|\text{Hess}f|^2 + 2t\langle \nabla f, \nabla \Delta_\phi f \rangle + 2t\text{Ric}_\phi^{m,n}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2t\langle \nabla \phi, \nabla f \rangle^2}{m-n} - \beta \alpha \alpha t f^{\alpha-1} \Delta_\phi f \\
 &\quad - t\beta \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2} |\nabla f|^2 - t\beta \partial_t \Delta_\phi f + t\beta R \Delta_\phi f - \frac{n-2}{2} t\beta \langle \nabla f, \nabla R \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

利用柯西不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left( \sqrt{\frac{m-n}{mn}} \Delta f + \sqrt{\frac{n}{m(m-n)}} \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) (\Delta f)^2 + \frac{2}{m} \Delta f \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle + \left( \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m} \right) \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle^2 \\
 &\leq |\text{Hess}f|^2 - \frac{1}{m} (\Delta f)^2 - 2\Delta f \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle + \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle^2 + \frac{1}{m-n} \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle^2 \\
 &= |\text{Hess}f|^2 - \frac{(\Delta_\phi f)^2}{m} + \frac{1}{m-n} \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle^2.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

综合(2.1)~(2.3)可得关于  $F$  的演化方程:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_\phi - \partial_t) F &\geq \frac{2t}{m} \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right)^2 - 2t \left\langle \nabla f, \nabla \left[ \frac{F}{t} + (\beta - 1)(\alpha f^\alpha + \partial_t f) \right] \right\rangle \\
 &\quad + 2t\text{Ric}_\phi^{m,n}(\nabla f, \nabla f) - \beta \alpha \alpha t f^{\alpha-1} \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right) \\
 &\quad - \beta \alpha \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2} |\nabla f|^2 + \beta R t \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right) \\
 &\quad - \frac{n-2}{2} \beta t \langle \nabla f, \nabla R \rangle - \beta t \partial_t \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right) \\
 &\quad - \frac{F}{t} - t \partial_t \left( |\nabla f|^2 - \beta \partial_t f - \beta \alpha f^\alpha \right).
 \end{aligned}$$

再次利用  $F$  的定义可得

$$\begin{aligned}
 \left\langle \nabla f, \nabla \left[ \frac{F}{t} + (\beta - 1)(\alpha f^\alpha + \partial_t f) \right] \right\rangle &= \frac{1}{t} \langle \nabla f, \nabla F \rangle + (\beta - 1) \alpha \alpha f^{\alpha-1} |\nabla f|^2 \\
 &\quad + \frac{\beta - 1}{2} \partial_t |\nabla f|^2 - \frac{\beta - 1}{2} R |\nabla f|^2,
 \end{aligned}$$

从而最终得到

$$\begin{aligned}
 (\Delta_\phi - \partial_t) F &\geq \frac{2t}{m} \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right)^2 - 2\langle \nabla f, \nabla F \rangle + 2t\text{Ric}_\phi^{m,n}(\nabla f, \nabla f) \\
 &\quad - 2(\beta - 1) \alpha \alpha f^{\alpha-1} t |\nabla f|^2 + (\beta R t - \beta \alpha \alpha t f^{\alpha-1}) \left( -|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha \right) \\
 &\quad - \beta \alpha \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2} t |\nabla f|^2 + (\beta - 1) R t |\nabla f|^2 \\
 &\quad - \frac{F}{t} - \frac{n-2}{2} \beta t \langle \nabla f, \nabla R \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

## 步骤 2. 对 $\Psi F$ 利用极值原理

设  $(x_1, t_1)$  为函数  $\Psi F$  在区间  $Q_{\rho, T}$  的极大值点, 由(2.4)可得  $\Psi F$  的演化方程为

$$\begin{aligned} (\Delta_\phi - \partial_t)(\Psi F) &= F(\Delta_\phi - \partial_t)\Psi + 2\langle \nabla \Psi, \nabla F \rangle + \Psi(\Delta_\phi - \partial_t)F \\ &\geq F(\Delta_\phi - \partial_t)\Psi + \frac{2}{\Psi}\langle \nabla \Psi, \nabla(\Psi F) \rangle - \frac{2|\nabla \Psi|^2}{\Psi}F \\ &\quad - 2\langle \nabla f, \nabla(\Psi F) \rangle + 2F\langle \nabla f, \nabla \Psi \rangle + \Psi \left[ \frac{2t}{m}(-|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha) \right]^2 \\ &\quad + 2t\text{Ric}_\phi^{m,n}(\nabla f, \nabla f) - 2(\beta - 1)\alpha \alpha f^{\alpha-1}t|\nabla f|^2 \\ &\quad + (\beta R t - \beta \alpha \alpha t f^{\alpha-1})(-|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha) \\ &\quad - \beta \alpha \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2}t|\nabla f|^2 + (\beta - 1)R t |\nabla f|^2 \\ &\quad - \frac{F}{t} - \frac{n-2}{2}\beta t \langle \nabla f, \nabla R \rangle. \end{aligned}$$

不失一般性假设  $\Psi F$  的极大值大于等于 0, 否则定理 1.1 显然成立, 从而根据引理及假设条件可知在  $(x_1, t_1)$  满足

$$\begin{aligned} &\frac{2t^2\Psi^2}{m}(-|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha)^2 \\ &\leq t\Psi F(\partial_t - \Delta_\phi)\Psi + 2t|\nabla \Psi|^2 F + 2t\Psi F|\nabla f||\nabla \Psi| \\ &\leq +2t^2\Psi^2(\beta - 1)\alpha \alpha f^{\alpha-1}|\nabla f|^2 + 2(m-1)K_1 t^2\Psi^2|\nabla f|^2 \\ &\quad - (\beta R t - \beta \alpha \alpha t f^{\alpha-1})t\Psi^2(-|\nabla f|^2 + \partial_t f + \alpha f^\alpha) \\ &\quad + \beta \alpha \alpha (\alpha - 1) f^{\alpha-2}t^2\Psi^2|\nabla f|^2 + F\Psi^2 \\ &\quad + (\beta - 1)t^2\Psi^2 R |\nabla f|^2 + \frac{n-2}{2}\beta t^2\Psi^2 \langle \nabla f, \nabla R \rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

为估计  $\Psi F$  的上界, 参考 Chen [16]的方法, 在  $(x_1, t_1)$  处定义

$$H := \frac{|\nabla f|^2}{F} \geq 0.$$

由此可得

$$|\nabla f| = \sqrt{FH}, \quad |\nabla f|^2 - \partial_t f - \alpha f^\alpha = \frac{F}{\beta t}[(\beta - 1)Ht + 1],$$

从而由(2.5)可得

$$\begin{aligned} &\frac{2(\Psi F)^2}{m\beta^2}[(\beta - 1)Ht + 1]^2 \\ &\leq t\Psi F(\partial_t - \Delta_\phi)\Psi + 2t|\nabla \Psi|^2 F + 2t\Psi F\sqrt{FH}|\nabla \Psi| \\ &\quad + 2\alpha \alpha (\beta - 1) f^{\alpha-1}t^2\Psi^2 FH + 2(m-1)K_1 t^2\Psi^2 FH \\ &\quad + [R - \alpha \alpha f^{\alpha-1}]t\Psi^2 F[(\beta - 1)Ht + 1] \\ &\quad + \beta \alpha \alpha (\alpha - 1) t^2\Psi^2 f^{\alpha-2} FH + F\Psi^2 \\ &\quad + (\beta - 1)R t^2\Psi^2 FH + \frac{n-2}{2}\beta t^2\Psi^2 \nabla R \sqrt{FH}. \end{aligned}$$

利用柯西不等式

$$2t\Psi F\sqrt{FH}|\nabla\Psi| \leq \frac{\epsilon(\Psi F)^2}{\beta^2 m} [(\beta-1)Ht+1]^2 + \frac{\beta^2 mHF|\nabla\Psi|^2 t^2}{\epsilon [(\beta-1)Ht+1]^2}, \quad 2\sqrt{FH} \leq 1+FH.$$

上式可化为

$$\begin{aligned} & \frac{(2-\epsilon)(\Psi F)^2}{m\beta^2} [(\beta-1)Ht+1]^2 \\ & \leq t\Psi F(\partial_t - \Delta_\phi)\Psi + 2t|\nabla\Psi|^2 F + \frac{\beta^2 mHF|\nabla\Psi|^2 t^2}{\epsilon [(\beta-1)Ht+1]^2} \\ & \quad + 2a\alpha(\beta-1)f^{\alpha-1}t^2\Psi^2 FH + 2(m-1)K_1 t^2\Psi^2 FH \\ & \quad + [R - a\alpha f^{\alpha-1}]t\Psi^2 F [(\beta-1)Ht+1] \\ & \quad + \beta a\alpha(\alpha-1)t^2\Psi^2 f^{\alpha-2} FH + F\Psi^2 \\ & \quad + (\beta-1)Rt^2\Psi^2 FH + \frac{n-2}{4}\beta t^2\Psi^2 \nabla R(1+FH). \end{aligned}$$

因  $\beta > 1$ , 故有  $(\beta-1)Ht+1 > 1$ , 且  $\frac{H}{[(\beta-1)Ht+1]^2} \leq \frac{1}{2(\beta-1)t}$ 。在点  $(x_1, t_1)$  处可推出

$$\begin{aligned} \frac{(2-\epsilon)(\Psi F)^2}{m\beta^2} [(\beta-1)Ht+1]^2 & \leq \frac{t\Psi F(\partial_t - \Delta_\phi)\Psi}{[(\beta-1)Ht+1]^2} + 2t|\nabla\Psi|^2 F + \frac{\beta^2 mF|\nabla\Psi|^2 t^2}{2(\beta-1)} \\ & \quad + |a\alpha f^{\alpha-1}|t\Psi^2 F + \frac{(m-1)K_1\Psi^2 Ft}{\beta-1} + [R - a\alpha f^{\alpha-1}]t\Psi^2 F \\ & \quad + \frac{\beta|a\alpha(\alpha-1)|f^{\alpha-2}}{2(\beta-1)}t\Psi^2 F + \Psi^2 F + \frac{1}{2}t\Psi^2 |R|F \\ & \quad + \frac{n-2}{4}\beta t^2\Psi^2 \nabla R \left(1 + \frac{F}{2(\beta-1)t}\right) \tag{2.6} \\ & \leq \tau\Psi F \frac{(\partial_t - \Delta_\phi)\Psi}{[(\beta-1)Ht+1]^2} + 2\tau\Psi F \frac{|\nabla\Psi|^2}{\Psi} + \tau\Psi F \frac{\beta^2 m|\nabla\Psi|^2}{2\epsilon(\beta-1)\Psi} + R\tau\Psi F \\ & \quad + 2\tau\Psi F |a\alpha|(\ln D_2)^{\alpha-1} + \tau\Psi F \frac{(m-1)K_1}{\beta-1} + \tau\Psi F \frac{\beta|a\alpha(\alpha-1)|((\ln D_2)^{\alpha-1})}{2(\beta-1)} \\ & \quad + \Psi F + \tau\Psi F \frac{K_2}{2} + \tau\Psi F \frac{(n-2)K_3}{8(\beta-1)}\beta + \frac{n-2}{4}\beta\tau^2 K_3, \end{aligned}$$

这里  $\tau$  为最大时间, 由引理可知  $\Psi$  及其导数均有界, 从而由极值点的必要条件, 在极大值点  $(x_1, t_1)$  处(2.6)可得。

$$\begin{aligned} & (\Psi F)^2(x_1, t_1) \\ & \leq \frac{m\beta^2 \tau\Psi F}{2-\epsilon} \left[ \frac{\bar{C}}{\tau} + \frac{C_{1/2}K_2}{2} + \frac{C_{1/2}}{\rho}(m-1) \left( \sqrt{K_1} + \frac{2}{\rho} \right) + \frac{C_{1/2} + 2C_{1/2}^2}{\rho^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m\beta^2 C_{1/2}^2}{2\epsilon(\beta-1)\rho^2} + K_2 + 2|a\alpha|(\ln D_2)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)K_1}{\beta-1} + \frac{\beta|a\alpha(\alpha-1)|}{2(\beta-1)}(\ln D_2)^{\alpha-1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tau} + \frac{K_2}{2} + \frac{(n-2)K_3}{8(\beta-1)}\beta \right] + \frac{n-2}{4(2-\epsilon)}m\beta^3\tau^2 K_3. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \Psi F(x_1, t_1) \\ & \leq \frac{m\beta^2\tau}{2-\epsilon} \left[ \frac{\bar{C}+1}{\tau} + \frac{(C_{1/2}+3)K_2}{2} + \frac{C_{1/2}}{\rho}(m-1) \left( \sqrt{K_1} + \frac{2}{\rho} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{C_{1/2}}{\rho^2} \left( 1 + 2C_{1/2} + \frac{m\beta^2 C_{1/2}}{2\epsilon(\beta-1)} \right) + 2|a\alpha|(\ln D_2)^{\alpha-1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(m-1)K_1}{\beta-1} + \frac{\beta|a\alpha(\alpha-1)|}{2(\beta-1)}(\ln D_2)^{\alpha-1} + \frac{(n-2)K_3}{8(\beta-1)}\beta \right] \\ & \quad + \sqrt{\frac{m(n-2)K_3}{4(2-\epsilon)}}\beta^{3/2}\tau, \end{aligned}$$

定理 1.1 得证。

### 定理 1.2 的证明

Hamilton 型为椭圆估计, 舍弃时间因子简化构造, 定义  $\omega = h|\nabla h|^2$ , 这里  $h = u^{\frac{1}{3}}$ , 适配椭圆型估计的局部性, 结合曲率条件约束梯度项上界。由上述类似计算可知

$$\begin{aligned} (\Delta_\phi - \partial_t)\omega & \geq 4h^{-3}\omega^2 - 4h^{-1}\langle \nabla h, \nabla \omega \rangle + 2h\text{Ric}_\phi(\nabla h, \nabla h) \\ & \quad - R\omega + 3^\alpha a(\ln h)^\alpha \omega + 2a\alpha 3^{\alpha-1}(\ln h)^{\alpha-1}\omega. \end{aligned}$$

从而考虑函数  $\Psi\omega$ , 利用极值原理定理 1.1 同理可得。

### 定理 1.3 的证明

类似 Hamilton 型证明过程中辅助函数的定义, 匹配 Souplet-Zhang 型估计的局部化特征和 Yamabe 流下的几何背景, 定义  $\Omega := |\nabla(B-f)|^2 = \frac{|\nabla f|^2}{(B-f)^2}$ , 这里  $B := 1 + \ln D_2$ ,  $f := \ln u$ , 同理可得

$$\begin{aligned} (\Delta_\phi - \partial_t)\Omega & \geq \frac{2(f - \ln D_2)}{B-f}\langle \nabla \Omega, \nabla f \rangle + 2(B-f)\Omega^2 \\ & \quad + \left[ 2a\alpha f^{\alpha-1} - 2(n-1)K_4 - R \right] \Omega + \frac{2af^\alpha}{B-f}\Omega. \end{aligned}$$

对  $\Psi\Omega$  利用极值原理同理可得。

## 3. 总结与展望

本文通过构造新型辅助函数并运用极值原理, 建立了非线性抛物方程正解的三种梯度估计, 将线性热源项的抛物方程梯度估计结果推广至非线性项, 进一步完善了该领域的理论体系。此外, 本文假定度量随时间满足 Yamabe 流方程进行演化, 在几何及物理领域有着重要的理论前景。研究成果为非线性抛物型方程的正解性态分析提供了有效工具, 具有一定的理论意义与应用价值。

Li-Yau 型估计常数与时间参数、非线性适配参数及  $(m-n)$ -Bakry-Émery-Ricci 曲率下界相关, 时间衰减因子使其结果随时间指数衰减, 适配抛物方程的时间演化性; Hamilton 型估计常数依赖曲率下界、非线性参数和流形维数相关常数, 无时间项, 体现椭圆型估计的时空一致性; Souplet-Zhang 型估计常数还受截断函数选取和数量曲率界影响, 反映局部化估计对区域特征的依赖性。三类估计的参数依赖关系与自身类型、方程结构及 Yamabe 流几何背景高度契合, 参数可调性为后续精细化估计提供了基础。

在后续研究中, 可进一步探讨其他类型非线性项或更一般几何流背景下的梯度估计问题, 发展更多类型的估计形式, 拓展该方法的适用范围并深化其在几何分析与物理中的应用。

## 参考文献

- [1] Li, P. and Yau, S.T. (1986) On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator. *Acta Mathematica*, **156**, 153-201. <https://doi.org/10.1007/bf02399203>
- [2] Hamilton, R.S. (1993) Matrix Harnack Estimate for the Heat Equation. *Communications in Analysis and Geometry*, **1**, 113-126. <https://doi.org/10.4310/cag.1993.v1.n1.a6>
- [3] Kotschwar, B. (2007) Hamilton's Gradient Estimate for the Heat Kernel on Complete Manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 3013-3019. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-07-08837-5>
- [4] Souplet, P. and Zhang, Q.S. (2006) Sharp Gradient Estimate and Yau's Liouville Theorem for the Heat Equation on Noncompact Manifolds. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **38**, 1045-1053. <https://doi.org/10.1112/s0024609306018947>
- [5] Bakry, D. and Qian, Z.M. (1999) Harnack Inequalities on a Manifold with Positive or Negative Ricci Curvature. *Revista Matemática Iberoamericana*, **15**, 143-179. <https://doi.org/10.4171/rmi/253>
- [6] Petersen, P. and Wei, G. (2000) Analysis and Geometry on Manifolds with Integral Ricci Curvature Bounds. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **353**, 457-478. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-00-02621-0>
- [7] Li, M. (2006) Gradient Estimates for a Simple Elliptic Equation on Complete Non-Compact Riemannian Manifolds. *Journal of Functional Analysis*, **241**, 374-382. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.06.006>
- [8] Azami, S. (2024) Differential Gradient Estimates for Nonlinear Parabolic Equations under Integral Ricci Curvature Bounds. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **118**, Article No. 51. <https://doi.org/10.1007/s13398-024-01552-9>
- [9] Li, Y. and Zhu, X. (2016) Harnack Estimates for a Heat-Type Equation under the Ricci Flow. *Journal of Differential Equations*, **260**, 3270-3301. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.10.024>
- [10] Zhang, L. (2020) Local Parabolic and Elliptic Gradient Estimates for a Generalized Heat-Type Equation under the Yamabe Flow. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **485**, Article ID: 123770. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123770>
- [11] Li, J.Y. (1991) Gradient Estimates and Harnack Inequalities for Nonlinear Parabolic and Nonlinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds. *Journal of Functional Analysis*, **100**, 233-256. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(91\)90110-q](https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90110-q)
- [12] Wu, J.Y. (2017) Elliptic Gradient Estimates for a Nonlinear Heat Equation and Applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **151**, 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.11.014>
- [13] Bakry, D. and Ledoux, M. (1996) Sobolev Inequalities and Myers's Diameter Theorem for an Abstract Markov Generator. *Duke Mathematical Journal*, **85**, 252-270. <https://doi.org/10.1215/s0012-7094-96-08511-7>
- [14] Qian, Z. (1997) Estimates for Weighted Volumes and Applications. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **48**, 235-242. <https://doi.org/10.1093/qmath/48.2.235>
- [15] Yang, F. and Zhang, L. (2019) Gradient Estimates for a Nonlinear Parabolic Equation on Smooth Metric Measure Spaces. *Nonlinear Analysis*, **187**, 49-70. <https://doi.org/10.1016/j.na.2019.03.017>
- [16] Chen, L. and Chen, W. (2008) Gradient Estimates for a Nonlinear Parabolic Equation on Complete Non-Compact Riemannian Manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **35**, 397-404. <https://doi.org/10.1007/s10455-008-9141-9>
- [17] Yau, S.T. (1975) Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 201-228. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160280203>
- [18] Petersen, P. and Wei, G.F. (1997) Relative Volume Comparison with Integral Curvature Bounds. *Geometric and Functional Analysis*, **7**, 1031-1045. <https://doi.org/10.1007/s000390050036>