

Yang-Baxter算子方程的解及其表示

张丽霞, 王 华*

内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2026年7月6日; 录用日期: 2026年7月29日; 发布日期: 2026年8月12日

摘 要

本文研究Hilbert空间中Yang-Baxter算子方程 $AXA = XAX$ 解的存在性以及解的表示。首先, 建立Yang-Baxter算子方程与线性算子方程组之间的联系, 将非线性的Yang-Baxter算子方程的解转化为线性算子方程组的解的问题。其次, 利用算子的矩阵表示与广义逆理论, 刻画该线性算子方程组的可解性, 进而给出解的显示表达式。以此为基础, 给出Yang-Baxter算子方程的解存在的条件以及解的广义逆表示和矩阵形式的表示。

关键词

Yang-Baxter算子方程, 算子方程组, 算子矩阵, 幂等算子

Solutions and Representations of the Yang-Baxter Operator Equation

Lixia Zhang, Hua Wang*

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: July 6, 2026; accepted: July 29, 2026; published: August 12, 2026

Abstract

This paper investigates the existence and explicit representation of solutions to the Yang-Baxter operator equation in Hilbert spaces. First, we establish a connection between the nonlinear Yang-Baxter operator equation and a system of linear operator equations, thereby transforming the solution problem of the former into that of the latter. Next, using matrix representations of operators and generalized inverse theory, we characterize the solvability of the linear system and derive explicit expressions for its solutions. Based on these results, necessary and sufficient conditions for the solvability of the Yang-Baxter operator equation are obtained, and representations of its solutions are given in

*通讯作者。

terms of both generalized inverses and matrix forms.

Keywords

Yang-Baxter Operator Equation, System of Operator Equations, Operator Matrix, Idempotent Operator

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的集合。给定 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 算子方程

$$AXA = XAX \quad (1)$$

中 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为待求算子, 称(1)为 Yang-Baxter 算子方程。该方程是一类非线性算子方程, 源于经典的 Yang-Baxter 方程

$$A(u)B(u+v)A(v) = B(v)A(u+v)B(u)$$

其中 $A(u), B(v)$ 为有理函数, 通常出现在可积系统、量子群和辫子群理论中, 是刻画代数结构对称性的重要方程[1] [2]。

在有限维空间中, 方程(1)被称为 Yang-Baxter 矩阵方程, 其求解及相关性质吸引了众多学者对其展开深入研究。文献[3]首次尝试从矩阵理论的角度求解 Yang-Baxter 矩阵方程 $AXA = XAX$, 为后续相关探索奠定了基础。在 A 为幂等矩阵情形时, 文献[4]借助矩阵对角化与 Jordan 标准形分块方法, 给出 Yang-Baxter 矩阵方程的所有解; 文献[5]则给出 Yang-Baxter 矩阵方程的所有解的显式表达式; 文献[6]则摒弃传统的 Jordan 标准形方法, 利用幂等矩阵的谱分解与满秩矩阵构造的方法, 讨论矩阵方程 $AXA = XAX$ 非平凡解的存在性问题, 区分交换解和非交换解, 在此基础上给出 Yang-Baxter 矩阵方程的所有交换解。在 A 为对合矩阵时, 文献[7]以相似对角化与谱分析为核心方法, 在没有任何限制条件的情况下刻画了 Yang-Baxter 矩阵方程的所有解, 并结合经典谱扰动结论给出非交换解的具体构造步骤; 之后, 文献[8]给出了该方程的所有对合解。文献[9] [10]将研究范畴从幂等、对合矩阵进一步拓展至三次和四次幂等矩阵, 分别在 $A^3 = A$ 和 $A^4 = A$ 情形下讨论了 Yang-Baxter 矩阵方程的解, 丰富了 Yang-Baxter 方程解的结构。针对非奇异二阶矩阵, 文献[11]借助矩阵相似变换研究了 Yang-Baxter 矩阵方程 $AXA = XAX$ 的非奇异解, 得到非奇异解的显示表达式, 由此发现其所有解构造的矩阵均对应着中心化子中的同一个矩阵。对于具有两个 Jordan 块的非奇异 3×3 矩阵 A , 给定其 Jordan 标准形 $J = \text{diag}(J_2[\lambda], J_1[\mu])$ (其中 $\lambda \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$), 文献[12]通过讨论 Jordan 块特征值 λ 与 μ 是否相等得到 Yang-Baxter 矩阵方程 $AXA = XAX$ 的所有解。在此基础上, 文献[13]则进一步针对具有一个 Jordan 块的非奇异 3×3 矩阵 A 求解了 Yang-Baxter 矩阵方程 $JYJ = YJY$ (其中 $J = J_3[\lambda], \lambda \neq 0$) 的所有非平凡解, 基于此利用相似变换得到了方程 $AXA = XAX$ 的所有非平凡解。当矩阵 A 为具有三个不同非零特征值的 3×3 可对角化矩阵时, 文献[14]给出了 Yang-Baxter 矩阵方程的所有交换解和非交换解。对于 Hilbert 空间中的 Yang-Baxter 算子方程(1), 文献[15] [16]分别在 A 为秩 1 和秩 2 算子时, 利用算子特征对与特征矩阵理论, 将非线性的算子方程转化为线性算子方程组, 讨论了该方程的解。

本文将继续研究 Hilbert 空间中 Yang-Baxter 算子方程(1)的解以及解的表示。首先建立了 Yang-Baxter

算子方程与线性算子方程组之间的联系, 将非线性的 Yang-Baxter 算子方程的解转化为线性算子方程组的解的问题。利用算子的矩阵表示与广义逆理论, 刻画线性算子方程组的可解性, 从而给出解的显示表达, 以此得到 Yang-Baxter 算子方程的解存在的条件以及解的广义逆表示和矩阵形式的表示。

2. 预备知识

为了便于叙述, 文中通用以下记号: $\mathcal{R}(A)$ 表示 A 的值域; $\mathcal{R}(A)^\perp$ 表示 $\mathcal{R}(A)$ 的正交补; $A|_{\mathcal{R}(P)}$ 表示 A 限制在 $\mathcal{R}(P)$ 上的限制算子。下面给出本文涉及的定义和引理。

定义 2.1 设 $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, I 为 $\mathcal{H}$ 上的恒等算子。

(1) 若 $P^2 = P$, 则称 P 为幂等算子(又称投影算子)。

(2) 若 $A^2 = I$, 则称 A 为对合算子。

定义 2.2 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 。若 $A^- \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $AA^-A = A$, 则称 A^- 是 A 的一个内逆。

引理 2.1 设 $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 。若 P 是投影算子, 则 $PA = A$ 当且仅当 $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(P)$ 。

引理 2.2 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的。若 A 的算子矩阵形式为:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

则 A^- 具有如下形式:

$$A^- = \begin{pmatrix} A_{11}^- & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}^- \end{pmatrix},$$

其中 $B_{12}, B_{21} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $A_{11}B_{12}A_{22} = 0$ 且 $A_{22}B_{21}A_{11} = 0$ 。

引理 2.3 [17] 设 $A, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的。那么方程 $AX = C$ 有解 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 当且仅当 $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A)$ 。此时, 方程的一般解为

$$X = A^-C + (I - A^-A)U,$$

其中 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为任意算子。

引理 2.4 [17] 设 $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且 $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B)$ 是闭的。那么算子方程组 $AX = C, XB = D$ 有解当且仅当 $AA^-C = C, DB^-B = D, AD = CB$ 。此时, 通解表示为

$$X = A^-C + (I - A^-A)DB^- + (I - A^-A)Z(I - BB^-),$$

其中 $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是任意算子。

3. Yang-Baxter 算子方程的解

本节讨论 Yang-Baxter 算子方程的解的存在性及其表示。首先, 将 Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 与线性算子方程组建立联系, 给出 Yang-Baxter 算子方程的解存在的条件。

定理 3.1 令 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 。若 Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 有解, 则存在算子 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 使算子方程组 $\begin{cases} AX = P \\ XP = PA \end{cases}$ 成立。反之, 对于给定的算子 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 若算子方程组 $\begin{cases} AX = P \\ XP = PA \end{cases}$ 有解, 则 Yang-Baxter 方程 $AXA = XAX$ 有解。进一步, 若算子 A, P 都具有闭值域, 则 Yang-Baxter 方程 $AXA = XAX$ 的解为

$$X = PAP^- + (A^-P + (I - A^-A))Y(I - PP^-),$$

其中 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是任意算子。

证明 若 Yang-Baxter 方程 $AXA = XAX$ 有解, 设解为 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 令 $AX = P$, 显然有 $PA = XP$, 从而 X 是方程组 $\begin{cases} AX = P \\ XP = PA \end{cases}$ 的解。

反之, 若 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是方程组 $\begin{cases} AX = P \\ XP = PA \end{cases}$ 的解, 则由 $AX = P$ 得 $AXA = PA$, 结合 $PA = XP$, 可得 $AXA = XP = XAX$, 即 X 是 Yang-Baxter 方程 $AXA = XAX$ 的解。

进一步, 若算子 A, P 都具有闭值域, 且由 $AX = P, XP = PA$ 知

$$\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^*P^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*), APA = AXP = P^2.$$

于是, 由引理 2.4, 得到 Yang-Baxter 方程 $AXA = XAX$ 的解为

$$\begin{aligned} X &= A^-P + (I - A^-A)PAP^- + (I - A^-A)Z(I - PP^-) \\ &= A^-P + PAP^- - A^-P^2P^- + (I - A^-A)Z(I - PP^-) \\ &= PAP^- + (A^-P + (I - A^-A)Y)(I - PP^-), \end{aligned}$$

其中 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是任意算子。证毕。

我们看到, 定理 3.1 将非线性的 Yang-Baxter 算子方程的解转化为线性算子方程组

$$\begin{cases} AX = P \\ XP = PA \end{cases} \quad (2)$$

的解的问题。下面我们将考察该线性算子方程组的解, 以获得 Yang-Baxter 算子方程的解的存在条件以及解的表示。

令 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是幂等算子, 那么, 在空间分解 $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(P)^\perp$ 下, 算子 A 和 P 具有如下的算子矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

定理 3.2 设 $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{R}(A)$ 闭且 $\mathcal{R}(A^-A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ 。若 P 是幂等算子, 则下列结论成立:

(1) 方程组(2)有解当且仅当 $AA^-P = P, PA = A^-P$ 。

(2) 若方程组(2)有解, 则当 $A_{21} = 0$ 时, A 和 A^- 分别具有如下矩阵形式:

$$A = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \Phi, A^- = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22}^- \end{pmatrix} \Phi,$$

其中 A_{11} 是对合的, $\mathcal{R}(A_{22})$ 是闭的, B_{12} 是任意满足 $A_{11}B_{12}A_{22} = 0$ 的算子, $\Phi = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 。此时, 方程组(2)

的解 X 可表示为

$$X = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & (I - A_{22}^-A_{22})U \end{pmatrix} \Phi,$$

其中 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(P)^\perp, \mathcal{R}(P)^\perp)$ 是任意算子。进一步, 若 A_{22} 是单射, 则方程组(2)的解为

$$X = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

证明 (1) 必要性: 设方程组(2)有解, 即存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $AX = P$ 和 $PA = XP$ 同时成立。根据

$AX = P$, 知 $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(A)$ 。由 AA^- 是投影算子且 $\mathcal{R}(AA^-) = \mathcal{R}(A)$, 以及引理 2.1, 可知

$$AA^-P = P.$$

再由 $XP = PA$, 有 $A^-APA = A^-AXP$ 。结合 $AX = P$ 及 P 是幂等算子, 可得

$$A^-APA = A^-P^2 = A^-P. \quad (4)$$

注意到 A^-A 也是投影算子, 那么, 根据已知条件 $\mathcal{R}(A^-A) \subseteq \mathcal{R}(A)$, 知 $A^-APA = PA$ 。于是, 再结合(4)式便可得到 $PA = A^-P$ 。

充分性: 设 $AA^-P = P$ 和 $PA = A^-P$ 成立。令 $X = A^-P$, 那么, $AX = P$, 且

$$XP = A^-P^2 = A^-P = PA.$$

这表明 $X = A^-P$ 是方程组(2)的解, 即方程组(2)有解。

(2) 由 $XP = PA$ 且 P 是幂等算子, 可得 $PAP = PA$ 。根据(3)式, 我们有

$$\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{11} + P_1 A_{21} & (A_{11} + P_1 A_{21}) P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + P_1 A_{21} & A_{12} + P_1 A_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以当 $A_{21} = 0$ 时, $A_{12} = A_{11}P_1 - P_1A_{22}$ 。于是

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 - P_1A_{22} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

令 $\Phi = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 显然 Φ 可逆, 且 $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} I & -P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 。那么, A 可表示为

$$A = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \Phi.$$

因为 Φ 可逆且 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的, 所以 A_{11} 和 A_{22} 都是闭值域算子。于是, 由引理 2.2 知

$$A^- = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11}^- & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}^- \end{pmatrix} \Phi, \quad (5)$$

其中 $B_{12}, B_{21} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $A_{11}B_{12}A_{22} = 0$ 且 $A_{22}B_{21}A_{11} = 0$ 。再根据 $AA^-P = P$, 我们有

$$\begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^- - P_1A_{22}B_{21} & A_{11}A_{11}^-P_1 - P_1A_{22}B_{21}P_1 \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{21}P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$A_{22}B_{21} = 0, A_{11}A_{11}^- = I. \quad (6)$$

又由 $PA = A^-P$, 有

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^- - P_1B_{21} & A_{11}^-P_1 - P_1B_{21}P_1 \\ B_{21} & B_{21}P_1 \end{pmatrix},$$

从而可得

$$A_{11} = A_{11}^-, B_{21} = 0. \quad (7)$$

结合(6)式和(7)式, 得

$$A_{11}^2 = I, B_{21} = 0. \quad (8)$$

因此, 由(5)式, A^- 表示为

$$A^- = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22}^- \end{pmatrix} \Phi,$$

其中 A_{11} 是对合的, $\mathcal{R}(A_{22})$ 是闭的, B_{12} 是满足 $A_{11}B_{12}A_{22} = 0$ 的任意算子。

下面求方程组(2)的解。设解 X 具有如下形式:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{R}(P)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{R}(P)^\perp \end{pmatrix}.$$

首先, 由 $AX = P$, 有

$$\begin{pmatrix} A_{11}X_{11} + A_{11}P_1X_{21} - P_1A_{22}X_{21} & A_{11}X_{12} + A_{11}P_1X_{22} - P_1A_{22}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$A_{11}X_{11} + A_{11}P_1X_{21} = I, A_{11}X_{12} + A_{11}P_1X_{22} = P_1, A_{22}X_{21} = 0, A_{22}X_{22} = 0. \quad (9)$$

其次, 由 $PA = XP$ 以及 $A_{12} = A_{11}P_1 - P_1A_{22}$, 我们有

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}P_1 \\ X_{21} & X_{21}P_1 \end{pmatrix},$$

得

$$X_{11} = A_{11}, X_{21} = 0. \quad (10)$$

注意到, (9)式中 $A_{22}X_{22} = 0$, 由引理 2.3, 有

$$X_{22} = (I - A_{22}^-A_{22})U, \quad (11)$$

其中 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(P)^\perp, \mathcal{R}(P)^\perp)$ 。再将(11)式代入(9)式的第二个方程, 有

$$A_{11}X_{12} = P_1 - A_{11}P_1(I - A_{22}^-A_{22})U.$$

结合(8)式中的 $A_{11}^2 = I$, 我们得到

$$X_{12} = A_{11}P_1 - P_1(I - A_{22}^-A_{22})U. \quad (12)$$

于是, 由(10), (11)和(12), 得到方程组(2)的解 X 为

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 - P_1(I - A_{22}^-A_{22})U \\ 0 & (I - A_{22}^-A_{22})U \end{pmatrix} \\ &= \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & (I - A_{22}^-A_{22})U \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(P)^\perp, \mathcal{R}(P)^\perp)$ 。

进一步, 若 A_{22} 是单射, 则由(9)式中 $A_{22}X_{22} = 0$, 显然有 $X_{22} = 0$ 。此时再由(9)式的第二个方程得 $X_{12} = A_{11}P_1$ 。根据(11)式, 即可得到方程组(2)的解 X 为

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

证毕。

根据定理 3.1 和定理 3.2, 我们可以得到 Yang-Baxter 算子方程的解存在的条件以及解的算子矩阵形式的表示。

推论 3.1 设 $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 其值域 $\mathcal{R}(A)$ 是闭集且 $\mathcal{R}(A^-A) \subseteq \mathcal{R}(A)$, P 是幂等算子。若 $AA^-P = P$, $PA = A^-P$, 则 Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 有解, 且当 $A_{21} = 0$ 时,

$$X = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & (I - A_{22}^-A_{22})U \end{pmatrix} \Phi$$

是 Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 的解, 其中 A_{11} 是对合的, $\mathcal{R}(A_{22})$ 是闭的, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(P)^\perp, \mathcal{R}(P)^\perp)$ 。

证明 若 $AA^-P = P, PA = A^-P$, 则由定理 3.2 (1), 知方程组(2)有解, 再由定理 3.1, 知方程组(2)的解也是算子方程 $AXA = XAX$ 的解。那么, 由定理 3.2 (2), 即可得结论。证毕。

推论 3.2 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{R}(A)$ 闭且 $\mathcal{R}(A^-A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ 。若 Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 有解 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且 AX 是幂等的, 则当 $A_{21} = 0$ 时, Yang-Baxter 算子方程 $AXA = XAX$ 的解为

$$X = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & (I - A_{22}^-A_{22})U \end{pmatrix} \Phi,$$

其中 A_{11} 是对合的, $\mathcal{R}(A_{22})$ 是闭的, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(P)^\perp, \mathcal{R}(P)^\perp)$ 。进一步, 当 A_{22} 是单射时, 方程的解 X 为

$$X = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

定理 3.3 设 $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, P 是幂等算子。若 $A|_{\mathcal{R}(P)}$ 不是单射, 则方程组(2)无解。

证明 假设方程组(2)有解 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 。因 $A|_{\mathcal{R}(P)}$ 不是单射, 则存在 $0 \neq y \in \mathcal{R}(P)$, 使得 $Ay = 0$ 。由 $AX = P$ 以及 P 是幂等算子, 可以得到

$$AXy = Py = y. \quad (14)$$

再由 $PA = XP$, 有 $PAY = XPy$ 。又知 $PAY = 0, XPy = Xy$, 从而 $Xy = 0$ 。则由(14)式, 知 $y = 0$, 产生矛盾。结论得证。证毕。

基金项目

国家自然科学基金(12261065); 内蒙古自然科学基金(2026MS0315, 2022MS01005); 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费(JY20240044, JY20220084)资助项目; 内蒙古自治区创新团队项目(NMGIRT2317)。

参考文献

- [1] Yang, C.N. (1967) Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive δ -Function Interaction. *Physical Review Letters*, **19**, 1312-1315. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.19.1312>
- [2] Baxter, R.J. (1972) Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model. *Annalen der Physik*, **70**, 193-228. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(72\)90335-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(72)90335-1)
- [3] Ding, J. and Rhee, N.H. (2012) A Nontrivial Solution to a Stochastic Matrix Equation. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, **2**, 277-284. <https://doi.org/10.4208/eajam.150512.231012a>
- [4] Cibotarica, A., Ding, J., Kolibal, J. and H. Rhee, N. (2013) Solutions of the Yang-Baxter Matrix Equation for an Idempotent. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, **3**, 347-352. <https://doi.org/10.3934/naco.2013.3.347>

-
- [5] Mansour, S.I.A., Ding, J. and Huang, Q. (2017) Explicit Solutions of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for an Idempotent Matrix. *Applied Mathematics Letters*, **63**, 71-76. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.07.021>
 - [6] Xu, X., Lu, L. and Liu, Q. (2022) Solution Set of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for an Idempotent Matrix. *Symmetry*, **14**, Article 2510. <https://doi.org/10.3390/sym14122510>
 - [7] Huang, Q., Adam, M.S.I., Ding, J. and Zhu, L. (2019) All Non-Commuting Solutions of the Yang-Baxter Matrix Equation for a Class of Diagonalizable Matrices. *Operators and Matrices*, **13**, 187-195. <https://doi.org/10.7153/oam-2019-13-11>
 - [8] Andruszkiewicz, R.R. and Smoktunowicz, A. (2022) The Yang-Baxter Matrix Equation for Involutions. *Miskolc Mathematical Notes*, **23**, 61-70. <https://doi.org/10.18514/mmn.2022.3761>
 - [9] Słowik, R. (2025) Yang-Baxter-Like Matrix Equation for Tripotent Matrices. *Communications in Algebra*, **53**, 3581-3590. <https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2463011>
 - [10] Zhou, D., Liao, J., Gan, Y., Xu, H. and Zhang, R. (2025) All Solutions of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation $AXA = XAX$ with A Satisfying $A^4 = A$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **552**, Article ID: 129785. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129785>
 - [11] Ikramov, K.D. and Chugunov, V.N. (2024) Nonsingular Solutions of the Matrix Equation $AXA = XAX$ and the Centralizer of the Matrix A . *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **48**, 98-103. <https://doi.org/10.3103/s0278641924700031>
 - [12] Li, X., Ding, J., Zhu, L. and Huang, Q. (2025) Solutions of the Yang-Baxter-Like Equation for a 3×3 Matrix of Two Jordan Blocks. *Filomat*, **39**, 12107-12128. <https://doi.org/10.2298/fil2534107l>
 - [13] Li, X., Zhu, L. and Huang, Q. (2025) All Solutions of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for a Nonsingular 3×3 Jordan Block. *Computational and Applied Mathematics*, **45**, Article No. 62. <https://doi.org/10.1007/s40314-025-03451-0>
 - [14] Wang, Y., Wu, C. and Wu, G. (2024) Solutions of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation with 3×3 Diagonalizable Coefficient Matrix. *Linear and Multilinear Algebra*, **72**, 2347-2367. <https://doi.org/10.1080/03081087.2023.2257863>
 - [15] Wang, H. and Huang, J. (2024) The Solution of the Yang-Baxter-Like Operator Equation for Rank-One Operators. *Filomat*, **38**, 4817-4821. <https://doi.org/10.2298/fil2414817w>
 - [16] Wang, H., Liu, C. and Huang, J. (2025) On the Solution of the Yang-Baxter-Like Operator Equation on Hilbert Spaces. *Linear and Multilinear Algebra*, **73**, 2568-2592. <https://doi.org/10.1080/03081087.2025.2460467>
 - [17] Xu, Q. (2008) Common Hermitian and Positive Solutions to the Adjointable Operator Equations $AX = C, XB = D$. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.01.030>