

染色缺陷数较小的非平凡Snark图的部分规范6-边染色

毕徐府

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月10日

摘要

三正则图的边染色问题是图论领域的核心研究课题之一, 无桥三正则图作为其中的重要图类, 其边染色性质与Petersen着色猜想、Berge-Fulkerson猜想等经典图论猜想密切相关。根据Vizing定理, 三正则图的边色数仅为3或4, 非3边可染的无桥三正则图被称为snark图, 这类图的规范边染色上界研究是该领域的难点。在三正则图的正常边着色中, 若与边 e 的一个端点相关联的五条边所使用的颜色集合的基数为3或5, 则称边 e 为规范边。三正则图的规范 k -边着色, 是指使用 k 种颜色对三正则图进行的边着色, 且图中任意边均为规范边。我们用规范染色指数 $\chi'_N(G)$ 表示使得图 G 存在规范 k -边着色的最小正整数 k 。现有研究已证明无桥三正则图规范染色指数不超过7, 且学者们提出了规范染色指数不超过6的猜想, 同时得到了部分规范6-边染色下规范边的比例下界, 但关于6-边着色下非规范边的精准上界、圈核结构与染色缺陷数对染色结果的影响仍缺乏系统研究。本文以无桥三正则图为研究对象, 围绕其部分规范6-边着色问题展开深入探究, 以核、1-因子等图论概念为基础, 通过构造主染色并逐步延拓至整个图的方式, 分情况讨论了不同圈核结构的无桥三正则图的6-边着色策略。研究了染色缺陷数小于等于5的非平凡snark图, 并证明了存在规范6-边染色, 使得最多只有一条非规范边。

关键词

规范6-边染色, 三正则图, 染色缺陷数, 核

Partial Normal 6-Edge-Coloring of Non-Trivial Snarks with Small Coloring Defect Number

Xufu Bi

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

The edge-coloring problem of cubic graphs is one of the core research topics in graph theory. As an important class of graphs, bridgeless cubic graphs have edge-coloring properties closely related to classic graph theory conjectures such as the Petersen Coloring Conjecture and the Berge-Fulkerson Conjecture. According to Vizing's Theorem, the edge chromatic number of a cubic graph is either 3 or 4. A bridgeless cubic graph that is not 3-edge-colorable is called a snark, and the research on the upper bound of the normal edge-coloring of such graphs is a difficult point in this field. In a proper edge-coloring of a cubic graph, an edge e is said to be normal if the cardinality of the color set used for the five edges incident to one endpoint of e is 3 or 5. A normal k -edge-coloring of a cubic graph refers to an edge-coloring of the cubic graph using k colors, where every edge in the graph is normal. We use the normal chromatic index $\chi'_N(G)$ to denote the smallest positive integer k for which a normal k -edge-coloring of graph G exists. Existing studies have proven that the normal chromatic index of any bridgeless cubic graph is at most 7. Scholars have proposed the conjecture that the normal chromatic index is at most 6, and have obtained the lower bound of the proportion of normal edges under partial normal 6-edge-coloring. However, there is still a lack of systematic research on the precise upper bound of non-normal edges under 6-edge-coloring, and the influence of cycle core structures and coloring defect numbers on coloring results. Taking bridgeless cubic graphs as the research object, this paper conducts an in-depth study on the problem of their partial normal 6-edge-coloring. Based on graph theory concepts such as cores and 1-factors, we discuss the 6-edge-coloring strategies of bridgeless cubic graphs with different cycle core structures by cases, through the method of constructing a main coloring and extending it to the entire graph step by step. We study non-trivial snarks with a coloring defect number of at most 5, and prove that there exists a proper 6-edge-coloring such that there is at most one abnormal edge.

Keywords

Normal 6-Edge-Coloring, Cubic Graph, Coloring Defect Number, Core

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 绪论

1.1. 基本概念

本节将介绍本文涉及的图论基本概念。

一个图 G 由两个有限集合构成，分别是顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ ，记为 $G = (V(G), E(G))$ 。其中，顶点集 $V(G)$ 中的元素称为顶点，代表图中的基本对象；边集 $E(G)$ 中的元素称为边，每条边对应一对顶点，记为 $e = uv$ ，表示顶点 u 与顶点 v 之间存在关联关系。若边 $e = uv \in E(G)$ ，则称顶点 u 、 v 与边 e 相互关联；若两个顶点与同一条边关联，则称这两个顶点相邻；若两条边共享一个顶点，则称这两条边相邻。若图 G 中任意两个不同顶点之间至多存在一条边，且不存在单个顶点为两端点的边，则称图 G 是简单图。

若图 H 满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$ ，则称 H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$ 。若子图 H 满足“对任意 $u, v \in V(H)$ ，若 $uv \in E(G)$ 则 $uv \in E(H)$ ”，则称 H 为 G 的导出子图，记为 $H = G[V(H)]$ 。对任意

顶点 $v \in V(G)$, 与 v 关联的边的数量称为 v 的度数, 记为 $\deg G(v)$ (简记为 $\deg(v)$)。若图 G 中所有顶点的度数均相等, 则称 G 为正则图。若所有顶点的度数均为 k , 则称 G 为 k -正则图。本文的核心研究对象三正则图即每个顶点的度数都为 3 的图。

设 $G = (V(G), E(G))$ 为至少包含一个圈的连通图。若存在边子集 $S \subseteq E(G)$, 使得删除 S 后得到的图 $G-S$ 不含圈且至少有两个连通分支, 则称 S 为图 G 的一个循环边割集。 k 称为图 G 的循环边连通度, 其中 $k = \min\{|S| \mid S \subseteq E(G), G-S \text{ 无圈且不连通}\}$ 。

图 G 中边集 $M \subseteq E(G)$, 若 M 中任意两条边均不相邻, 则称 M 为 G 的一个匹配。若匹配 M 满足“每个顶点 $v \in V(G)$ 均与 M 中一条边关联”, 则称 M 为 G 的完美匹配, 也为 1-因子。

若 C 是 G 中的一个圈, 则 $\langle C \rangle$ 表示所有不在 C 上但至少有一个端点在 C 上的边构成的集合。类似地, 若 P 是 G 中以 x, y 为端点的路, 则 $\langle P \rangle$ 表示所有不在 P 上, 但至少有一个端点在 $P-x-y$ 上的边构成的集合。

设 $C = 1, 2, \dots, k$ 为颜色集合, 若映射 $\phi: E(G) \rightarrow C$ 满足“对任意相邻的边 $e_1, e_2 \in E(G)$, 有 $\phi(e_1) \neq \phi(e_2)$ ”, 则称 ϕ 为 G 的一个正常边着色, 也称为真边着色。若颜色集合大小为 k , 则称 ϕ 为 k -边着色。

1.2. 三正则图规范染色的研究背景及现状

三正则图作为每个顶点度数均为 3 的简单图, 是图论中重要的图类之一, 其边染色问题是组合数学与图论交叉领域的核心课题。1891 年, Petersen [1] 证明了任意一个无桥三正则图存在完美匹配, 为三正则图的研究奠定了基础。1972 年, Fulkerson [2] 在此基础上提出了猜想:

猜想 1.1 (Fulkerson 猜想)。任意一个无桥三正则图, 都可以找到六个完美匹配恰好覆盖每条边两次。

1979 年, 文献[3]中提到了 Berge 猜想:

猜想 1.2 (Berge 猜想)。任意一个无桥图, 存在五个偶子图, 覆盖任意一条边恰好两次。

Celmins [4] 和 Preissmann [5] 提到了 5-圈双覆盖猜想:

猜想 1.3 (5-圈双覆盖猜想)。任意一个无桥三正则图 G , 存在 5-圈双覆盖。

根据 Vizing 定理[6], 任意简单图的边色数要么等于其最大度数 Δ (第一类图), 要么等于 $\Delta + 1$ (第二类图), 这意味着三正则图的边色数仅可能为 3 或 4。然而, 并非所有三正则图都能被 3 边染色, 这类非 3 边可染的无桥三正则图称为 snark ([7], [8]), 是本文的重要研究对象。三正则图的任意三个完美匹配构成的集合无法覆盖的边的最小数量为染色缺陷数, 可用于衡量 snark 与 3-边可染图的接近程度。

给定两个三正则图 G 与 H , 若映射 $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$ 满足: G 中任意三条两两相邻的边, 经由 ϕ 映射后仍为 H 中三条两两相邻的边, 则称 ϕ 为图 G 的 H -染色。当 H 为 Peterson 图时, 该映射 ϕ 被称为 Peterson 染色。在三正则图的正常边着色中, 若与边 e 的一个端点相关联的五条边所使用的颜色集合的基数为 3 时, 称为贫边, 基数为 5 时, 称为富边, 贫边与富边都称为规范边。三正则图的规范 k -边着色, 是指使用 k 种颜色对三正则图进行的边着色, 且图中任意边均为规范边。我们用规范染色指数 $\chi'_n(G)$ 表示使得图 G 存在规范 k -边着色的最小正整数 k 。

1988 年, Jaeger [9] 提出了下述猜想, 该猜想可同时蕴含 Berge-Fulkerson 猜想与 5-圈双覆盖猜想(见文献[10]-[12])。

猜想 1.4 (Petersen 着色猜想)。每个无桥三正则图都存在 Petersen 染色。

在文献[11]中 Jaeger 提出了 Petersen 着色猜想的一个等价表述。他证明了:

定理 1.5. Petersen 着色猜想可等价表述为, 每个无桥三正则图的规范染色指数均不超过 5。

2. 染色缺陷数较小的 Snark 图的部分规范 6-边染色

2.1. 预备知识

三正则图中的诸多重要结构，如 Berge 覆盖、Fulkerson 覆盖等，均可利用满足特定附加条件的完美匹配集合或序列来刻画。本文将这类序列称为完美匹配阵列。具体而言，三正则图 G 中的完美匹配 k -阵列(简称为 G 的 k -阵列)，指的是由 G 的 k 个未必互不相同的完美匹配构成的任意集合

$M = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ 。特别地， G 的 Berge 覆盖是一个 5-阵列 B ，满足 G 的每条边均属于 B 中的某个完美匹配； G 的 Fulkerson 覆盖是一个 6-阵列 F ，满足 G 的每条边恰好属于 F 中的两个完美匹配。本文研究可通过 $k = 3$ 的完美匹配 k -阵列刻画图性质。由于每一种正常 3-边着色均可诱导出以三个色类为元素的阵列，因此 3-阵列可被视为正常 3-边着色的近似形式。若三正则图 G 的某条边属于阵列

$M = \{M_1, M_2, M_3\}$ 中的至少一个完美匹配，则称该边被覆盖；若某条边分别属于 M 中的 0 个、1 个、2 个或 3 个不同的完美匹配，则依次称其为未覆盖边、单重覆盖边、双重覆盖边或三重覆盖边。对于三正则图 G 的一个 3-阵列 M ，我们将留下未覆盖边数量最少的 3-阵列称为最优 3-阵列。最优 3-阵列所留下的未覆盖边的最小数量，称为 G 的染色缺陷数，记为 $df(G)$ 。

与 3-阵列相关的另一重要结构是它的核。三正则图 G 的 3-阵列 $M = \{M_1, M_2, M_3\}$ 的核是由 G 中所有非单重覆盖的边所导出的子图，记为 $\text{core}(M)$ 。若 M 为最优 3-阵列，则称其对应的核为最优核。因此，核 $\text{core}(M)$ 的边集与 $E_0(M) \cup E_{23}(M)$ 相等，其中 $E_0(M)$ 和 $E_{23}(M)$ 分别表示关于 M 的所有未覆盖边的集合，以及所有双重覆盖边与三重覆盖边的集合。若 $|E_0(M)| = k$ ，则称 $\text{core}(M)$ 为一个 k -核。值得指出的是，若三正则图 G 是 3-边可着色的，且 M 由三个不交的完美匹配构成，则 $\text{core}(M)$ 为空集。若 G 不是 3-边可着色的，则其任意核均非空。

引理 2.1 设 $M = \{M_1, M_2, M_3\}$ 为图 G 的任意一个完美匹配 3-阵列，则下述结论成立：

(i) 核 $\text{core}(M)$ 的每个连通分支，要么是由双重覆盖边与未覆盖边交替构成的偶圈，要么是一个三正则图的细分图。此外， $\text{core}(M)$ 是若干不交圈的集合当且仅当 G 中不存在三重覆盖边。

(ii) 核 $\text{core}(M)$ 的每个 2-度顶点均关联一条双重覆盖边与一条未覆盖边，而每个 3-度顶点均关联一条三重覆盖边与两条未覆盖边。

(iii) $E_{23}(M)$ 是核 $\text{core}(M)$ 的一个完美匹配，有 $|E_0(M)| = |E_2(M)| + 2|E_3(M)|$ 。

(iv) $G - E_0(M)$ 是 3-边可染色的。

(v) 若 M 为最优 3-阵列，则核 $\text{core}(M)$ 的每个连通分支均为简单图，且为长度至少是 6 的偶圈或者是三正则图的细分图。

证明。设 $H = \text{core}(M)$ 。我们说明 H 的每个顶点的度数至少为 2。事实上，若 G 的顶点 v 关联一条三重覆盖边，则与 v 关联的另外两条边均为未覆盖边。此时， v 在 H 中的度数为 3。若 v 关联一条双重覆盖边，则剩余边中恰有一条为单重覆盖边，另一条为未覆盖边。因此 v 在 H 中的度数为 2。若与 v 关联的三条边均为单重覆盖边，则 v 不属于 H 。由此可知， H 中的每个顶点度数至少为 2，且边集 $E_{23}(M)$ 在 H 中构成一个完美匹配。结论(i)~(iii)即可直接推出。

为证明(iv)，对 G 中所有属于 M_i 的单重覆盖边赋予颜色 i 。若 G 的一条边为双重覆盖边，则其两个端点在 G 中均关联一条未覆盖边与一条单重覆盖边。由此可知，我们可使用集合 $\{1, 2, 3\}$ 中不出现在其相邻单重覆盖边上的颜色 c 为该边染色。最后，若 G 的一条边为三重覆盖边，则其两个端点均关联两条未覆盖边。因此我们可使用 $\{1, 2, 3\}$ 中的任意一种颜色为该边着色。显然，通过这种方式我们即可得到 $G - E_0(M)$ 的一个 3-边染色。

为证明(v)，只需说明最优 3-阵列的核中不可能出现重边(2-圈)或 4-圈作为连通分支即可。若核 $\text{core}(M)$

中包含一个 4-圈 $Q=(e_0e_1e_2e_3)$ ，则 Q 中有两条边为未覆盖边，不妨设为 e_0 与 e_2 ，另外两条边为双重覆盖边。显然，三个完美匹配中存在一个同时覆盖 e_1 与 e_3 。不失一般性，可设该完美匹配为 M_1 。此时特征着色 ϕ 满足 $\phi(e_1)=1i$ 且 $\phi(e_3)=1j$ ，其中 $i, j \in \{2,3\}$ 。我们可将 ϕ 修改为 ϕ' ，令 $\phi'(e_0)=1$ ， $\phi'(e_2)=1$ ， $\phi'(e_1)=i$ ， $\phi'(e_3)=j$ ，其余边保持 $\phi'(e)=\phi(e)$ 不变。然而， ϕ' 对应一个未覆盖边更少的 3-阵列，这与 M 的极小性矛盾。这就证明了 $\text{core}(M)$ 中不包含四边形。同理可证明 $\text{core}(M)$ 中不包含重边。

2.2. 染色缺陷数较小的 Snark 的部分规范 6-边染色

Snark 图的非平凡性问题已在诸多文献中被广泛探讨[13]。对于 snark 图 G 的一个顶点集或导出子图 H ，若子图 $G-V(H)$ 是可着色的，则称 H 为不可移除的；反之，称 H 为可移除的。若 snark 图 G 中任意一对互异的相邻顶点构成的点集均为不可移除的，则该 snark 图为临界 snark 图。若某一 snark 图中任意一对互异顶点构成的点集均为不可移除的，则称其为双临界 snark 图。若 snark 图 G 中每个至少包含两个顶点的导出子图均为不可移除的，则称该 snark 图为不可约 snark 图。现已证明，一个 snark 图为不可约 snark 图当且仅当它是双临界 snark 图[8]。文献[13]中计算了所有循环 4-边连通、围长至少为 5 且阶不超过 36 的 snark 的染色缺陷。所分析的 snark 中绝大部分(实际占比约 99.999089%)的染色缺陷数为 3；所有顶点数不超过 36 的非平凡 snark 图，其染色缺陷数均在集合 $\{3, 4, 5, 6\}$ 中取值。

2.3. 较小染色缺陷数的非平凡 Snark 图的部分规范 6-边染色

本章研究这类染色缺陷数较小的非平凡 snark 图在 6-边染色下，规范边数量的上界。证明以下定理：
定理 2.2 染色缺陷数小于等于 5 的非平凡 snark 图，存在规范 6-边染色，使得最多只有一条异常边。
证明。

图 G 的染色缺陷数至少为 3，接下来我们证明图 G 在染色缺陷数为 3, 4, 5 的情况下，都存在规范 6-边染色，使得最多只有一条异常边。

断言 2.3 染色缺陷数为 3 的非平凡 snark 图 G ，存在规范 6-边染色，使得最多只有一条异常边。
证明。

图 G 的核是一个 6-圈，记为 $C = x_1e_1x_2e_2 \cdots x_6e_6 (e_i \in E_2)$ 。记 $\langle C \rangle$ 上与 x_i 相邻的边为 f_i 。如图 1 所示，不妨设 $\phi(f_1)=\phi(f_2)=1$ ， $\phi(f_3)=\phi(f_4)=2$ ， $\phi(f_5)=\phi(f_6)=3$ 。在圈上用 $\{4, 5, 6\}$ 染色， $\phi(e_2)=\phi(e_4)=\phi(e_6)=4$ ， $\phi(e_1)=\phi(e_5)=5$ ， $\phi(e_3)=6$ 。在该染色下， $\langle C \rangle$ 上的边均为富边(规范边)，在图 G 上只有 e_6 是非规范边。

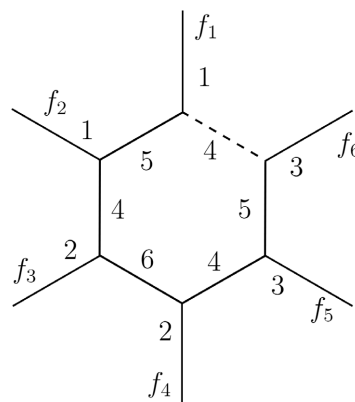


Figure 1. 6-edge-coloring of the core of graph G , where the dashed edges are abnormal edges
图 1. 图 G 核上的 6-边染色，其中虚线边为非规范边

断言 2.4 染色缺陷数为 4 的非平凡 snark 图 G ，存在规范 6-边染色，使得最多只有一条异常边。
证明。

图 G 是非平凡的 snark 图，故图 G 是循环 4-边连通的，图 G 中不含 3-圈，图 G 的核是一个 8-圈，记为 $C = x_1e_1x_2e_2 \cdots x_8e_8 (e_i \in E_2)$ 。记 $\langle C \rangle$ 上与 x_i 相邻的边为 f_i 。且主染色在 $\langle C \rangle$ 出现颜色 $\{1, 2, 3\}$ 。不妨设 $\phi(f_1) = \phi(f_2) = 1$ ，接下来讨论 f_3 边的染色情况。如图 2 所示，若 $\phi(f_3) = \phi(f_2)$ ，不妨设 $\phi(f_5) = \phi(f_6) = 2$ ， $\phi(f_7) = \phi(f_8) = 3$ 。在圈上用 $\{4, 5, 6\}$ 染色， $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = 4$ ， $\phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_7) = 5$ ， $\phi(e_5) = 6$ 。在该染色下， $\langle C \rangle$ 上染色相同的边，在圈上与相同的颜色相邻，故， $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边，在图 G 上只有 e_8 是非规范边。

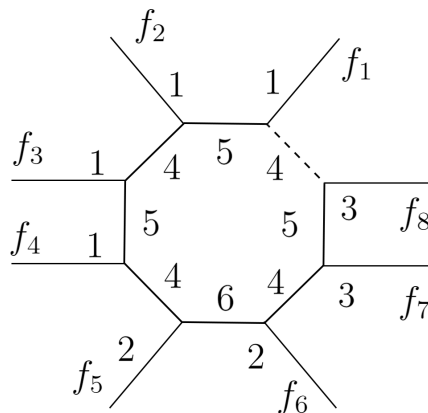


Figure 2. A 6-edge-coloring of the core of graph G when $\phi(f_3) = \phi(f_2)$, where the dashed edges are abnormal edges

图 2. $\phi(f_3) = \phi(f_2)$ 时，图 G 核上的 6-边染色，其中虚线边为非规范边

若 $\phi(f_3) \neq \phi(f_2)$ ，如图 3 所示，不妨设 $\phi(f_3) = \phi(f_4) = 2$ ， $\phi(f_5) = \phi(f_6) = 1$ ， $\phi(f_7) = \phi(f_8) = 3$ 。在圈上用 $\{4, 5, 6\}$ 染色， $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = 4$ ， $\phi(e_1) = \phi(e_5) = 5$ ， $\phi(e_3) = \phi(e_7) = 6$ 。在该染色下， $\langle C \rangle$ 上染色相同的边，在圈上与相同的颜色组合相邻，故， $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边，在图 G 上没有非规范边。

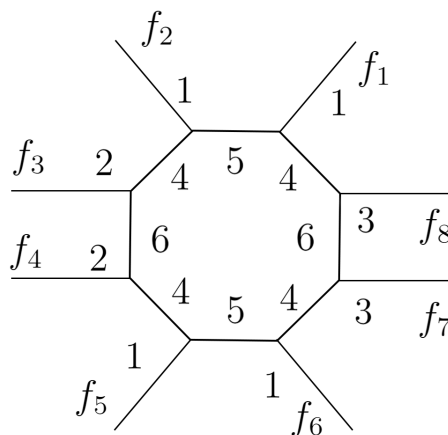


Figure 3. The 6-edge-coloring of the core of graph G under the condition that $\phi(f_3) \neq \phi(f_2)$

图 3. $\phi(f_3) \neq \phi(f_2)$ 时，图 G 核上的 6-边染色

断言 2.5 染色缺陷数为 5 的非平凡 snark 图 G , 存在规范 6-边染色, 使得最多只有一条异常边。
证明。

图 G 是非平凡的 snark 图, 故图 G 是循环 4-边连通的, 图 G 中不含 3-圈, 图 G 的核是一个 10-圈, 记为 $C = x_1e_1x_2e_2 \cdots x_{10}e_{10} (e_i \in E_2)$ 。记 $\langle C \rangle$ 上与 x_i 相邻的边为 f_i 。且主染色在 $\langle C \rangle$ 出现颜色 $\{1, 2, 3\}$ 。由于每个颜色 $\{1, 2, 3\}$ 都要在 $\langle C \rangle$ 出现, 否则可以通过颜色置换使得图 G 是 3-边可染的, 故在 $\langle C \rangle$ 上至多有 6 条边染相同的颜色, 且至少有 4 条边染相同的颜色。接下来我们讨论 $\langle C \rangle$ 上的颜色情况, 不妨设有 2 两条边染颜色 3, 其余边都染颜色 1 或 2。

情况 1: $\langle C \rangle$ 上有 6 条边染颜色 1。如图 4 所示, 若这 6 条边都相邻, 不妨设

$\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_3) = \phi(f_4) = \phi(f_5) = \phi(f_6) = 1, \phi(f_7) = \phi(f_8) = 2, \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 3$ 。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4, \phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_5) = \phi(e_9) = 5, \phi(e_7) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_{10} 是非规范边; 若这 6 条边不全相邻, 不妨设 $\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_3) = \phi(f_4) = \phi(f_7) = \phi(f_8) = 1, \phi(f_5) = \phi(f_6) = 2, \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 3$ 。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4, \phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_7) = 5, \phi(e_5) = \phi(e_9) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上没有非规范边。

情况 2: $\langle C \rangle$ 上有 4 条边染颜色 1, 则有 4 条边染颜色 2。

情况 A: $\langle C \rangle$ 上有连续 4 条边颜色相同。如图 5 所示, 当染颜色 1 的边相邻, 染颜色 2 的边相邻时, 不妨设 $\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_3) = \phi(f_4) = 1, \phi(f_5) = \phi(f_6) = \phi(f_7) = \phi(f_8) = 2, \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 3$ 。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4, \phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_9) = 5, \phi(e_5) = \phi(e_7) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_{10} 是非规范边。

当染颜色 1 的边相邻, 染颜色 2 的边不全相邻, 不妨设 $\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_3) = \phi(f_4) = 1, \phi(f_5) = \phi(f_6) = \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 2, \phi(f_7) = \phi(f_8) = 3$ 。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4, \phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_7) = 5, \phi(e_5) = \phi(e_9) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上没有非规范边

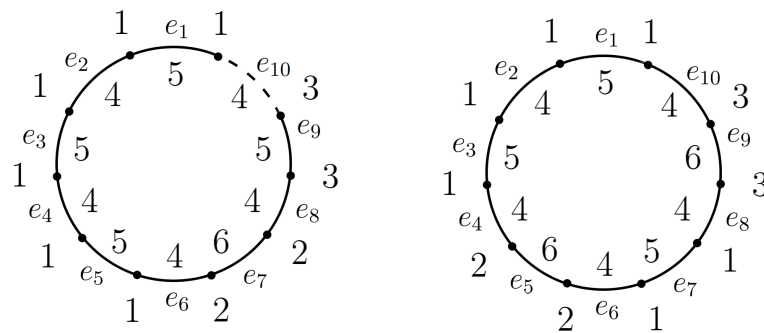


Figure 4. Two coloring schemes in Case 1, where the dashed edges are abnormal edges
图 4. 情况 1 中的两种染色方式, 其中虚线边为非规范边

情况 B: $\langle C \rangle$ 上没有连续 4 条边颜色相同。如图 6 所示, $\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_5) = \phi(f_6) = 1, \phi(f_3) = \phi(f_4) = \phi(f_7) = \phi(f_8) = 2, \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 3$ 时。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4, \phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_9) = 5, \phi(e_5) = \phi(e_7) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_{10} 是非规范边。

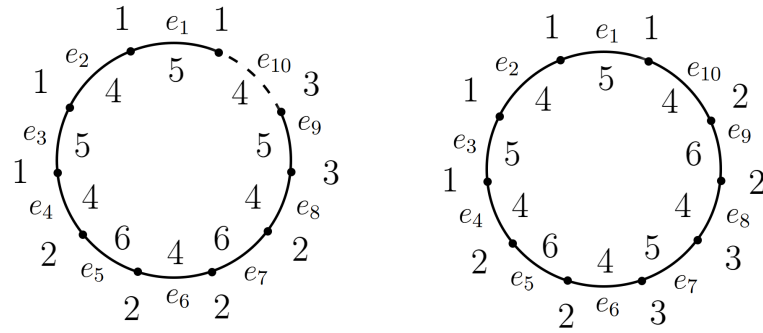


Figure 5. Two coloring schemes in Case A, where the dashed edges are abnormal edges
图 5. 情况 A 中的两种染色方式，其中虚线边为非规范边

$\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_7) = \phi(f_8) = 1$, $\phi(f_3) = \phi(f_4) = \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 2$, $\phi(f_5) = \phi(f_6) = 3$ 时。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4$, $\phi(e_1) = \phi(e_5) = \phi(e_7) = 5$, $\phi(e_3) = \phi(e_9) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_6 是非规范边。

$\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_5) = \phi(f_6) = 1$, $\phi(f_3) = \phi(f_4) = \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 2$, $\phi(f_7) = \phi(f_8) = 3$ 时。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4$, $\phi(e_3) = \phi(e_7) = \phi(e_9) = 5$, $\phi(e_1) = \phi(e_5) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_6 是非规范边。

$\phi(f_1) = \phi(f_2) = \phi(f_7) = \phi(f_8) = 1$, $\phi(f_5) = \phi(f_6) = \phi(f_9) = \phi(f_{10}) = 2$, $\phi(f_3) = \phi(f_8) = 4$ 时。染色, $\phi(e_2) = \phi(e_4) = \phi(e_6) = \phi(e_8) = \phi(e_{10}) = 4$, $\phi(e_1) = \phi(e_3) = \phi(e_7) = 5$, $\phi(e_5) = \phi(e_9) = 6$ 。在该染色下, $\langle C \rangle$ 上染色相同的边, 在圈上与相同的颜色组合相邻, 故, $\langle C \rangle$ 上的边为贫边或富边, 在图 G 上只有边 e_2 是非规范边。

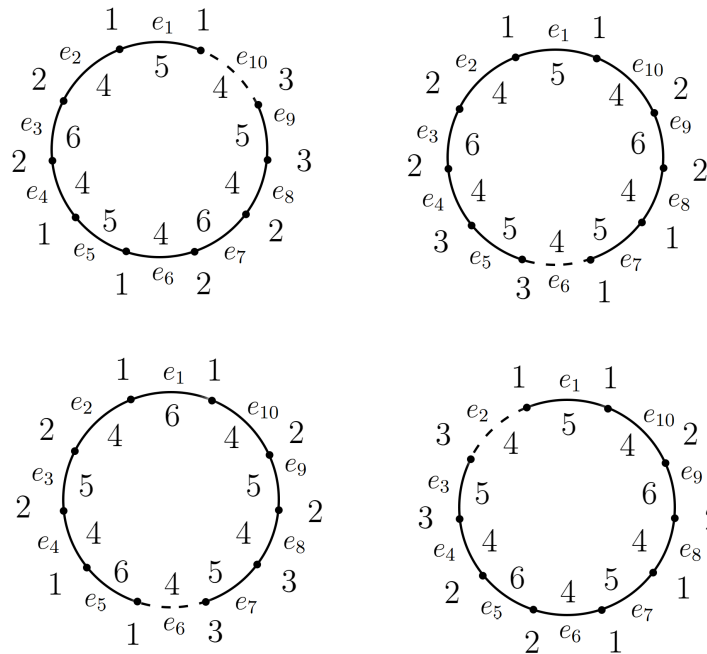


Figure 6. Four coloring schemes in Case B, where the dashed edges are abnormal edges
图 6. 情况 B 中的四种染色方式，其中虚线边为非规范边

综上, 染色缺陷数为 4 的非平凡 snark 图 G , 存在规范 6-边染色, 使得最多只有一条异常边。

参考文献

- [1] Petersen, J. (1891) Die Theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica*, **15**, 193-220. <https://doi.org/10.1007/bf02392606>
- [2] Fulkerson, D.R. (1972) Anti-Blocking Polyhedra. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **12**, 50-71. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(72\)90032-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90032-9)
- [3] Seymour, P.D. (1979) On Multi-Colourings of Cubic Graphs, and Conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 423-460. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.423>
- [4] Celmins, U.A. (1984) On Cubic Graphs That Do Not Have an Edge 3-Coloring. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo.
- [5] Preissmann, M. (1981) Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques. Ph.D. Thesis, Université de Grenoble.
- [6] Vizing, V.G. (1964) On an Estimate of the Chromatic Class of a p-Graph. *Diskretnyi Analiz*, **3**, 25-30.
- [7] Fiol, M.A., Mazzuocolo, G. and Steffen, E. (2018) Measures of Edge-Uncolorability of Cubic Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **25**, 35. <https://doi.org/10.37236/6848>
- [8] Nedela, R. and Škoviera, M. (1996) Decompositions and Reductions of Snarks. *Journal of Graph Theory*, **22**, 253-279. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0118\(199607\)22:3<253::aid-jgt6>3.0.co;2-l](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0118(199607)22:3<253::aid-jgt6>3.0.co;2-l)
- [9] Jaeger, F. (1988) Nowhere-Zero Flow Problems. In: Beineke, L.W. and Wilson, R.J., Eds., *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, 71-95.
- [10] Fulkerson, D.R. (1971) Blocking and Anti-Blocking Pairs of Polyhedra. *Mathematical Programming*, **1**, 168-194. <https://doi.org/10.1007/bf01584085>
- [11] Jaeger, F. (1985) On Five-Edge-Colorings of Cubic Graphs and Nowhere-Zero Flow Problems. *Ars Combinatoria*, **20**, 229-244.
- [12] Zhang, C.Q. (1997) Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol 205: Integer Flows and Cycle Covers of Graphs. Marcel Dekker, Inc., xii, 379.
- [13] Karabáš, J., Máčajová, E., Nedela, R. and Škoviera, M. (2024) Cubic Graphs with Colouring Defect 3. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **31**, 32. <https://doi.org/10.37236/12333>