

# 考虑治疗因素的埃博拉病毒模型的研究

李昕瑞

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年3月23日; 录用日期: 2026年4月18日; 发布日期: 2026年4月27日

## 摘要

埃博拉病毒的传播威胁着人类的生命安全。为了更全面地分析埃博拉病毒传播对人类造成的影响, 建立了一类考虑空床位影响、感染饱和效应和住院率的易感-传染-住院-康复-死亡(SIHRD)传染病模型。首先, 证明了解的的正性、有界性以及无病平衡点的稳定性, 并对地方病平衡点的存在性进行分析。随后, 推导出发生正向分支和后向分支的条件。此外, 证明了当医院容纳量较大时会产生前向分支, 当医院容纳量较小时会出现后向分支。最后, 通过数值模拟验证理论结果, 并给出控制病毒传播的相关建议。

## 关键词

埃博拉病毒, 医院病床数, 后向分支, SIHRD模型

# Research on an Ebola Virus Model Considering Therapeutic Factors

Xinrui Li

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: March 23, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 27, 2026

## Abstract

The spread of the Ebola virus poses a threat to human life safety. To conduct a more comprehensive analysis of the impact of the Ebola virus transmission on humans, a susceptible-infectious-hospitalized-recovered-dead (SIHRD) infectious disease model considering the influence of vacant beds, infection saturation effect and hospitalization rate was established. Firstly, the positivity, boundedness of the solution and the stability of the disease-free equilibrium point were proved, and the existence of the endemic equilibrium point was analyzed. Subsequently, the conditions for the occurrence of forward and backward bifurcations were derived. Moreover, it was proved that a forward bifurcation would occur when the hospital capacity is large, and a backward bifurcation would occur when the

hospital capacity is small. Finally, the theoretical results were verified through numerical simulation, and relevant suggestions for controlling the virus transmission were given.

## Keywords

Ebola Virus, Hospital Beds, Backward Bifurcation, SIHRD Model

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

埃博拉病毒病(EVD),也称为埃博拉出血热,是一种具有高传播率的流行病,经常导致人类死亡。该病毒通过野生动物传播给人类,并通过与埃博拉病毒患者和死者的血液或体液(通过破损的皮肤或粘膜)以及受污染物体的直接接触在人群中传播。埃博拉病毒于1976年首次出现在在刚果民主共和扬布库的埃博拉河附近的一个村庄,故命名为埃博拉病毒。

埃博拉病毒因其极高的感染率和死亡率引起了广泛关注。为了研究该病毒的传播与控制,Legrand等人[1]提出了一个由六个仓室的常微分方程组构成的埃博拉病毒模型。Feng等人[2]改进了[1]中的模型,认为死亡的个体在被埋葬后应从种群中剔除。Wang等人[3]研究了[2]中的第一个模型,并考虑了几种不同的阶段分布,包括指数、 $\gamma$ 和任意分布,用于评估隔离(或住院)和及时埋葬等控制策略。最近,Tadmon和Kengne[4]探索了埃博拉病毒的最佳控制方法以及所有控制措施组合的最具成本效益的策略。此外,其他学者[5]-[8]还研究了一些其他的优化控制模型,希望能得到恰当的措施控制埃博拉病毒的传播。

近年来,埃博拉病毒在非洲反复爆发。根据世界卫生组织报告,2017至2022年,刚果共发生14起疫情。而在大多数传染病中,获得性免疫力可能会逐渐消失。失去获得性免疫力后,康复者将变得易感。不同学者对该情况进行了不同的研究[9]-[11]。此外,一些新出现的传染病可能会导致传染病数量超过当地医疗资源的承载能力,因此为了揭示有限的医疗资源和免疫力丧失对埃博拉病毒传播的影响,Wang等人[12]提出了一个包含有限的医疗资源和免疫力丧失模型对埃博拉病毒进行深入研究,发现控制再生数与参数 $\rho$ (尸体焚烧或埋葬率)的相关性最大,当最大治疗恢复率从20%变化到40%时,感染个体的峰值降低了52.3%。病床人口比增加10%,传染病峰值下降29.1%。同时,当免疫损失率从60%降至20%时,感染的峰值下降了13.2%。加强对易感个体的追踪和隔离对埃博拉的预防和控制具有重大影响。

治疗效果在抗击传染病方面起着重要作用。而治疗方式在很大程度上取决于可用的医疗资源,为简单起见,假设以医院总床位数来衡量可用医疗资源。2004年,Wang和Ruan[13]提出了一个恒定治疗率的SIR模型,即引入治疗函数

$$T(I) = \begin{cases} r, & I > 0, \\ 0, & I = 0, \end{cases}$$

其中 $r > 0$ 是一个常数,表示治疗感染者的能力, $I$ 是感染者的数量。他们研究了模型的稳定性,并对模型的分支进行了分析。但这种治疗率适用于希望以最大能力迅速消灭的非常危险的疾病,或者传播迅速、治疗能力不足以在一段时间内达到治愈目的的疾病,如果感染者人数很少或治疗能力足够,实际没必要以最大能力进行治疗。因此Wang[14]考虑了将分段线性函数应用于SIR模型的治疗率中,即

$$T(I) = \begin{cases} kI, & 0 < I < I_0, \\ m, & I > I_0, \end{cases}$$

其中  $m = kI$  是治疗能力,  $I_0$  是感染人数的指定阈值,  $k$  是感染人数低于  $I_0$  时的治疗率系数, 治疗率将保持在恒定水平  $kI_0$ 。在经典的流行病模型中, 通常假设治疗率与感染者的数量成比例, 但这种治疗率并不恰当, 因为用于治疗的资源是有限的, 而上述分段线性的治疗函数解决了这一问题。Rattanakul 和 Chaiya [15]最近的一项研究中使用了该函数来研究新冠肺炎传播, 之后也有学者考虑了包括 Holling-II 型和 Holling-III 型的其他非线性治疗函数[16]-[20]。

然而, 上述文献中没有明确描述可用医疗资源对治疗功能的影响。正如 Shan 和 Zhu [21]所指出的那样, 恢复率  $\mu$  取决于公共可用的卫生系统资源。在决定恢复率  $\mu$  的众多因素中, 卫生规划人员使用病床人口比(HBPR), 即每 10,000 人可用的病床数量作为估算公众可用资源的一种方法。由于 HBPR 的重要性, Shan 和 Zhu 建议将医疗系统容量和有限资源的影响纳入到恢复率  $\mu$  中, 用参数  $b > 0$  表示 HBPR。此外,  $\mu$  还取决于感染者  $I$  的数量。在考虑医院资源对恢复率影响的初步研究中, Shan 和 Zhu 在 SIR 模型中使用了简单的函数

$$\mu = \mu(b, I) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \frac{b}{b + I},$$

其中,  $\mu_0$  和  $\mu_1$  分别是最低和最高人均恢复率。上式中的  $\mu$  满足[21]中规定的恢复率的一般要求。特别是它是  $b$  的递增函数, 这意味着当感染人数固定时, 医疗资源越多, 治疗率就越高。它是  $I$  的递减函数, 这意味着在固定的医疗资源下, 随着感染人数的增加, 治疗率将变小。此外, 无论有多少感染者, 即  $\lim_{I \rightarrow \infty} \mu(b, I) = \mu_0$ , 该模型可以经历后向分支、鞍结点分支、Hopf 分支和余维 3 的尖点 Bogdanov-Takens 分支。许多研究人员也使用这种治疗功能来研究住院条件变化对疾病传播的影响[22]。

如前所述, 当感染者人数较多时, 有一个最低治疗率, 即当感染人数达到无穷大时, 治疗率存在一个极限。这被称为感染的饱和效应。因此尽管住院率考虑了空床的影响, 但通常当  $\lim_{I \rightarrow \infty} h(I, H) = \infty$  时需要大量的资源用于治疗, 这没有反映出感染的饱和效应。最近, Jia 等人[23]提出并分析了一个包括空床的影响和感染者的饱和效应的易感 - 感染 - 住院 - 康复(SIHR)模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \frac{(C - H(t))_+}{(C - H(t))_+ + I(t)} bI(t) - (\mu + \delta_1 + \gamma_1)I(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = \frac{(C - H(t))_+}{(C - H(t))_+ + I(t)} bI(t) - (\mu + \delta_2 + \gamma_2)H(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I(t) + \gamma_2 H(t) - \mu R(t), \end{cases}$$

其中,  $\lambda$  是增长(招募)率,  $\beta$  是接触传播率,  $\mu$  是人均自然死亡率,  $C$  是医院总床位数,  $b$  是最高住院(入院)率,  $\delta_1$  是感染之后未住院患者死亡率,  $\gamma_1$  是未住院感染者康复率,  $\delta_2$  是感染之后住院患者死亡率,  $\gamma_2$  是住院感染者康复率,  $(C - H)_+ = \max\{C - H, 0\}$ ,  $\frac{(C - H(t))_+}{(C - H(t))_+ + I(t)} bI(t)$  是住院率。显然, 可以得到

$\lim_{(I, H) \rightarrow (0^+, c)} \frac{(C - H)_+}{(C - H)_+ + I} bI = 0$ , 也就是说, 当没有空床位或者没有感染时, 住院率为 0。此外, 当  $I$  接近无

穷大时, 住院率的极限就存在了。文中分析了地方病平衡点的存在性、无病平衡点的全局稳定性, 证实了会出现后向分支、鞍结点分支、Hopf 分支和 Bogdanov-Takens 分支。数值模拟表明, 当医院总床位数减少时, 模型的动态行为会从正向分支转变为后向分支和鞍结点分支, 且当医院总床位数降至某一阈值

以下时, 将发生后向分支, 这意味着即使基本再生数低于 1, 疾病也无法消除。

因此, 在 Wang 等人[12]提出的模型的基础上, 受文献 Jia 等人[23]的启发, 建立了一类具有空床位影响和感染者饱和效应的埃博拉病毒的易感 - 感染 - 住院 - 康复 - 死亡模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - (1-u)\beta(I(t) + \varepsilon D(t))S(t) - \mu S(t) + \theta R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = (1-u)\beta(I(t) + \varepsilon D(t))S(t) - \frac{(C-H(t))_+}{(C-H(t))_+ + I(t)} bI(t) - (\mu + \delta_1 + \gamma_1)I(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = \frac{(C-H(t))_+}{(C-H(t))_+ + I(t)} bI(t) - (\mu + \delta_2 + \gamma_2)H(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I(t) + \gamma_2 H(t) - (\theta + \mu)R(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \delta_1 I(t) + \delta_2 H(t) - \rho D(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $S$ 、 $I$ 、 $H$ 、 $R$ 、 $D$  分别为易感者、感染者、住院者、恢复者和死亡者, 模型(1)中其余各参数的含义如表 1 所示。为了简便计算, 这里记  $m = \mu + \delta_1 + \gamma_1$ ,  $n = \mu + \delta_2 + \gamma_2$  接下来将在下面的内容中展示关于系统(1)的一些初步的结果。

**Table 1.** The parameter meanings of Model (1)

**表 1.** 模型(1)的参数意义

参数	生物意义
$\Lambda$	增长(招募)率
$\beta$	接触传播率
$\mu$	人均自然死亡率
$C$	医院总床位数
$b$	最高住院(入院)率
$\delta_1$	感染之后未住院患者的死亡率
$\gamma_1$	未住院感染者的康复率
$\delta_2$	感染之后住院患者的死亡率
$\gamma_2$	住院感染者的康复率
$u$	被追踪和隔离个体所占比例
$\varepsilon$	死亡但尚未埋葬群体修正参数
$\theta$	免疫力丧失率
$\rho$	尸体焚烧或埋葬率

## 2. 模型的动力学分析

在本节中将研究系统(1)的动力学行为, 如模型解的正性和有界性, 以及平衡点的存在性和稳定性。

### 2.1. 解的正性及有界性

假设系统(1)的初值条件为  $(S(0), I(0), H(0), R(0), D(0)) \in \mathbb{R}_+^5$ , 其中  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 。由于方程组(1)的

右端是连续且局部李普希兹连续的, 所以对于任意初始条件在最大存在区间  $J$  上均存在唯一解。通过计算可得  $\left. \frac{dS}{dt} \right|_{(0,I,H,R,D) \in \mathbb{R}_+^5} > 0$ ,  $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{(S,0,H,R,D) \in \mathbb{R}_+^5} \geq 0$ ,  $\left. \frac{dH}{dt} \right|_{(S,I,0,R,D) \in \mathbb{R}_+^5} \geq 0$ ,  $\left. \frac{dR}{dt} \right|_{(S,I,H,0,D) \in \mathbb{R}_+^5} \geq 0$ ,  $\left. \frac{dD}{dt} \right|_{(S,I,H,R,0) \in \mathbb{R}_+^5} \geq 0$  故解在  $J$  上是非负的。而且对  $t \in J$ , 易得

$$\begin{aligned} \frac{d(S(t)+I(t)+H(t)+R(t)+D(t))}{dt} &= \Lambda - \mu S - mI - nH - \mu R + (\delta_1 + \gamma_1)I + (\delta_2 + \gamma_2)H - \rho D \\ &= \Lambda - \mu S - \mu I - \mu H - \rho D \\ &\leq \Lambda - \min\{\mu, \rho\}(S(t)+I(t)+H(t)+R(t)+D(t)). \end{aligned}$$

令  $\mu_1 = \min\{\mu, \rho\}$ , 根据比较原理, 对  $t \in J$ , 有

$$S(t)+I(t)+H(t)+R(t)+D(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu_1} + \left( S(0)+I(0)+H(0)+R(0)+D(0) - \frac{\Lambda}{\mu_1} \right) e^{-\mu_1 t}.$$

因此, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S(t)+I(t)+H(t)+R(t)+D(t)) \leq \frac{\Lambda}{\mu_1}.$$

即解在  $J$  上有界, 且  $J = \mathbb{R}_+$ 。故对于在  $\mathbb{R}_+^5$  中的任意初值条件, 系统(1)均存在唯一非负的全局解。根据系统(1)中的方程组可得该系统的解满足下列推论。

**推论 2.1.1** 对系统(1)的任意解  $(S(t)+I(t)+H(t)+R(t)+D(t))$  有下列条件成立:

(i)  $\lim_{\sup(t) \rightarrow \infty} H(t) \leq C$ ;

(ii) 若  $H(0) \leq C$ , 对任意  $t \in \mathbb{R}_+$ , 有  $H(t) \leq C$  成立。

**证明:** 首先假设存在  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  使得  $H(t_0) < C$ 。否则对  $t \in \mathbb{R}_+$  有  $H(t) > C$ 。那么, 对  $t \in \mathbb{R}_+$  有

$$\frac{dH}{dt} = \frac{(C-H)_+}{(C-H)_+ + I} bI - (\mu + \delta_2 + \gamma_2)H = -(\mu + \delta_2 + \gamma_2)H \leq -(\mu + \delta_2 + \gamma_2)C.$$

这意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = -\infty$ , 这与假设相矛盾, 那么当  $t > t_0$  时有  $H(t) \leq C$  成立。若该式子不成立, 那么

存在  $t_1 > t_0$  使得  $H(t_1) \geq C$ 。记  $\hat{t} = \sup\{t \geq t_0 : H(s) < C, s \in [t_0, t]\}$ , 那么  $\hat{t} < +\infty$ , 此外,  $H(\hat{t}) = C$  且  $\frac{dH(\hat{t})}{dt} \geq 0$ 。

但由方程组(1)中第三个等式可知,  $\frac{dH(\hat{t})}{dt} = -(\mu + \delta_2 + \gamma_2)C < 0$ , 这样就产生了矛盾。因此有

$\lim_{\sup(t) \rightarrow \infty} H(t) \leq C$ , 即(i)成立。当  $H(0) = C$  时,  $\frac{dH(0)}{dt} = -(\mu + \delta_2 + \gamma_2)C < 0$ , 即对任意  $t > 0$  都有  $H(t) < C$ 。

综上, 若  $H(0) \leq C$ , 对任意  $t \in \mathbb{R}_+$ , 有  $H(t) \leq C$  成立。

推论 2.1 意味着对于分量  $H(t)$  区间  $[0, C]$  是吸引并且正不变的。因此, 无论病情怎样发展, 住院人数最终都不会超过医院病床数的总量。由推论 2.1 的证明可知, 如果在传染病传播的最初有空闲的床位, 那么将能够为患者持续提供空闲的床位, 因此有能力接纳一些严重的病例。

下面将着力分析分析模型(1)平衡点的存在性并将在后面部分研究平衡点附近的局部和全局动力学。

## 2.2. 地方病平衡点的存在性

显而易见, 系统(1)总存在不依赖于参数取值的无病平衡点  $E_0 = (S_0, 0, 0, 0, 0) = \left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$ 。下面将

计算模型(1)的基本再生数。根据由[24]提供的基本再生矩阵方法, 可得到模型(1)的基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{(1-u)\beta\Lambda}{\mu(b+m)} \left[ 1 + \frac{\varepsilon(\delta_1 n + \delta_2 b)}{n\rho} \right],$$

其中  $\rho$  为矩阵的谱半径。

下面讨论地方病平衡点的存在性。假设  $E_* = (S_*, I_*, H_*, R_*, D_*)$  是该模型的一个地方病平衡点, 那么  $(S_*, I_*, H_*, R_*, D_*)$  满足下列等式:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (1-u)\beta(I_* + \varepsilon D_*)S_* - \mu S_* + \theta R_*, \\ \frac{dI}{dt} &= (1-u)\beta(I_* + \varepsilon D_*)S_* - \frac{(C-H_*)_+}{(C-H_*)_+ + I_*} bI_* - mI_*, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{(C-H_*)_+}{(C-H_*)_+ + I_*} bI_* - nH_*, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I_* + \gamma_2 H_* - (\theta + \mu)R_*, \\ \frac{dD}{dt} &= \delta_1 I_* + \delta_2 H_* - \rho D_*, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{\Lambda + \frac{\theta}{\theta + \mu}(\gamma_1 I_* + \gamma_2 H_*)}{(1-u)\beta \left( I_* + \frac{\varepsilon}{\rho}(\delta_1 I_* + \delta_2 H_*) \right) + \mu}, \\ I_* &= \frac{nCH_* - nH_*^2}{bC - (n+b)H_*}, \\ R_* &= \frac{1}{\theta + \mu}(\gamma_1 I_* + \gamma_2 H_*), \\ D_* &= \frac{\delta_1 I_* + \delta_2 H_*}{\rho}. \end{aligned}$$

当  $I_* > 0$  时, 有  $H_* < \frac{bC}{b+n} (< C)$ 。将上述方程代入  $\Lambda - \mu S_* - \mu I_* - \mu H_* - \mu R_* - \rho D_* = 0$  中, 有

$$G(H) = a_1 H^3 + a_2 H^2 + a_3 H + a_4, \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= (b+n)^2 (1-u)\beta \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( n - \frac{\theta\gamma_2}{\theta + \mu} \right) + n(b+n)(1-u)\beta \left[ \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( m + \frac{\theta\gamma_1}{\theta + \mu} \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \left( n - \frac{\theta\gamma_2}{\theta + \mu} \right) \right] \\ &\quad + n^2 (1-u)\beta \left( m - \frac{\theta\gamma_1}{\theta + \mu} \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \\ &< 0, \\ a_2 &= -(b+n) \left[ \mu(b+m)(R_0 - 1) + (1-u)\beta\Lambda\varepsilon \frac{\delta_2}{\rho} - n^2\mu \right] + 2Cn^2 (1-u)\beta \left( \frac{\theta\gamma_1}{\theta + \mu} - m \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \\ &\quad + 2bC(b+n)(1-u)\beta \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( \frac{\theta\gamma_2}{\theta + \mu} - n \right) \\ &\quad + Cn(2b+n)(1-u)\beta \left[ \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( \frac{\theta\gamma_1}{\theta + \mu} - m \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \left( \frac{\theta\gamma_2}{\theta + \mu} - n \right) \right], \end{aligned}$$

$$a_3 = C(2b+n)\mu(b+m)(R_0-1) + bCn \left[ \Lambda(1-u)\beta \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} - n\mu \right] - C^2n^2(1-u)\beta \left( m - \frac{\theta\gamma_1}{\theta+\mu} \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) - b^2C^2(1-u)\beta \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( n - \frac{\theta\gamma_2}{\theta+\mu} \right) - bC^2n(1-u)\beta \left[ \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( m + \frac{\theta\gamma_1}{\theta+\mu} \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \left( n - \frac{\theta\gamma_2}{\theta+\mu} \right) \right],$$

$$a_4 = bC^2n\mu(b+m)(1-R_0).$$

由计算得,

$$G\left(\frac{bC}{b+n}\right) = \frac{bC^3n^3(2b+n)}{(b+n)^3}(1-u)\beta \left( \frac{\theta\gamma_1}{\theta+\mu} - m \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) + \frac{b^2C^3(n^2-2b^2)}{(b+n)^2}(1-u)\beta \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( \frac{\theta\gamma_2}{\theta+\mu} - n \right) + \frac{2b^2-n^2}{(b+n)^2}(1-u)\beta \left[ \frac{\varepsilon\delta_2}{\rho} \left( \frac{\theta\gamma_1}{\theta+\mu} - m \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon\delta_1}{\rho} \right) \left( \frac{\theta\gamma_2}{\theta+\mu} - n \right) \right],$$

记  $\Delta := a_2^2 - 3a_1a_3$ , 当  $\Delta \geq 0$  时,  $G'(H) = 3a_1H^2 + 2a_2H + a_3 = 0$  有两个根  $r_{1,2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{\Delta}}{3a_1}$  (假设  $r_1 \leq r_2$ ). 通过考虑函数  $G$  的单调性, 可以得到以下结果判断地方病平衡点的存在性.

**定理 2.2.1** 假设  $R_0 > 1$ , 那么在区间  $\left(0, \frac{bC}{b+n}\right)$  内, 系统(1)仅在以下情形之一成立时存在地方病平衡点.

(i) 系统(1)仅在以下情形之一成立时存在唯一一个地方病平衡点.

a)  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$ ;

b)  $0 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ .

(ii) 当  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  且  $0 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$  时, 存在两个地方病平衡点.

**证明:** 当  $R_0 > 1$  时, 有  $G(0) = a_4 < 0$ , 当  $\Delta \leq 0$  时, 有函数  $G$  在区间  $(0, +\infty)$  上是单调递减的, 但由于  $G(0) < 0$ , 则对任意  $H > 0$  有  $G(H) < 0$  恒成立, 则此时系统(1)不存在地方病平衡点. 下面假设  $\Delta > 0$ . 此时  $G$  在区间  $[r_1, r_2]$  上递增而在区间  $[-\infty, r_1]$  和  $[r_2, +\infty)$  上递减. 若  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$ , 此时在区间  $\left[r_1, \frac{bC}{b+n}\right)$  内存在唯一一个地方病平衡点. 当  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  时, 若  $r_2 < \frac{bC}{b+n}$  且  $G(r_2) < 0$ , 此时不存在地方病平衡点; 若  $G(r_2) = 0$  时存在唯一一个地方病平衡点, 即(i)成立; 若  $G(r_2) > 0$ , 根据介值定理可知, 系统(1)在区间  $(r_1, r_2)$  和  $\left(r_2, \frac{bC}{b+n}\right)$  分别存在一个地方病平衡点, 即(ii)成立.

**定理 2.2.2** 假设  $R_0 > 1$ , 当  $\Delta > 0$  时, 在区间  $\left(0, \frac{bC}{b+n}\right)$  内, 系统(1)仅在下列情形之一成立时存在地方病平衡点.

(i) 系统(1)仅在以下情形之一成立时存在唯一一个地方病平衡点.

a)  $r_1 \leq 0 < r_2$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ ;

b)  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$ ;

c)  $0 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$ 。

(ii) 系统(1)在  $0 < r_1 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) > 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  成立时, 存在两个地方病平衡点。

**证明:** 当  $R_0 = 1$  时, 假设  $\Delta \leq 0$ , 此时函数  $G$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递减的, 并且有  $G(0) = a_4 = 0$ , 此时在区间  $(0, +\infty)$  内不存在地方病平衡点。

下面假设  $\Delta > 0$ 。此时  $G$  在区间  $[r_1, r_2)$  上递增而在区间  $[-\infty, r_1)$  和  $[r_2, +\infty)$  上递减, 由于  $G(0) = 0$ , 下面分几种情况来证明:

1) 当  $r_1 \leq 0 < r_2$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  时, 此时有  $G(r_2) > 0$ , 故仅存在一个地方病平衡点;

2) 当  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$  时, 函数  $G$  在区间  $\left(r_1, \frac{bC}{b+n}\right)$  上是单调递增的, 因此存在唯一一个地方病平衡点;

3) 当  $0 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  时, 在  $r_2 = 0$  处存在一个地方病平衡点;

4) 当  $0 < r_1 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) > 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  时, 函数  $G$  在区间  $(0, r_1)$  上递减故  $r_1 < 0$ , 同时由于  $G(r_2) > 0$ ,  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ , 那么对任意  $H \in \left(0, \frac{bC}{b+n}\right)$ , (1) 存在两个地方病平衡点。

**定理 2.2.3** 假设  $R_0 < 1$ , 那么在区间  $\left(0, \frac{bC}{b+n}\right)$  内, 系统(1)仅在下列情形之一成立时存在地方病平衡点。

(i) 当  $\Delta \leq 0$  时, 若  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ , 则仅存在唯一一个地方病平衡点。

(ii) 当  $\Delta > 0$  时:

a) 系统(1)仅在下列情形之一成立时存在唯一一个地方病平衡点。

i.  $r_1 < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ ;

ii.  $r_1 > 0$ ,  $G(r_1) > 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ ;

iii.  $\frac{bC}{b+n} < r_1$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ ;

iv.  $0 < \frac{bC}{b+n} < r_2$ ,  $G(r_1) < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) \leq 0$ ;

v.  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_2) < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) \leq 0$ ;

vi.  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n} \leq r_2$ ,  $G(r_2) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) \leq 0$ ;

vii.  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) \geq 0$ 。

b) 系统(1)仅在下列情形之一成立时存在两个地方病平衡点。

i.  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) = 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ ;

ii.  $0 < r_1 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) < 0$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) > 0$ ;

iii.  $0 < r_1 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$ ,  $G(r_1) < 0$  且  $G(r_2) = 0$ 。

c) 系统(1)仅在  $0 < r_1 < r_2 < \frac{bC}{b+n}$  且  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  成立时存在三个地方病平衡点。

**证明:** 当  $R_0 < 1$  时, 有  $G(0) = a_4 > 0$ , 假设  $\Delta \leq 0$ , 此时函数  $G$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递减的, 此时由于  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$ , 那么在  $\left(0, \frac{bC}{b+n}\right)$  不存在地方病平衡点。

下面假设  $\Delta > 0$ 。此时  $G$  在区间  $[r_1, r_2)$  上递增而在区间  $[-\infty, r_1)$  和  $[r_2, +\infty)$  上递减, 由于  $G(0) \leq 0$ , 下面分几种情况来证明:

1) 当  $G\left(\frac{bC}{b+n}\right) < 0$  时, 若  $r_1 < 0$  或  $r_1 > 0$  且  $G(r_1) > 0$ , 这时显然有  $r_2 < \frac{bC}{b+n}$ , 那么  $G$  有唯一零点;

2) 当  $r_1 > 0$  且  $G(r_1) = 0$  或  $G(r_2) = 0$ ,  $r_2 < \frac{bC}{b+n}$  时, 此时函数  $G$  存在两个零点, 根据  $r_1$ 、 $r_2$  以及  $\frac{bC}{b+n}$  的位置关系系统有 0、1、2 个地方病平衡点;

3) 当  $G(r_1) < 0$  且  $G(r_2) > 0$  时, 此时函数  $G$  存在三个零点, 根据 0、 $r_1$ 、 $r_2$  以及  $\frac{bC}{b+n}$  的位置关系系统有 0、1、2、3 个地方病平衡点。

### 2.3. 无病平衡点的稳定性

这里将分析无病平衡点  $E_0$  的稳定性。无病平衡点  $E_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$  的稳定性由下面的定理给出。

**定理 2.3.1** 系统(1)的无病平衡点  $E_0$  在  $R_0 < 1$  时是局部渐近稳定的, 当  $R_0 > 1$  时是不稳定的。

**证明:** 通过计算, 可得在  $E_0$  处线性化系统(1)的雅可比矩阵为

$$M_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & -(1-u)\beta\frac{\Lambda}{\mu} & 0 & \theta & -(1-u)\beta\varepsilon\frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & (1-u)\beta\frac{\Lambda}{\mu} - b - m & 0 & 0 & (1-u)\beta\varepsilon\frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & b & -n & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\theta - \mu & 0 \\ 0 & \delta_1 & \delta_2 & 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

因此, 关于  $E_0$  的特征方程为

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu)(\lambda + \theta + \mu) \left[ \left( \lambda + b + m - (1-u)\beta\frac{\Lambda}{\mu} \right) (\lambda + n)(\lambda + \rho) - (1-u)\beta\varepsilon\frac{\Lambda}{\mu} (\lambda + b + n) \right] \\ & = (\lambda + \mu)(\lambda + \theta + \mu) (\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) = 0. \end{aligned}$$

其中,

$$b_1 = n + \rho + b + m - (1-u)\beta\frac{\Lambda}{\mu} = n + \rho + \frac{b+m}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} [n\rho(1-R_0) + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)],$$

$$\begin{aligned} b_2 &= (n + \rho) \left[ b + m - (1-u)\beta\frac{\Lambda}{\mu} \right] + n\rho - (1-u)\delta_1\beta\varepsilon\frac{\Lambda}{\mu} \\ &= \frac{(b+m)(n+\rho)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} [n\rho(1-R_0) + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)] + n\rho - (1-u)\delta_1\beta\varepsilon\frac{\Lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

$$b_3 = n\rho \left( b+m-(1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \right) - (1-u)(\delta_2 b + \delta_1 n) \beta \varepsilon \frac{\Lambda}{\mu} = n\rho(b+m)(1-R_0).$$

根据  $b_3 = n\rho(b+m)(1-R_0)$  可知, 当时有  $b_3 = 0$ , 此时特征方程存在一个根为 0, 即存在一个零特征值。令  $b_4 = \frac{b+m}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} [n\rho(1-R_0) + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]$ , 通过计算可得

$$\begin{aligned} b_1 b_2 - b_3 &= b_4 \left[ (n+\rho)^2 - (1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon \delta_1 + (n+\rho)b_4 \right] \\ &\quad + (n+\rho) \left[ n\rho - (1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon \delta_1 \right] + (1-u)\beta \varepsilon \frac{\Lambda}{\mu} (\delta_2 b + \delta_1 n) \\ &= b_4 \left[ n^2 + \rho^2 + \frac{n\rho [2 - (b+m)\delta_1 \varepsilon R_0]}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} + (n+\rho)b_4 \right] \\ &\quad + (1-u)\beta \varepsilon \frac{\Lambda}{\mu} (\delta_2 b + \delta_1 n) + (n+\rho) \frac{n\rho [1 - (b+m)\delta_1 \varepsilon R_0]}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \\ &\geq b_4 \left[ 4n\rho - \frac{n\rho(b+m)\delta_1 \varepsilon R_0}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} + (n+\rho)b_4 \right] \\ &\quad + \frac{n\rho(n+\rho) + (n+\rho)(\delta_2 b + \delta_1 n) + (b+m)n\rho\varepsilon(\delta_2 b - \delta_1 \rho)R_0}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \\ &\geq b_4 \left[ n\rho \frac{4n\rho + 4b\varepsilon\delta_2 + (4n - (b+m)R_0)\delta_1 \varepsilon}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} + (n+\rho)b_4 \right] \\ &\quad + \frac{n\rho(n+\rho) + \varepsilon(\delta_2 b(n + (b+m)R_0) + \delta_1(n^2 + n\rho(1-R_0) + b\rho(1-R_0)))}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}. \end{aligned}$$

由于特征方程存在两个负实根  $-\mu$  和  $-\mu-\theta$ , 根据 Routh-Hurwitz 判据, 当  $b_1 > 0$ 、 $b_3 > 0$  且  $b_1 b_2 - b_3 > 0$  即  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点时渐近稳定, 而当  $R_0 > 1$  时无病平衡点是不稳定的。

在接下来的内容中, 将通过构造合适的李雅普诺夫函数来讨论无病平衡点的全局稳定性。

**定理 2.3.2** 系统(1)的无病平衡点  $E_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$  在满足  $R_0 \leq \min \left\{ \frac{\mu}{\rho}, 1 \right\} \frac{[n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}{n(b+m)}$  时是全局渐近稳定的。

**证明:** 为了证明无病平衡点  $E_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$  的全局渐近稳定性, 令  $y = S - S_0$ , 那么可以得到系统(1)。

这里构建李雅普诺夫函数:

$$L = y - \ln \frac{y + S_0}{S_0} + I + H + R + D,$$

由于  $R_0 = \frac{(1-u)\beta\Lambda}{\mu(b+m)} \left[ 1 + \frac{\varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}{n\rho} \right]$ , 当  $(1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \leq \mu$  时有  $R_0 \leq \frac{\mu [n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}{n\rho(b+m)}$ , 当  $(1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \leq \rho$  时有  $R_0 \leq \frac{[n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}{n(b+m)}$ 。故仅需满足  $R_0 \leq \min \left\{ \frac{\mu}{\rho}, 1 \right\} \frac{[n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}{n(b+m)}$ 。考虑  $L$  沿着系统(1)的解的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \dot{y} - \frac{S_0 \dot{y}}{y+S_0} + \dot{I} + \dot{H} + \dot{R} + \dot{D} \\ &= \left(1 - \frac{S_0}{y+S_0}\right) (\Lambda - (1-u)\beta(I + \varepsilon D)(y+S_0) - \mu(y+S_0) + \theta R) - mI - nH \\ &\quad + (1-u)\beta(I + \varepsilon D)(y+S_0) + \gamma_1 I + \gamma_2 H - \theta R - \mu R + \delta_1 I + \delta_2 H - \rho D \\ &= \mu S_0 \left(2 - \frac{y+S_0}{S_0} - \frac{S_0}{y+S_0}\right) + \left[(1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \mu\right] I - \mu H - \left(\frac{S_0}{y+S_0} + \mu\right) R + \left[(1-u)\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \rho\right] D \leq 0. \end{aligned}$$

显而易见，当  $R_0$  满足上述条件时， $L$  是  $\mathbb{R}_+^5$  上的李雅普诺夫函数。此时对系统(1)的任意解  $(S(t), I(t), H(t), R(t), D(t))$ ，当  $t > 0$  时，有  $L \geq 0$ ，当且仅当  $S(0) = I(0) = H(0) = R(0) = D(0) = 0$  时有  $L = 0$  通过 LaSalle 不变集原理可知， $E_0$  是全局渐近稳定的。这样就完成了该定理的证明。

### 3. 模型的分支分析

当  $R_0 < 1$  时，系统(1)可能会在  $E_0 \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$  处产生后向分支。但是要以  $C$  作为分支参数明确地推出产生后向分支的条件不是一件容易的事情，因此这里以  $\beta$  作为分支参数推导产生后向分支的条件，这同时也能间接反应  $C$  的情况。

**定理 3.1** 假设  $R_0 = 1$ ，系统(1)将在  $\hat{a} > 0$  时经历后向分支，在  $\hat{a} < 0$  时经历前向分支。

**证明：**由之前的证明可知  $R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{(1-u)\beta\Lambda}{\mu(b+m)} \left[1 + \frac{\varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}{n\rho}\right]$ ，由于这里将  $\beta$  作为分支参数，

有  $\beta^* = \frac{\mu(b+m)}{(1-u)\Lambda \left[1 + \frac{\varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}{n\rho}\right]} = \frac{n\rho\mu(b+m)}{(1-u)\Lambda [n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}$ 。下面将利用由 Castillo-Chavez 和 Song 在

[25]中提出的定理 4.1 来进行证明。为此，令  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (S, I, H, R, D)$  并将系统(1)改写为矩阵形式：

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \\ f_5(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - (1-u)\beta(x_2 + \varepsilon x_5)x_1 - \mu x_1 + \theta x_4 \\ (1-u)\beta(x_2 + \varepsilon x_5)x_1 - \frac{(C-x_3)_+}{(C-x_3)_+ + x_2} b x_2 - m x_2 \\ \frac{(C-x_3)_+}{(C-x_3)_+ + x_2} b x_2 - n x_3 \\ \gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_3 - (\theta + \mu)x_4 \\ \delta_1 x_2 + \delta_2 x_3 - \rho x_5 \end{pmatrix},$$

其中， $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}_+^5$ ， $f \in \mathbb{R}^5$ 。当  $\beta = \beta^*$  时，重写(1)在  $E_0$  处的雅可比矩阵：

$$M(E_0, \beta^*) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{n\rho(b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} & 0 & \theta & -\frac{n\rho\varepsilon(b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \\ 0 & \frac{n\rho(b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} - b - m & 0 & 0 & \frac{n\rho\varepsilon(b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \\ 0 & b & -n & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\theta - \mu & 0 \\ 0 & \delta_1 & \delta_2 & 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

通过之前的计算可知，当  $R_0 = 1$  时存在一个零特征值。这里设  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$  和

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^\top$  分别是特征值为 0 时  $M(E_0, \beta^*)$  的左、右特征向量, 通过计算可得

$$w = \left( 0, 1, \frac{\delta_2 \varepsilon (b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}, 0, \frac{n\varepsilon(b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \right),$$

$$v = \left( \frac{\gamma_1 + \frac{b\gamma_2}{n}}{\mu(\theta + \mu)} - \frac{b+m}{\mu}, 1, \frac{b}{n}, \gamma_1 + \frac{b\gamma_2}{n}, \frac{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)}{n\rho\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right)^\top.$$

根据[25]中的定理 4.1, 有

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \sum_{k,i,j=1}^5 w_k v_i v_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(E_0, \beta^*), \quad \hat{b} = \sum_{k,i=1}^5 w_k v_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta}(E_0, \beta^*).$$

注意到由于  $w_1 = w_4 = 0$ , 并且函数  $f_5(x)$  是线性函数没有二阶导, 故这里仅考虑  $k = 2, 3$  时进行求和。

记  $g_1 = \frac{n\rho(b+m)}{n\rho + f\varepsilon(b+n)}$ , 由计算得

$$\begin{aligned} \hat{a} &= w_2 \left[ \frac{b}{C} + v_1(1-u)\beta^* + v_1 v_5(1-u)\varepsilon\beta^* \right] - w_3 \frac{b}{C} \\ &= \frac{b}{C} \left( 1 - \frac{\delta_2 \varepsilon (b+m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} \right) + \frac{v_1 g_1 \mu}{\Lambda} (1 + \varepsilon v_5) \\ &= \frac{b}{C} \frac{n\rho + \varepsilon(\delta_1 n - \delta_2 m)}{n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)} + \frac{b+m}{\Lambda(\theta + \mu)} \left( \gamma_1 + \frac{b\gamma_2}{n} - (b+m)(\theta + \mu) \right), \\ \hat{b} &= (w_2 + w_3) \left[ \frac{(1-u)\Lambda}{\mu} v_2 + \frac{(1-u)\varepsilon\Lambda}{\mu} v_5 \right] \\ &= \left( 1 + \frac{f\varepsilon(b+m)}{n\rho + f\varepsilon(b+n)} \right) \frac{(1-u)\Lambda}{\mu} (v_2 + \varepsilon v_5) \\ &= \frac{(1-u)\Lambda(b+m)}{g_1 \mu} \left( 1 + \frac{f\varepsilon(b+m)}{n\rho + f\varepsilon(b+n)} \right) > 0. \end{aligned}$$

若  $\hat{a} > 0$ , 则此时系统(1)经历后向分支; 若  $\hat{a} < 0$ , 则此时系统(1)经历前向分支。

根据上述定理证明中  $\hat{a}$  的表达式可以看出, 当第二项  $\gamma_1 + \frac{b\gamma_2}{n} - (b+m)(\theta + \mu)$  中康复率较大, 免疫丧失率和自然死亡率较小, 同时医院容纳量(医院总床位数  $C$ )有限(较小), 入院率  $b$  较高时,  $\hat{a}$  通常是大于零的, 此时会产生后向分支; 反之, 若医院容纳量、免疫丧失率和自然死亡率较大, 而住院率和康复率较小时,  $\hat{a}$  可能会小于零, 此时产生前向分支。

这也就是说, 仅仅有  $R_0 < 1$  并不能确保能够根除疾病, 当  $R_0 < 1$  并接近于 1 时可能存在地方病平衡点, 这也意味着当  $R_0 < 1$  时不能保证无病平衡点  $E_0$  的全局稳定性。因此在定理 2.3.2 中需要一个更强的条件来确保  $E_0$  是全局稳定的。

#### 4. 数值模拟

本节中将研究不同参数可能对模型产生的影响, 并通过数值模拟佐证前文中得出的结果。

这里通过全局敏感性分析来获得更大范围内参数的变化对模型的影响。遵循[26][27]中的方法, 得到了  $R_0$  的 PRCC 随参数的变化关系, 结果如图 1 所示(其中蓝色\*表示  $p < 0.01$ )。同时也画出了

$R_0, S, I, H, R, D$  对参数敏感性的热图, 如图 2 所示。通过热图能够更好地看出  $R_0, S, I, H, R, D$  对不同的参数变化的敏感性, 给出合适的控制策略控制疫情的传播。

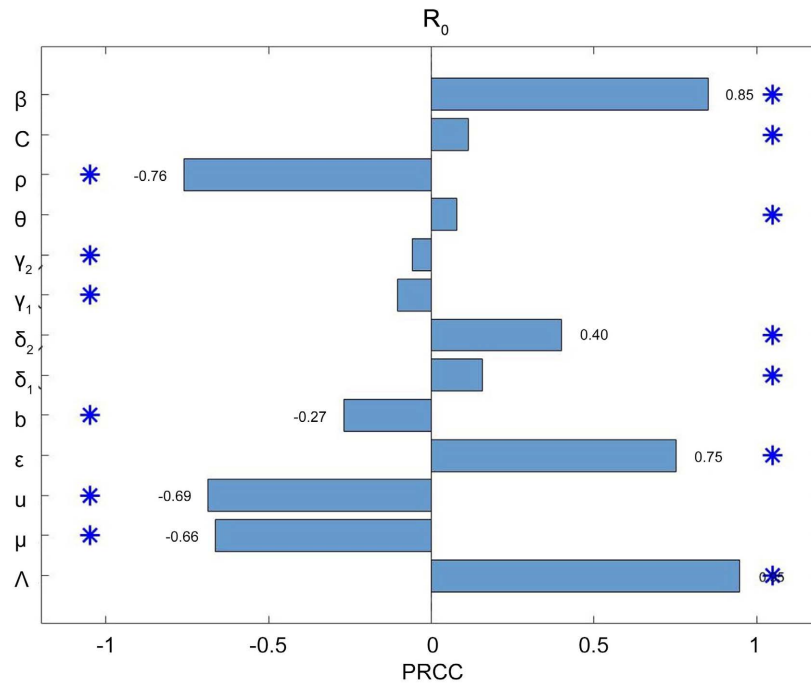


Figure 1. Sensitivity analysis diagram of the basic reproduction number  $R_0$   
 图 1. 基本再生数  $R_0$  的敏感性分析图

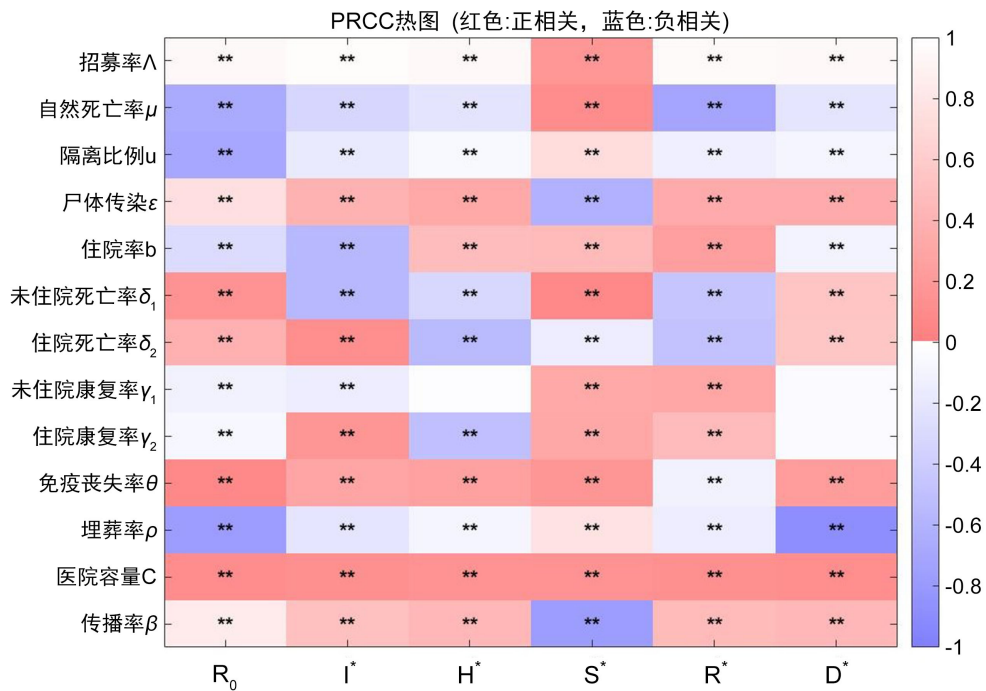


Figure 2. Heat map showing the sensitivity of  $R_0, S, I, H, R, D$  to parameters  
 图 2.  $R_0, S, I, H, R, D$  对参数敏感性的热图

观察图 1 可知, 招募率  $\Lambda$ 、传播率  $\beta$ 、死亡尚未埋葬个体修正参数  $\varepsilon$ 、住院患者死亡率  $\delta_2$ 、未住院患者死亡率  $\delta_1$ 、医院总床位数  $C$  和免疫力丧失率  $\theta$  与  $R_0$  呈正相关, 而尸体焚烧或埋葬率  $\rho$ 、被追踪和隔离个体所占比例  $u$ 、人均自然死亡率  $\mu$ 、住院率  $b$ 、未住院个体恢复率  $\gamma_1$  和住院个体恢复率  $\gamma_2$  与  $R_0$  呈负相关。

显然, 根据图 1 可知, 基本再生数  $R_0$  对招募率  $\Lambda$  和传播率  $\beta$  的变化最为敏感。这需要控制人员流动和社交距离, 减少大型聚集活动。同时  $R_0$  还对尸体焚烧或埋葬率  $\rho$ 、死亡尚未埋葬个体修正参数  $\varepsilon$  和被追踪和隔离个体所占比例  $u$  的变化非常敏感, 这说明合理处置因埃博拉病毒死亡的尸体对疫情的传播与控制非常重要, 通过追踪隔离因病死亡个体并对尸体进行焚烧或者埋葬有利于疫情的控制, 同时接触死者尸体的病人家属以及医护人员要做好防护措施, 主动取消大型葬礼活动, 减少易感个体与传染源的接触。

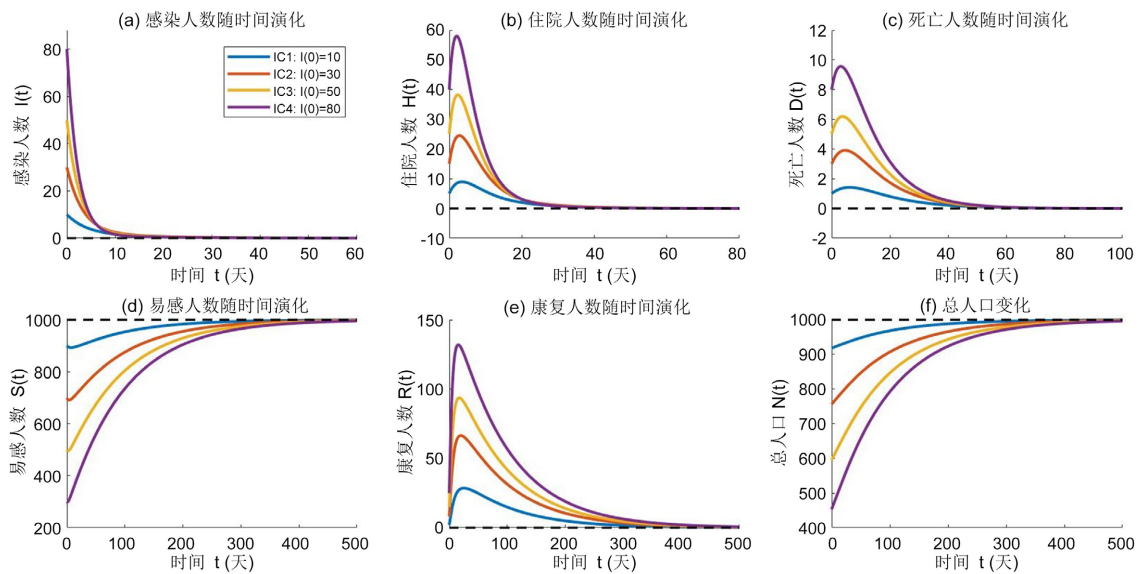


Figure 3. The stability of the disease-free equilibrium when  $R_0 < 1$

图 3.  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点的稳定性

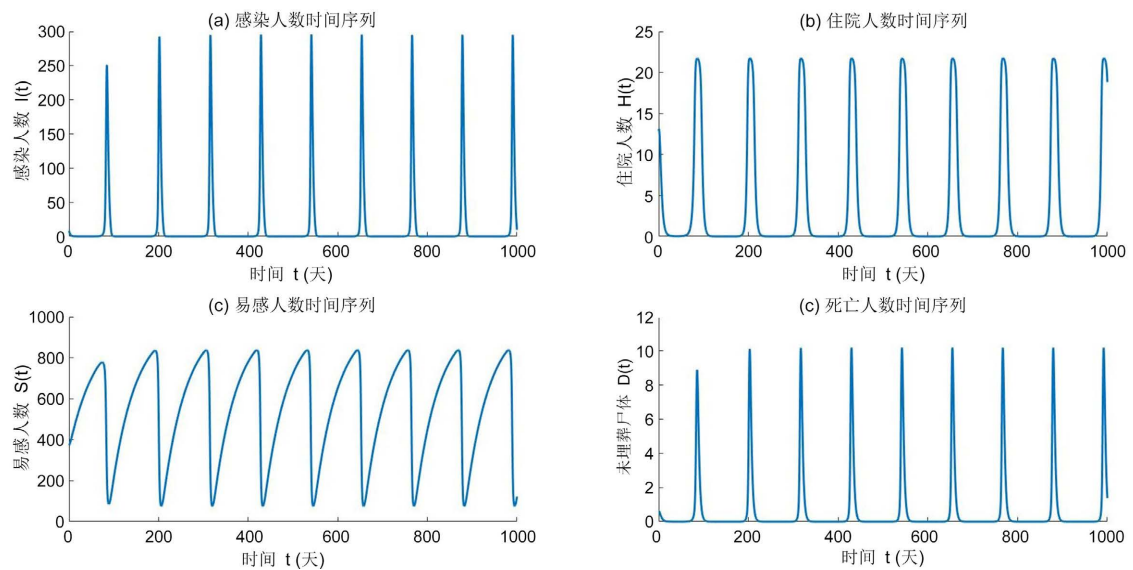


Figure 4. The solution converges to a stable periodic solution when  $R_0 > 1$

图 4.  $R_0 > 1$  时, 解收敛于稳定的周期解

接下来,为了验证理论结果,假定参数  $\Lambda=10, \mu=0.01, \beta=0.008, u=0.95, \varepsilon=0.3, b=0.4, C=2000, \delta_1=0.02, \delta_2=0.01, \gamma_1=0.15, \gamma_2=0.2, \theta=0.01, \rho=0.8$ , 此时  $R_0=0.7687 < 1$ , 无病平衡点为  $E_0(1000,0,0,0,0)$ , 如图 3 所示, 随着时间的推移收敛于稳定解。同时通过计算可知, 当初值取  $I(0)=10,30,50,80$  时, 感染人数下降至 1 以下所需要的时间分别为 14.9、17.1、14.6 和 12.6 天。再取参数  $\beta=0.01, u=0.8, \varepsilon=0.4, b=0.9, C=30, \delta_1=0.03, \delta_2=0.02, \gamma_1=0.4, \gamma_2=0.3$ , 其余参数保持不变, 可得  $R_0=1.5556 > 1$ , 地方病平衡点为  $E_*(465.13,10.23,16.08,445.73,0.79)$ , 如图 4 所示, 此时解是周期震荡的。

最后,分析该模型出现分支的情况。假定参数  $\Lambda=10, \mu=0.01, \beta=0.3, u=0.3, \varepsilon=0.5, b=0.5, \delta_1=0.02, \delta_2=0.01, \gamma_1=0.1, \gamma_2=0.15, \theta=0.002, \rho=0.1$ , 当  $C=100$  时会发生前向分支, 如图 5 中右图所示, 而当  $C=10$  时会发生后向分支, 如图 5 中左图所示。这与之前的分析一致, 即当医院容纳量有限(较小)时会发生后向分支, 而当医院容纳量较大时会发生前向分支。

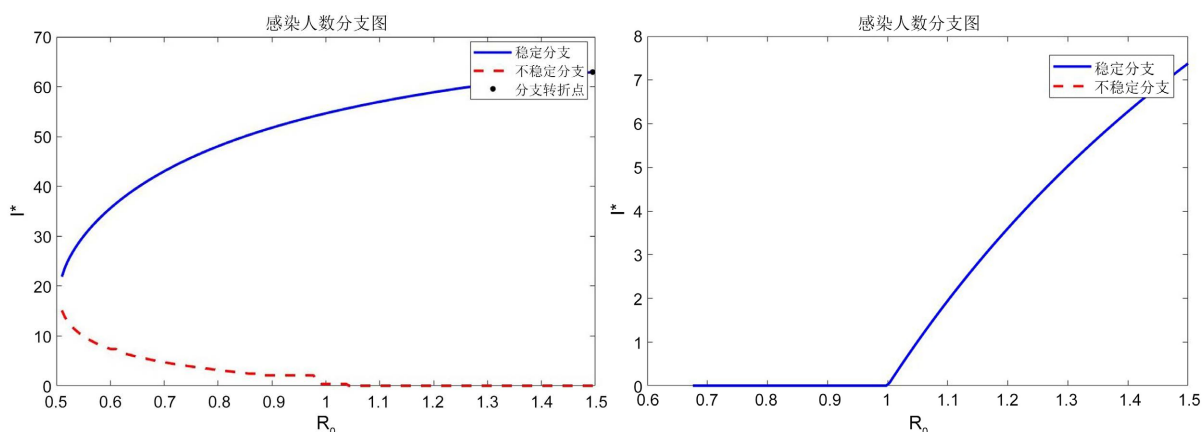


Figure 5. When  $R_0 = 1$ , a backward bifurcation (left) and a forward bifurcation (right) may occur

图 5.  $R_0 = 1$  时可能产生后向分支(左)和前向分支(右)

### 5. 总结展望

本文运用常微分方程等方面的理论知识, 研究了具有治疗因素的传染病模型的动力学行为。在埃博拉病毒模型的基础上, 考虑了治疗因素中空床位以及感染者饱和效应的影响, 建立了一个易感-感染-住院-恢复-死亡(SIHRD)传染病模型, 首先研究证明了方程组(1)解的正性和有界性, 计算了基本再生数  $R_0$ 、无病平衡点  $E_0$  并讨论了地方平衡点  $E_*$  在  $R_0$  取不同值的情况下的个数。其次, 研究了无病平衡点的稳定性, 即当基本再生数  $R_0 \leq \min\left\{\frac{\mu}{\rho}, 1\right\} \frac{[n\rho + \varepsilon(\delta_2 b + \delta_1 n)]}{n(b+m)}$  时, 无病平衡点总是渐近稳定的; 而

当

基本再生数  $R_0 > 1$  时, 总是不稳定的。然后分析了该模型可能出现的分支, 通过理论研究和数值模拟发现, 当医院容纳量(总床位数)有限时, 模型会出现后向分支, 即  $R_0 < 1$  时疾病仍可能持续存在, 当医院容纳量较大时会发生前向分支。在其他研究中不同机制导致产生后向分支也会带来相同结果, 但本文中强调公共卫生政策不仅应关注传播控制, 还应同步提升医疗资源容量。对埃博拉等高致死率疫情, 医院床位的动态分配和管理应成为防控策略的核心组成部分。由此可见, 病床的数量对控制疾病的传播起着重要的作用。然而, 在本模型中, 当分析无病平衡点稳定性时发现存在特征值为零的情况, 但没有分析是否会产生分支以及分支的情况, 在接下来的工作中可以对这部分内容进行扩充, 同时也可以对该模型是否会

产生其它类型的分支进行分析，这也能够更好地控制埃博拉病毒传播。

## 参考文献

- [1] Legrand, J., Grais, R.F., Boelle, P.Y., Valleron, A.J. and Flahault, A. (2007) Understanding the Dynamics of Ebola Epidemics. *Epidemiology and Infection*, **135**, 610-621. <https://doi.org/10.1017/s0950268806007217>
- [2] Feng, Z., Zheng, Y., Hernandez-Ceron, N., Zhao, H., Glasser, J.W. and Hill, A.N. (2016) Mathematical Models of Ebola—Consequences of Underlying Assumptions. *Mathematical Biosciences*, **277**, 89-107. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2016.04.002>
- [3] Wang, X., Shi, Y., Feng, Z. and Cui, J. (2017) Evaluations of Interventions Using Mathematical Models with Exponential and Non-Exponential Distributions for Disease Stages: The Case of Ebola. *Bulletin of Mathematical Biology*, **79**, 2149-2173. <https://doi.org/10.1007/s11538-017-0324-z>
- [4] Tadmon, C. and Kengne, J.N. (2022) Mathematical Analysis of a Model of Ebola Disease with Control Measures. *International Journal of Biomathematics*, **15**, Article ID: 2500486. <https://doi.org/10.1142/s1793524522500486>
- [5] Ouemba TassÉ, A.J., Tsanou, B., Lubuma, J., Woukeng, J.L. and Signing, F. (2022) Ebola Virus Disease Dynamics with Some Preventive Measures: A Case Study of the 2018-2020 Kivu Outbreak. *Journal of Biological Systems*, **30**, 113-148. <https://doi.org/10.1142/s0218339022500048>
- [6] Djiomba Njankou, S.D. and Nyabadza, F. (2022) Modelling the Role of Human Behaviour in Ebola Virus Disease (EVD) Transmission Dynamics. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **2022**, Article ID: 4150043. <https://doi.org/10.1155/2022/4150043>
- [7] Agbomola, J.O. and Loyinmi, A.C. (2022) Modelling the Impact of Some Control Strategies on the Transmission Dynamics of Ebola Virus in Human-Bat Population: An Optimal Control Analysis. *Heliyon*, **8**, e12121.
- [8] Seck, R., Ngom, D., Ivorra, B. and Ramos, Á.M. (2022) An Optimal Control Model to Design Strategies for Reducing the Spread of the Ebola Virus Disease. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **19**, 1746-1774. <https://doi.org/10.3934/mbe.2022082>
- [9] Zhao, J., Wang, L. and Han, Z. (2020) Stability Analysis of Two New SIRS Models with Two Viruses. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**, 2026-2035. <https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1364369>
- [10] Liu, Z. and Tian, C. (2023) A Weighted Networked SIRS Epidemic Model. *Journal of Differential Equations*, **269**, 10995-11019. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.07.038>
- [11] Xiang, L., Zhang, Y. and Huang, J. (2020) Stability Analysis of a Discrete SIRS Epidemic Model with Vaccination. *Journal of Difference Equations and Applications*, **26**, 309-327. <https://doi.org/10.1080/10236198.2020.1725497>
- [12] Wang, X., Li, J., Guo, S. and Liu, M. (2023) Dynamic Analysis of an Ebola Epidemic Model Incorporating Limited Medical Resources and Immunity Loss. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 4229-4242. <https://doi.org/10.1007/s12190-023-01923-2>
- [13] Wang, W. and Ruan, S. (2004) Bifurcations in an Epidemic Model with Constant Removal Rate of the Infectives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **291**, 775-793. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.11.043>
- [14] Wang, W. (2006) Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment. *Mathematical Biosciences*, **201**, 58-71. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2005.12.022>
- [15] Rattanakul, C. and Chaiya, I. (2024) A Mathematical Model for Predicting and Controlling COVID-19 Transmission with Impulsive Vaccination. *AIMS Mathematics*, **9**, 6281-6304. <https://doi.org/10.3934/math.2024306>
- [16] Upadhyay, R.K., Pal, A.K., Kumari, S. and Roy, P. (2019) Dynamics of an SEIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence and Treatment Rates. *Nonlinear Dynamics*, **96**, 2351-2368. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04926-6>
- [17] Zhou, T., Zhang, W. and Lu, Q. (2014) Bifurcation Analysis of an SIS Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Saturated Treatment Function. *Applied Mathematics and Computation*, **226**, 288-305. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.020>
- [18] Hu, Z., Bi, P., Ma, W. and Ruan, S. (2011) Bifurcations of an SIRS Epidemic Model with Nonlinear incidence Rate. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **16**, 93-112. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2011.15.93>
- [19] Zhang, X. and Liu, X. (2008) Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 433-443. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.07.042>
- [20] Gupta, R.P. and Kumar, A. (2022) Endemic Bubble and Multiple Cusps Generated by Saturated Treatment of an SIR Model through Hopf and Bogdanov-Takens Bifurcations. *Mathematics and Computers in Simulation*, **197**, 1-21. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.01.025>
- [21] Shan, C. and Zhu, H. (2014) Bifurcations and Complex Dynamics of an SIR Model with the Impact of the Number of

- 
- Hospital Beds. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1662-1688. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.030>
- [22] Li, G. and Zhang, Y. (2017) Dynamic Behaviors of a Modified SIR Model in Epidemic Diseases Using Nonlinear Incidence and Recovery Rates. *PLOS ONE*, **12**, e0175789. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175789>
- [23] Jia, C., Wang, X. and Chen, Y. (2025) Complex Dynamics of an SIHR Epidemic Model with Variable Hospitalization Rate Depending on Unoccupied Hospital Beds. *Mathematics and Computers in Simulation*, **229**, 706-724. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2024.10.023>
- [24] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6)
- [25] Castillo-Chavez, C. and Song, B. (2004) Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **1**, 361-404. <https://doi.org/10.3934/mbe.2004.1.361>
- [26] Taylor, R. (1990) Interpretation of the Correlation Coefficient: A Basic Review. *Journal of Diagnostic Medical Sonography*, **6**, 35-39. <https://doi.org/10.1177/875647939000600106>
- [27] Blower, S.M., Hartel, D., Dowlatabadi, H., Anderson, R.M. and May, R.M. (1991) Drugs, Sex and HIV: A Mathematical Model for New York City. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, **331**, 171-187. <https://doi.org/10.1098/rstb.1991.0006>