

基于PD-空间积分复合控制的一类不稳定波动方程的跟踪问题

郭玥萌, 王紫薇, 刘军军

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年3月21日; 录用日期: 2026年4月16日; 发布日期: 2026年4月22日

摘要

本文通过设计比例 - 微分 - 空间积分复合控制, 研究一类不稳定波动方程的输出跟踪问题。利用 Lyapunov 方法, 我们能够证明闭环系统是指数稳定的, 并且输出能够跟踪任意给定的常值参考信号。最后, 给出了一些数值模拟来验证所提出控制器的有效性。

关键词

波动方程, PD-空间积分复合控制, Lyapunov 泛函, 输出跟踪, 指数稳定性

Tracking Problem for a Class of Unstable Wave Equation via PD-Space Integral Composite Control

Yuemeng Guo, Ziwei Wang, Junjun Liu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: March 21, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 22, 2026

Abstract

This paper investigates the output tracking problem for a class of unstable wave equations. A proportional-derivative-spatial integral composite controller is proposed. By constructing a suitable Lyapunov functional, we prove that the closed-loop system is exponentially stable and the output can successfully track any given constant reference signal. Finally, numerical simulations are provided to illustrate the effectiveness of the proposed controller.

Keywords

Wave Equations, PD-Spatial Integral Composite Control, Lyapunov Functional, Output Tracking, Exponential Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几十年里,输出跟踪问题一直是控制理论领域的热门研究方向[1]-[3],并且其研究范畴已从有限维控制系统[4][5]扩展到无穷维分布参数控制系统[6]-[8]中。该问题的核心在于设计合适的控制器,实现系统输出对给定参考信号的精确跟踪。目前,相关理论成果已广泛应用于机器人、航空航天及精密制造等工程领域,不仅推动了相关产业的技术升级,也为经济社会的发展提供了有力支撑。

由于波动方程在结构振动、柔性机械臂、电缆升降系统等领域具有广泛的工程应用背景,其稳定性与输出调节问题近年来受到了越来越多的关注。文献[9]研究了上升式缆索电梯中轿厢的输出跟踪问题,将上缆索系统建模为波动方程,并考虑了未知频率正弦扰动的干扰。

在波动系统的控制研究中,许多成熟的控制策略已被用于解决带有外部扰动的输出调节问题,包括自适应控制、滑模控制、内模原理以及自抗扰控制技术等。然而,这些方法通常依赖于辅助系统或复杂的观测器设计,增加了控制器实现的难度。相比之下,比例-积分-微分(Proportional-Integral-Derivative, PID)控制因其结构简单、参数调节方便且理论分析成熟等优点,长期以来一直是工程实践中的主流控制策略。文献[10]中,Chentouf和Wang针对一维对流-扩散方程,设计了比例-积分(PI)边界反馈控制器,实现了系统的稳定和输出调节。研究表明,相较于单纯的积分控制[11],引入比例环节显著提升了闭环系统的收敛速率。在[12]中,Fan等通过经典PID控制器研究了无外部扰动的Euler-Bernoulli梁系统的输出跟踪问题,利用Lyapunov方法证明系统的稳定性。文献[13]进一步将PD控制应用于一类开环适定的线性波动方程,实现了输出信号对任意常值参考信号的渐近跟踪。

然而,上述PID/PD控制方法主要适用于开环适定或稳定的系统。据我们所知,对于具有反阻尼边界条件的不稳定波动方程[14],基于经典PID框架的输出跟踪问题尚未得到解决。在这类系统中,系统的一端受到“反阻尼”作用,这使得开环系统具有正的特征值,使系统呈现不稳定特性,直接应用基于跟踪误差的经典PID控制器难以同时实现系统镇定与输出跟踪。针对上述问题,本文通过在传统PD控制结构中引入空间积分环节,提出一种PD-空间积分复合控制器,通过Lyapunov泛函分析,严格证明了闭环系统的适定性、指数稳定性以及输出跟踪性能。

所提方法的主要优势在于:(1)控制器结构简单,无需设计复杂的观测器或辅助系统;(2)空间积分项可有效补偿边界反阻尼效应,实现系统的镇定与输出跟踪;(3)PD环节确保输出信号对常值参考信号的渐近跟踪。

后续章节安排如下:第2章给出问题描述与分析。第3章证明闭环系统的稳定性并实现输出跟踪。第4章进行数值仿真验证。最后,第5章总结全文并提出未来研究方向。

2. 问题描述与分析

本文研究如下左端具有Robin边界条件的波动方程,它能够模拟一种更真实的物理场景。

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ w_x(0, t) = -qw(0, t), & t \geq 0, \\ w_x(1, t) = U(t), & t \geq 0, \\ y_{out}(t) = w(1, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $U(t)$ 是控制, $w(x, t)$ 是振动位移, $w_t(x, t)$ 是振动速度, $w_x(x, t)$ 是张力的垂直分量, $w_{tt}(x, t)$ 是加速度, $y_{out}(t)$ 是性能输出, $w_0(x)$ 和 $w_1(x)$ 是初始值, $q > 0$ 是系统参数, 为系统(1)引入不稳定因素。

将系统(1)放在 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 中考虑, 并定义内积为:

$$\begin{aligned} \langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 [f_1'(x)\overline{f_2'(x)} + g_1(x)\overline{g_2(x)}] dx + f_1(0)\overline{f_2(0)}, \\ \forall Y_i &= (f_i, g_i)^\top \in \mathcal{H}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

基于波方程边界条件的特殊性, 本文的主要目标是设计一种 PD-空间积分复合控制器, 该控制器能够确保闭环系统稳定, 同时保证输出信号 $y_{out}(t)$ 能够跟踪指定的常数参考信号 $y_r \in \mathbb{R}$ 。复合控制律如下:

$$U(t) = -K_p(y_{out}(t) - y_r) - K_d \dot{y}_{out}(t) - \int_0^1 e^{q(1-\xi)} [K_{i1} w_t(\xi, t) + K_{i2} w(\xi, t)] d\xi, t \geq 0, \quad (3)$$

其中 $K_p, K_d, K_{i1}, K_{i2} > 0$ 是待定参数。

注 1 本文所提出的控制器, 通过利用方程(1)在反演变换中所蕴含的特定核函数, 将闭环系统映射为一个稳定的波动系统。一般而言, 反演变换中的核函数由系统的内部动态和边界条件共同决定。因此, 当系统边界条件改变或存在域内源项时, 核函数必然发生变化, 从而导致控制器结构也需相应调整。本文提出的控制器结构仅适用于边界条件为 $w_x(0, t) = -qw(0, t)$ 的波动方程的输出追踪问题。

尽管如此, 本文设计控制器的思路仍具有普适性。对于具有其它边界形式或存在域内不稳定性的波动系统, 可以借鉴反演变换中核函数的结构设计控制器, 最终实现输出对常值参考信号的跟踪。

在控制(3)的作用下, (1)的闭环系统可以写为

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w_x(0, t) = -qw(0, t), & t \geq 0, \\ w_x(1, t) = -K_p(y_{out}(t) - y_r) - K_d \dot{y}_{out}(t) - \int_0^1 e^{q(1-\xi)} [K_{i1} w_t(\xi, t) + K_{i2} w(\xi, t)] d\xi, & t \geq 0, \\ y_{out}(t) = w(1, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

显然, 该系统存在一个非零平衡态 $(\tilde{w}, \tilde{w}_t) = \left(\frac{1-qx}{1-q} y_r, 0 \right)$ 。

对(1)应用拉普拉斯变换, 我们对每个 $s \in \mathbb{C}$ 得到如下带边界条件的常微分方程:

$$\begin{cases} s^2 \hat{w}(x, s) = \hat{w}_{xx}(x, s), & 0 < x < 1, \\ \hat{w}_x(0, s) = -q\hat{w}(0, s), \\ \hat{w}_x(1, s) = \hat{u}(s), \\ \hat{y}_{out}(s) = \hat{w}(1, s), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\hat{w}(x, s)$, $\hat{u}(s)$ 和 $\hat{y}_{out}(s)$ 分别是 $w(x, t)$, $U(t)$ 和 $y_{out}(t)$ 的拉普拉斯变换。求解上述方程, 得到从 U 到 y_{out} 的传递函数

$$P(s) = \frac{(s-q)e^s + (s+q)e^{-s}}{s[(s-q)e^s - (s+q)e^{-s}]}, \quad (6)$$

这意味着如果 $p=0$ 且初始状态为零, 则 $\hat{y}_{out}(s) = P(s)\hat{u}(s)$ 。不难发现, $s=0$ 是 P 的极点, 但 P 的分子在 $s=0$ 处也为零, 因此 $s=0$ 为可去奇点。

当 $q \neq 1$ 且 $s \neq 0$ 时, P 的极点及其零点分别是如下方程的解:

$$\text{极点 } s: e^{2s} = \frac{s+q}{s-q}, \quad \text{零点 } s: e^{2s} = -\frac{s+q}{s-q}. \quad (7)$$

根据(7), 如果 s 是 P 的极点(零点), 则 s 的共轭 \bar{s} 和对称 $-s$ 也是极点(零点)。容易看出, 我们有两个实极点, 一个位于区间 $(-\infty, -q)$ 中, 另一个位于 $(q, +\infty)$ 中。 P 的所有其他极点都在虚轴上, 它们恰好是 $i\mu$ 形式的数, 其中 μ 是方程 $\mu = q \cot \mu$ 的实数解。因此, P 有无穷多个极点, 且模很大的极点 s 非常接近 $i\pi$ 的整数倍。

类似地, 当 $q > 1$ 时, P 有两个实零点, 一个位于区间 $(-q, 0)$ 中, 另一个位于 $(0, q)$ 中; 若 $q=1$, 则 $P(0)=0$ 且没有其他实零点; 若 $q \in (0, 1)$, 则 P 没有实零点。并且 P 的所有非实零点都在虚轴上, 容易验证, P 的非实零点恰好是 $i\mu$ 形式的数, 其中 μ 是方程 $\mu = q \tan \mu$ 的非零实数解。在任意两个虚极点之间有一个零点, 除了最接近 0 的那两个, 见图 1。

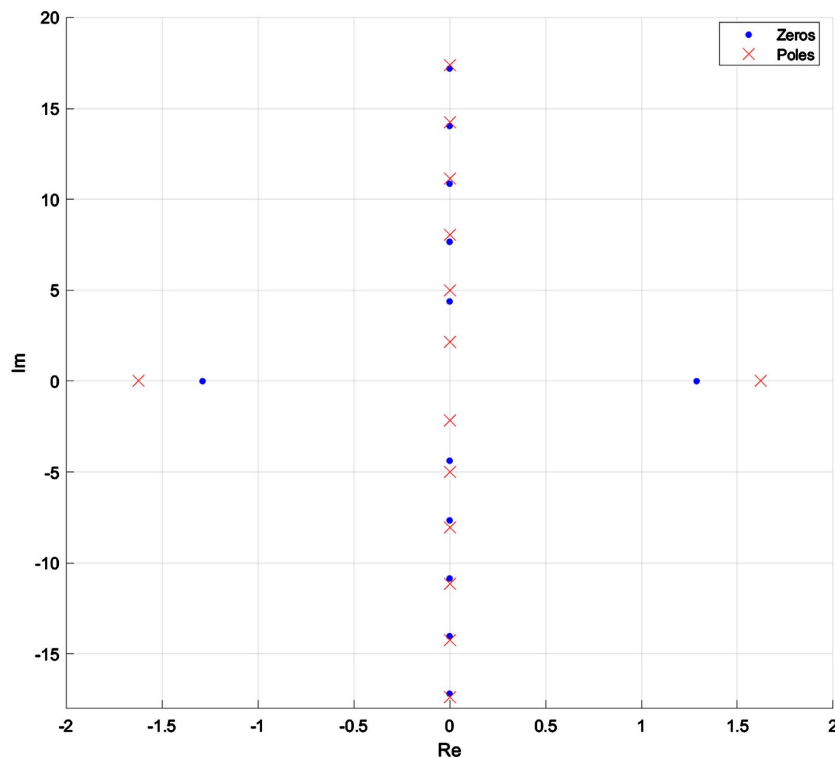


Figure 1. Transfer function $P(s)$ pole-zero distribution ($q=1.5$)

图 1. 传递函数 $P(s)$ 的零极点分布 ($q=1.5$)

3. 主要结果和证明

定理 3.1 存在控制增益满足 $K_p > q > 0, K_d > 0, K_{i1} = K_p \cdot K_d, K_{i2} = q \cdot K_p$ 时, 控制律 $U(t)$ 能够保证系

统(1)在实现输出跟踪的同时达到指数稳定。即闭环系统(4)的解满足:

$$\left\| \begin{pmatrix} w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \leq M e^{-\alpha t} \left\| \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (8)$$

其中 M 和 α 是正常数, 同时输出信号系统输出可等价地表示为渐进跟踪给定的常值参考信号, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{out}(t) - y_r| = 0$$

为了证明定理 3.1, 我们首先引入定义在区域 $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$ 上的可逆变换:

$$z(x, t) = w(x, t) - \tilde{w}(x), \quad z_t(x, t) = w_t(x, t). \quad (9)$$

在此变换下, 系统(4)可化为以下等价形式:

$$\begin{cases} z_{tt}(x, t) = z_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t \geq 0, \\ z_x(0, t) = -qz(0, t), & t \geq 0, \\ z_x(1, t) = -K_p z(1, t) - K_d z_t(1, t) - \int_0^1 e^{q(1-\xi)} [K_{i1} z_t(\xi, t) + K_{i2} z(\xi, t)] d\xi, & t \geq 0, \\ z(x, 0) = z(0) = w_0(x), z_t(x, 0) = z_1(x) = w_1(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

在变换(9)下, 系统输出可等价地表示为 $y_{out}(t) = z(1, t) + y_r$ 。本节的目标是证明系统(10)在 \mathcal{H} 空间中是稳定的, 且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(1, t) = 0, \quad (11)$$

这意味着输出也被调节至常数 y_r , 输出追踪问题就转化成系统的稳定性问题。

考虑如下可逆的变量替换

$$\tilde{z}(x, t) = [(I + \mathbb{P})z](x, t) = z(x, t) + K_p \int_0^x e^{q(x-\xi)} z(\xi, t) d\xi, \quad (12)$$

其中 \mathbb{P} 是 Volterra 变换, 变换 $(I + \mathbb{P})$ 的逆由下式给出

$$z(x, t) = [(I + \mathbb{P})^{-1} \tilde{z}](x, t) = \tilde{z}(x, t) + K_p \int_0^x e^{-(K_p - q)(x-\xi)} \tilde{z}(\xi, t) d\xi, \quad (13)$$

在变换(12)下, 系统(10)化为

$$\begin{cases} \tilde{z}_{tt}(x, t) = \tilde{z}_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t \geq 0, \\ \tilde{z}_x(0, t) = (K_p - q)\tilde{z}(0, t), & t \geq 0, \\ \tilde{z}_x(1, t) = -K_d \tilde{z}_t(1, t), & t \geq 0, \\ \tilde{z}(x, 0) = z(0), \tilde{z}_t(x, 0) = z_1(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

接下来, 将系统(14)写成抽象算子方程的形式。定义算子 $\mathcal{A}_{\tilde{z}} : D(\mathcal{A}_{\tilde{z}}) \subset \mathcal{H} : \mathcal{H}$,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\tilde{z}}(f, g)^\top = (g, f'')^\top, \forall (f, g)^\top \in D(\mathcal{A}_{\tilde{z}}), \\ D(\mathcal{A}_{\tilde{z}}) = \{(f, g)^\top \in \mathcal{H}^2(0, 1) \times \mathcal{H}^1(0, 1) \mid f'(0) = (K_p - q)f(0), f'(1) = -K_d g(1)\} \end{cases} \quad (15)$$

系统(14)可以写成抽象形式

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mathcal{A}_{\tilde{z}} Y(t), \quad (16)$$

其中 $Y(t) = (\tilde{z}(\cdot, t), \tilde{z}_t(\cdot, t))^\top$ 。

为了证明闭环系统(14)的稳定性, 本文构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$\Omega(t) = \Xi(t) + \delta\rho(t), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

式中能量函数 $\Xi(t), t \geq 0$ 为

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} \left(\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 \right) + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t), \quad (18)$$

辅助函数 $\rho(t), t \geq 0$ 为

$$\rho(t) = \int_0^1 (1+x) \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_t(x, t) dx. \quad (19)$$

引理 3.1 当 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 和 $K_p > q > 0, K_d > 0$ 时, Lyapunov 泛函(17)与系统(14)的能量(18)是等价的, 即存在两个正常数 m_1 和 m_2 使得对于任意的, 有

$$m_1 \Xi(t) \leq \Omega(t) \leq m_2 \Xi(t). \quad (20)$$

证明 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} |\rho(t)| &= \left| \int_0^1 (1+x) \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_t(x, t) dx \right| \\ &\leq 2 \left| \int_0^1 \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_t(x, t) dx \right| \\ &\leq 2 \left(\int_0^1 \tilde{z}_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \tilde{z}_t^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2, \end{aligned} \quad (21)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Xi(t) + \delta\rho(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 \right) + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t) - \delta \left(\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t) \\ &\geq m_1 \Xi(t), \end{aligned} \quad (22)$$

以及

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Xi(t) + \delta\rho(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 \right) + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t) + \delta \left(\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \delta \right) \|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \delta \right) \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2 + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t) \\ &\leq m_2 \Xi(t), \end{aligned} \quad (23)$$

因此, 对于任意的 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 和 $K_p > q, K_d > 0$, 总存在正常数 m_1 和 m_2 使不等式(20)成立。

显然, 泛函(17)是正定的。下面, 我们尝试利用 Lyapunov 直接法证明系统(14)是稳定的。

证明定理 3.1 沿着系统(14)对 $\Omega(t)$ 求关于时间的导数, 通过计算得到

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}(t) &= \int_0^1 \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_{xt}(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{z}_t(x, t) \tilde{z}_{tt}(x, t) dx \\
&\quad + \delta \int_0^1 (1+x) \tilde{z}_{xt}(x, t) \tilde{z}_t(x, t) dx + \delta \int_0^1 (1+x) \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_{tt}(x, t) dx \\
&= \tilde{z}_x(1, t) \tilde{z}_t(1, t) - \tilde{z}_x(0, t) \tilde{z}_t(0, t) + (K_p - q) \tilde{z}(0, t) \tilde{z}_t(0, t) \\
&\quad + \delta (\tilde{z}_x^2(1, t) + \tilde{z}_t^2(1, t)) - \frac{\delta}{2} (\tilde{z}_x^2(0, t) + \tilde{z}_t^2(0, t)) - \frac{\delta}{2} \|\tilde{z}_x(x, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(x, t)\|^2 \\
&= -[K_d - \delta(1 + K_d^2)] \tilde{z}_t^2(1, t) - \frac{\delta}{2} [(K_p - q)^2 \tilde{z}^2(0, t) + \tilde{z}_t^2(0, t)] - \frac{\delta}{2} (\|\tilde{z}_x(x, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(x, t)\|^2),
\end{aligned} \tag{24}$$

当 $\delta < \frac{K_d}{1 + K_d^2}$ 时, 上式是负定的。记 $\mathcal{F}(\tau) = \frac{\tau}{1 + \tau^2}$, 则 $\mathcal{F}(\tau)$ 在 $\tau \in (0, 1)$ 时单调递增, 在 $\tau \in (1, \infty)$ 时调递减。那么 $\mathcal{F}(\tau)$ 在 $\tau = 1$ 时取最大值, 即 $\mathcal{F}(\tau) \leq \mathcal{F}(1) = \frac{1}{2}$ 。

因此, 我们得到 $\dot{\Omega}(t)$ 的估计为

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}(t) &= -\frac{\delta}{2} (K_p - q)^2 \tilde{z}^2(0, t) - \frac{\delta}{2} (\|\tilde{z}_x(x, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(x, t)\|^2) \\
&\leq -\mu \Xi(t),
\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\mu = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}(K_p - q)^2\right\} > 0$ 。从而当 $\mu > 0$ 时, $\dot{\Omega}(t)$ 是负定的, 因此有 $\Omega(t) \leq \Omega(0)$, 也就是说

$$\sup_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\|\tilde{z}_x(\cdot, t)\|^2 + \|\tilde{z}_t(\cdot, t)\|^2) + \frac{K_p - q}{2} \tilde{z}^2(0, t) + \delta \int_0^1 (1+x) \tilde{z}_x(x, t) \tilde{z}_t(x, t) dx \right] < \infty. \tag{26}$$

特别地, 我们得到

$$\tilde{z}_t(1, t) \in L^2(0, \infty), \tag{27}$$

该式子与(11)等价, 实现了输出跟踪。

根据(20)和(25), 可以证明

$$\dot{\Omega}(t) \leq -\frac{\mu}{m_1} \Omega(t), t \geq 0 \tag{28}$$

进而有 $\Omega(t) \leq e^{-\frac{\mu}{m_1} t} \Omega(0)$ 。于是

$$\Xi(t) \leq \frac{m_2}{m_1} e^{-\frac{\mu}{m_1} t} \Xi(0), t \geq 0. \tag{29}$$

综上, 不等式(29)直接验证了所需结论(8), 其中 $M = \frac{m_2}{m_1}$, $\alpha = -\frac{\mu}{m_1}$ 。

上述数学推导过程的严格论证建立在以下适定性结果成立的前提之上。

定理 3.2 假设 $K_p > q$, $K_d > 0$, 则(15)中定义的算子 \mathcal{A}_2 在 \mathcal{H} 上生成 \mathcal{C}_0 -压缩半群。

证明 将系统(14)放在 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 中考虑, 并定义内积为:

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 [f_1'(x) \overline{f_2'(x)} + g_1(x) \overline{g_2(x)}] dx + (K_p - q) f_1(0) \overline{f_2(0)}, \tag{30}$$

$\forall Y_i = (f_i, g_i)^\top \in \mathcal{H}, i = 1, 2$. 显然新定义的内积(30)与(2)是等价的。

对于任意的 $(f, g)^\top \in D(\mathcal{A}_2)$, 有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}_z(f, g)^\top, (f, g)^\top \rangle &= \operatorname{Re}\langle (g, f'')^\top, (f, g)^\top \rangle \\
&= \int_0^1 g'(x) f'(x) dx + \int_0^1 f''(x) g(x) dx + (K_p - q) g(0) f(0) \\
&= g(1) f'(1) - g(0) f'(0) + (K_p - q) g(0) f(0) \\
&\leq -K_d g^2(1) \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

故 \mathcal{A}_z 在 \mathcal{H} 上耗散。

另一方面, 对任意给定的 $(h, l) \in \mathcal{H}$, 求解

$$\mathcal{A}_z(f, g)^\top = (g, f'')^\top = (h, l)^\top,$$

得到 $g(x) = h(x)$, 其中 f 满足

$$\begin{cases} f''(x) = l(x), \\ f'(0) = (K_p - q)f(0), f'(1) = -K_d g(1). \end{cases} \tag{32}$$

求解(32), 我们得到

$$f(x) = \left[-K_d h(1) - \int_0^1 l(\xi) d\xi \right] \left[x + \frac{1}{K_p - q} \right] + \int_0^x (x - \xi) l(\xi) d\xi. \tag{33}$$

由(33)及 $g(x) = h(x)$ 可知 $(f, g)^\top \in D(\mathcal{A}_z)$ 存在且唯一。根据 Sobolev 嵌入定理, \mathcal{A}_z^{-1} 存在且在 \mathcal{H} 上是紧算子。显然 $D(\mathcal{A}_z) = \mathcal{H}$ 。由 Lummer-Phillips 定理可知, \mathcal{A}_z 在 \mathcal{H} 上生成 C_0 -压缩半群。因此, 闭环系统(14)是适定的, 证明完成。

由于变换 $(I + \mathbb{P})$ 是可逆且光滑的, 系统(10)的解 $z(x, t) = (I + \mathbb{P})^{-1} \tilde{z}(x, t)$, 根据定理 3.2, 可以说明闭环系统(10)也是适定的。

4. 数值仿真

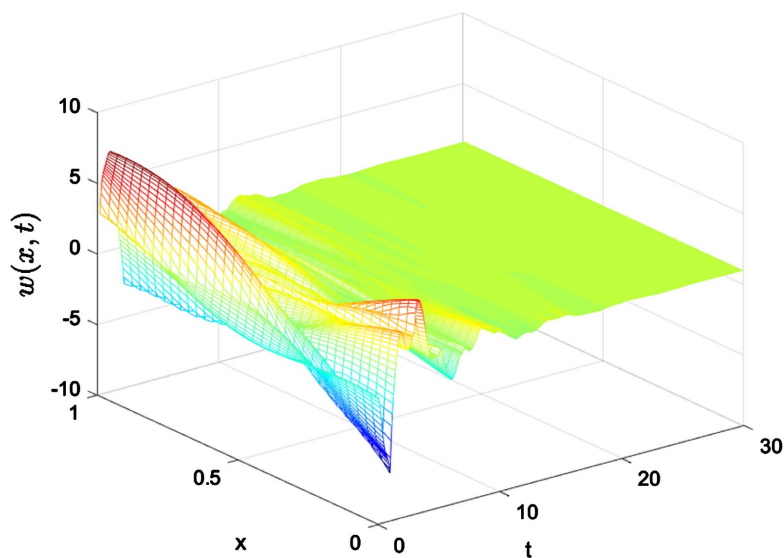


Figure 2. The profiles of $w(x, t)$ of closed-loop system

图 2. 闭环系统状态 $w(x, t)$ 的演化过程

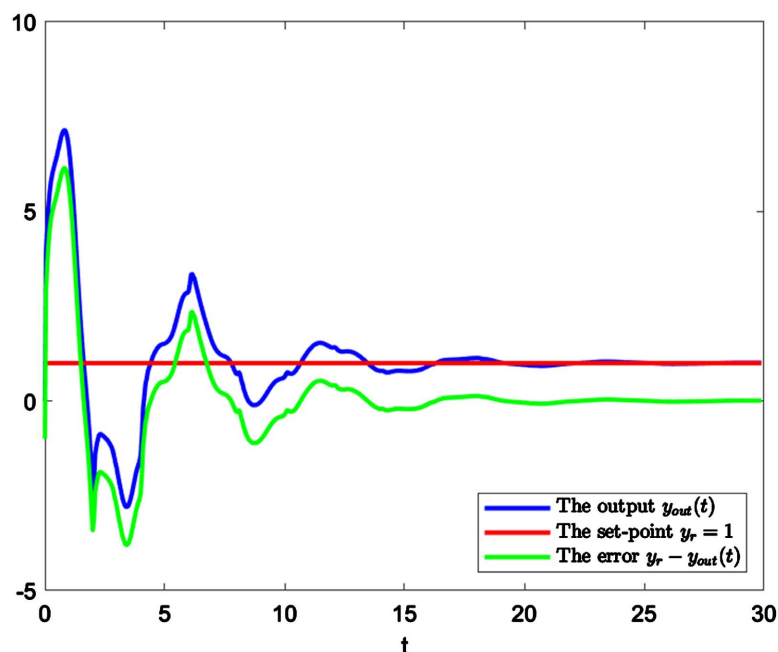


Figure 3. Tracking performance of output $y_{out}(t) = w(1,t)$

图 3. 输出 $y_{out}(t) = w(1,t)$ 的跟踪性能

本节采用有限元的方法进行数值模拟，说明所提出控制器的有效性。系统的初始状态设定为

$$w(x,0) = \cos(2\pi x) - 1, w_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1$$

仿真中选取的控制参数为 $q = 2, K_p = 4, K_d = 0.3, K_{i1} = 1.2, K_{i2} = 8$ ，其取值满足定理 3.1 中的预设条件。

数值仿真结果见图 2 至图 3 所示。图 2 描绘了闭环系统状态的演化过程，直观体现了闭环系统的稳定性。从图 3 可见，系统输出 $y_{out}(t) = w(1,t)$ 能够被有效调节以跟踪指定参考轨迹 $y_r = 1$ 且跟踪误差 $y_{out} - y_r$ 随着 $t \rightarrow \infty$ 渐进收敛于 0。

5. 结论

本文研究了一类不稳定波方程的输出跟踪问题，基于误差 $e(t)$ 的经典比例 - 积分 - 微分控制器似乎难以实现其镇定与调节，因此本文提出了具有比例 - 微分 - 空间积分三项的复合控制器，通过使用李雅普诺夫方法给出了严格的数学证明，所涉及的复合控制器能够指数镇定并调节该不稳定波方程。本研究为推广比例 - 积分 - 微分复合控制器在无限维系统实现常值参考信号输出跟踪方面的潜在应用提供了理论基础。然而，我们设计的控制器还无法实现对谐波参考信号(例如 $y_r(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ ，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)的输出跟踪。未来我们将继续探究所设计的控制器跟踪此类谐波参考信号的问题。

参考文献

- [1] Jin, F.F. and Guo, B.Z. (2018) Performance Boundary Output Tracking for One-Dimensional Heat Equation with Boundary Unmatched Disturbance. *Automatica*, **96**, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.06.020>
- [2] Deutscher, J. and Kerschbaum, S. (2016) Backstepping Design of Robust State Feedback Regulators for Second Order Hyperbolic PIDEs. *IFAC-PapersOnLine*, **49**, 80-85. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.422>
- [3] Feng, H., Guo, B.Z. and Wu, X.H. (2020) Trajectory Planning Approach to Output Tracking for a 1-D Wave Equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 1841-1854. <https://doi.org/10.1109/tac.2019.2937727>
- [4] Francis, B.A. and Wonham, W.M. (1976) The Internal Model Principle of Control Theory. *Automatica*, **12**, 457-465.

-
- [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(76\)90006-6](https://doi.org/10.1016/0005-1098(76)90006-6)
- [5] Desoer, C. and Lin, C.A. (1985) Tracking and Disturbance Rejection of MIMO Nonlinear Systems with PI Controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 861-867. <https://doi.org/10.1109/tac.1985.1104078>
- [6] Deutscher, J. (2015) A Backstepping Approach to the Output Regulation of Boundary Controlled Parabolic PDEs. *Automatica*, **57**, 56-64. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.04.008>
- [7] Gu, J.J., Wang, J.M. and Guo, Y.P. (2018) Output Regulation of Anti-Stable Coupled Wave Equations via the Backstepping Technique. *IET Control Theory & Applications*, **12**, 431-445. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2017.0677>
- [8] Wu, X.H. and Feng, H. (2019) Output Tracking for a 1-D Heat Equation with Non-Collocated Configurations. *Journal of the Franklin Institute*, **357**, 3299-3315. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.12.016>
- [9] Wang, J., Tang, S.X., Pi, Y., *et al.* (2018) Exponential Regulation of the Anti-Collocatedly Disturbed Cage in a Wave PDE-Modeled Ascending Cable Elevator. *Automatica*, **95**, 122-136. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.05.022>
- [10] Chentouf, B. and Wang, J.M. (2008) A Riesz Basis Methodology for Proportional and Integral Output Regulation of a One-Dimensional Diffusive-Wave Equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **47**, 2275-2302. <https://doi.org/10.1137/060671188>
- [11] Chentouf, B. and Wang, J.M. (2007) Stabilization of a One-Dimensional Dam-River System: Non-Dissipative and Non-Collocated Case. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **134**, 223-239. <https://doi.org/10.1007/s10957-007-9223-z>
- [12] Fan, X., Xu, C.Z., Xu, X., Kou, C. and Zhou, H.C. (2025) Stabilization of a Timoshenko Beam System with Boundary Matched Disturbances by Designing Novel Disturbance Estimator. *Mathematical Control and Related Fields*, **15**, 690-711. <https://doi.org/10.3934/mcrf.2024034>
- [13] Wang, Z.W. and Liu, J.J. (2025) Output Regulation Analysis and Proportional-Derivative Controller Design for a Single-input Single-Output Linear Wave System. *Asian Journal of Control*. <https://doi.org/10.1002/asjc.3745>
- [14] Krstic, M., Guo, B.Z., Balogh, A. and Smyshlyayev, A. (2008) Output-Feedback Stabilization of an Unstable Wave Equation. *Automatica*, **44**, 63-74. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.05.012>