Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 556-566
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154182

Hans汉斯

三维双孔介质圆柱气藏水平井渗流模型的解

夏虹霖，袁铭聪，李　伟*

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2026年3月21日；录用日期：2026年4月16日；发布日期：2026年4月22日

摘　要

本文针对三维双孔介质圆柱气藏水平井渗流模型，分两种情况建立数学模型：不考虑井筒储集和表皮因子；考虑井筒储集和表皮因子。在此基础上，综合运用**Laplace**变换、**Fourier**变换、**Duhamel**原理，并结合相似构造法，系统求解顶底四种边界条件(顶底定压、顶底封闭、顶部定压底部封闭、顶部封闭底部定压)下的模型，并获得了无因次井底压力在**Laplace**空间解的相似结构。结果清晰显示了三种外边界与四种顶底边界条件结合下解的表达式之间的联系。本文拓展了相似结构理论的应用范围，为深入研究三维双孔介质圆柱气藏水平井渗流规律，提供了新的方法。

关键词

三维圆柱水平井，气藏，相似结构，核函数

Solution to the Seepage Model of Horizontal Wells in Three-Dimensional Dual-Porosity Cylindrical Gas Reservoirs

Honglin Xia, Mingcong Yuan, Wei Li*

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: March 21, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 22, 2026

Abstract

In this paper, aiming at the seepage model of horizontal wells in three-dimensional dual-porosity cylindrical gas reservoirs, mathematical models are established for two cases, namely excluding wellbore storage and skin factor and including wellbore storage and skin factor. On this basis, the

*通讯作者。

文章引用: 夏虹霖, 袁铭聪, 李伟. 三维双孔介质圆柱气藏水平井渗流模型的解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 556-566. DOI: 10.12677/aam.2026.154182

Laplace transform, Fourier transform and Duhamel's principle are comprehensively applied, combined with the similar structure method, to systematically solve the models under four types of top and bottom boundary conditions (constant pressure at both top and bottom, closed boundary at both top and bottom, constant pressure at the top with closed bottom, and closed top with constant pressure at the bottom). Furthermore, the similar structure of the dimensionless bottom-hole pressure solutions in the Laplace space is derived. The results clearly reveal the correlations among the solution expressions under the combination of three types of outer boundary conditions and four types of top and bottom boundary conditions. This paper expands the application scope of the similar structure theory and provides a new method for the in-depth study on the seepage laws of horizontal wells in three-dimensional dual-porosity cylindrical gas reservoirs.

Keywords

3D Cylindrical Horizontal Well, Gas Reservoir, Similar Structure, Kernel Function

1. 引言

随着全球能源需求的持续攀升，非常规气藏的高效开发已成为石油天然气工业领域的研究热点与核心方向。双孔介质气藏作为典型的非常规气藏类型，其储层由基质孔隙与天然裂缝构成，气体需经历基质向裂缝的窜流及裂缝向井筒的渗流过程，渗流机制极具复杂性。水平井技术因具备增大储层接触面积、提升单井产量与采收率的显著优势，已成为双孔介质气藏开发的主流技术手段。国内外也有许多对双孔介质水平井模型的研究。1960 年，Barenblatt 和 Zheltov [1]针对双孔介质的特点，建立了在双重介质中弱可压缩液体不定常渗流的数学模型；1963 年，Warren 和 Root [2]假设流体在岩块到裂缝中因压力不同产生的窜流，提出了单层油藏双孔渗流的油藏模型。1981 年，栾志安[3]在国外石油工作者的基础上首次提出带窜流作用和表皮因子的双重介质渗流问题，并建立了考虑窜流作用和表皮因子的双重介质渗流数学模型。黄天坤[4]等针对双重介质页岩气藏，考虑气体解吸－扩散－渗流耦合机制，建立了水平井不稳定渗流模型，揭示了表观渗透率等参数对压力动态特征的影响规律；2013 年，杨济源[5]等针对双重介质气藏渗透率具有方向性的特点，在椭圆坐标系中建立气体渗流微分方程，通过数值计算马丢函数求解方程，得出不稳态产能表达式并绘制产能曲线，同时分析了表皮系数、各向异性、弹性储容比等参数对该曲线的影响。2018 年，张春光[6]等该研究建立了考虑启动压力梯度的双重介质致密分形气藏水平井非线性渗流模型，通过有限元法求解，发现分形非线性模型更贴合实际储层，研究结果为该类气藏试井参数解释和水平井井底压力动态特征评估提供依据。

2002 年，李顺初[7]针对分形双孔介质储层，为裂缝和岩块介质引入分形维数与分形指数，建立了考虑井筒储存、表皮效应的外边界无穷大变流率试井分析数学模型，对典型特例求得了无因次储层及井底压力的 Laplace 空间解并归纳出通用公式，还探讨了其应用，得出该解在特定条件下可还原传统双孔介质结论、实空间解可通过解析或 Stehfest 数值反演求得且通用公式便于试井分析软件编制的结论，该研究对分形油气藏试井分析和油藏数值模拟具有指导意义。2012 年，许丽[8]将分形几何引入双孔油藏球向渗流研究，提出相似构造法，推导渗流方程组并建立多边界条件下的渗流模型，经拉普拉斯变换结合该方法得到模型解的相似结构，拓展了相似结构理论应用，也为相关渗流规律研究提供新方法，还得

出该构造法可求解相关方程、解的结构利于油藏研究及模型可实现相关转化的结论。2023 年，杨雨[9]通过引入弹性边界条件，构建并求解了分形双孔油藏球向渗流模型，分析模型解的相似结构及参数影响，为油藏渗流研究提供了新视角与方法。

目前，针对双孔介质油气藏的渗流模型研究多集中于直井模型，而三维水平井由于其空间各向异性和多边界约束，解析求解过程极具挑战性。现有的求解手段如积分变换法、有限元法及特殊函数法，虽能求得特定边界条件下的解，但在处理“顶底边界(4 种)”与“外边界(3 种)”两两组合形成的 12 种复杂工况时，往往需要针对每种情况重复进行推导，导致数学表达形式割裂，不利于构建统一的数值反演算法及试井分析软件。尽管“相似构造法”已在分形双孔介质及球向渗流模型中展现出简化复杂边值问题的潜力，但尚未在考虑空间耦合的三维圆柱气藏水平井模型中得到应用。本文的理论价值在于：通过引入相似构造理论，将原本互为独立的 12 种物理边界条件下的压力解，统一映射到同一相似核函数的连分式结构中。这一方法解决了三维模型解表达式繁杂、难以统一表述的关键瓶颈，为三维复杂气藏的非稳态产能评价提供了更具通用性的解析架构。

2. 求解一类二阶线性齐次常微分方程边值问题解的相似结构法

讨论如下的一类二阶线性齐次常微分方程边值问题：

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+q(x)y=0 \\ \left[Ey+(1+EF)y'\right]_{x=a}=D \\ \left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 D,E,F,G,H,a,b 均为已知的实常数，且 $D\neq 0$，$G^2+H^2\neq 0$，$a<b$；已知函数 $P(x)\in C^1[a,b]$，$q(x)\in C^2[a,b]$

假设 $y_1(x),y_2(x)$ 是边值(2.1)式中的定解方程的两个线性无关的解，引入二元函数：

$$\varphi_{0,0}(\zeta,x)=y_1(\zeta)y_2(x)-y_2(\zeta)y_1(x) \tag{2.2}$$

并记：

$$\varphi_{1,0}(\zeta,x)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi_{0,0}(\zeta,x)=y_1'(\zeta)y_2(x)-y_2'(\zeta)y_1(x) \tag{2.3}$$

$$\varphi_{0,1}(\zeta,x)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}(\zeta,x)=y_1(\zeta)y_2'(x)-y_2(\zeta)y_1'(x) \tag{2.4}$$

$$\varphi_{1,1}(\zeta,x)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial\zeta}\varphi_{0,0}(\zeta,x)=y_1'(\zeta)y_2'(x)-y_2'(\zeta)y_1'(x) \tag{2.5}$$

以上定义的二元函数具有重要的作用，这里我们把它称为引解函数。

定理：若边值问题(2.1)有唯一解，则其解可以表示为如下连分式形式：

$$y(x)=D\cdot\frac{1}{E+\cfrac{1}{F+\phi(a)}}\cdot\frac{1}{F+\phi(a)}\cdot\phi(x) \tag{2.6}$$

其中 $\phi(x)$ 称为相似核函数具体式子如下：

$$\phi(x)=\frac{G\varphi_{0,0}(x,b)+H\varphi_{0,1}(x,b)}{G\varphi_{1,0}(a,b)+H\varphi_{1,1}(a,b)} \tag{2.7}$$

3. 三维双孔介质圆柱气藏水平井模型

3.1. 物理模型

(1) 储层为三维、等厚、水平层状介质，储层厚度、孔隙度、渗透率等物性参数在各自介质系统内均匀分布。

(2) 储层为 Warren-Root 型双孔介质，由裂缝系统与基质系统两套连续介质组成：裂缝系统为主要渗流通道，基质系统为主要储集空间；基质之间互不连通，流体仅由基质向裂缝发生窜流，不直接流入井筒。

(3) 通过引入拟压力函数，将具有强非线性的气体运动方程简化为形式上的微可压缩流体线性扩散方程。不考虑温度变化对气体物性及渗流规律的影响。

(4) 忽略重力、毛细管力的影响；裂缝与基质内气体流动均服从达西定律。

3.2. 运动方程

在三维双孔介质圆柱型气藏水平井模型中，裂缝系统和基质系统内的气体流动均服从达西定律(注：下标 1 表示裂缝，下标 2 表示基质)：

$$v_1 = -\frac{K_1}{\mu}\nabla P_1 \tag{3.1.1}$$

$$v_2 = -\frac{K_2}{\mu}\nabla P_2 \tag{3.1.2}$$

(3.1.1)式和(3.1.2)式中：K_1, K_2 分别为裂缝渗透率和基质渗透率，μ 为气体黏度。

3.3. 状态方程

岩石状态方程：

$$\phi_j = \phi_0 \mathrm{e}^{C_\phi\left(P_j - P_0\right)} \approx \phi_0\left[1 + C_\phi\left(P_j - P_0\right)\right], j = 1,2 \tag{3.3.1}$$

其中：ϕ_0 为大气压力 P_0 下岩石的孔隙度，C_ϕ 为岩石的压缩系数，MPa^{-1}。

气体状态方程：

$$\rho = \frac{MP}{RTZ} \tag{3.3.2}$$

$$\rho_j = \rho_0\left[1 + C_g\left(P_j - P_0\right)\right], j = 1,2 \tag{3.3.3}$$

其中：R 为通用气体常数 0.008314 $\mathrm{MPa \cdot m^3}$ (kmol·K)，T 为绝对温度，K；Z 为真实气体偏差因子。

3.4. 连续性方程

在地层中，任取一个无穷小单元体，根据质量守恒定律，可得裂缝基质和基岩介质中的连续方程为：

$$\nabla \cdot \left(\frac{K_1}{\mu}\nabla P_1\right) = \phi_1 C_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} + q_\lambda \tag{3.4.1}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{K_m}{\mu}\nabla P_m\right) = \phi_m C_m \frac{\partial P_m}{\partial t} - q_\lambda \tag{3.4.2}$$

其中：q_λ 为基质向裂缝的窜流量，根据 Warren-Root 模型，窜流量可以表示为：

$$q_\lambda = \alpha \frac{K_2}{\mu}\left(P_2 - P_1\right) \tag{3.4.3}$$

3.5. 渗流微分方程及定解条件

联立运动方程、状态方程和连续性方程可得：三维双孔介质圆柱气藏水平井的基本渗流方程为：

$$\frac{K_1}{\mu}\nabla^2 P_1 = \phi_1 C_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} + \alpha \frac{K_2}{\mu}\left(P_1 - P_2\right) \tag{3.5.1}$$

$$\frac{K_2}{\mu}\nabla^2 P_2 = \phi_2 C_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha \frac{K_2}{\mu}\left(P_1 - P_2\right) \tag{3.5.2}$$

引入拟压力函数如下：

$$m_i\left(P_i\right) = 2\int_{P_0}^{P_i} \frac{P}{\mu Z} \mathrm{d}P \tag{3.5.3}$$

现将(3.5.3)式代入(3.5.1)式和(3.5.2)式中可得：

$$\nabla^2 m_1 = \frac{\phi_1 \mu C_1}{K_1}\frac{\partial m_1}{\partial t} + \alpha \frac{K_2}{K_1}\left(m_1 - m_2\right) \tag{3.5.4}$$

$$\nabla^2 m_2 = \frac{\phi_2 \mu C_2}{K_2}\frac{\partial m_2}{\partial t} - \alpha\left(m_1 - m_2\right) \tag{3.5.5}$$

初始条件：

$$m_i\big|_{t=0} = 0, i = 1, 2 \tag{3.5.6}$$

产量条件：

$$\left(r\frac{\partial m_1}{\partial r}\right)\bigg|_{r=r_w} = \frac{q_{sc}}{2\pi K_1 L}\cdot\frac{P_{sc}T}{T_{sc}}, 0 \le z \le h \tag{3.5.7}$$

外边界条件：

$$m_i\left(\infty, z, t\right) = 0, m_i\left(R_e, z, t\right) = 0, \frac{\partial m_i}{\partial r}\bigg|_{r=R_e} = 0 \tag{3.6.3}$$

3.6. 无因次数学模型

考虑井筒储集和表皮因子的三维双孔介质圆柱型气藏水平井的无因次数学模型如下：

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D \frac{\partial m_{1D}}{\partial r_D}\right) + \rho^2 \frac{\partial^2 m_{1D}}{\partial z_D^2} = \omega \frac{\partial m_{1D}}{\partial t_D} + \lambda\left(m_{1D} - m_{2D}\right) \tag{3.6.1}$$

$$\left(1-\omega\right)\frac{\partial m_{2D}}{\partial t_D} = \lambda\left(m_{1D} - m_{2D}\right) \tag{3.6.2}$$

$$m_{1D}\big|_{t_D=0} = m_{2D}\big|_{t_D=0} = 0 \tag{3.6.3}$$

$$\frac{\partial m_{1D}}{\partial r_D}\bigg|_{r_D=1} = \frac{\pi}{2} q_{1D} \tag{3.6.4}$$

$$m_{1D}\big|_{r_D\to\infty} = m_{2D}\big|_{r_D\to\infty} = 0\text{，}\quad m_{1D}\big|_{r_D=R_D} = m_{2D}\big|_{r_D=R_D} = 0\text{，}\quad \frac{\partial m_{1D}}{\partial r_D}\bigg|_{r_D=R_D} = \frac{\partial m_{2D}}{\partial r_D}\bigg|_{r_D=R_D} = 0 \tag{3.6.5}$$

$$\left.\frac{\partial m_{1D}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,1}=\left.\frac{\partial m_{2D}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,1}=0\ \text{或}\ m_{1D}\big|_{z_D=0,1}=m_{2D}\big|_{z_D=0,1}=0 \tag{3.6.6}$$

$$\begin{cases} C_D\dfrac{\partial m_{1wD}}{\partial t_D}+q_{1D}=1 \\ m_{1wD}=m_{1wD}^{*}+Sq_{1D} \end{cases} \tag{3.6.7}$$

仅考虑垂向变化忽略径向影响：

$$m_{1wD}^{*}=\frac{1}{z_{2D}-z_{1D}}\int_{z_{1D}}^{z_{2D}}m_{1wD}\left(r_D,z_D,t_D\right)\mathrm{d}z_D \tag{3.6.8}$$

引入无量纲量如下：

$$m_{iD}=\frac{2\pi k_1L}{q_{sc}\mu Z}\left(m_1-m_0\right),\quad \rho=\sqrt{\frac{K_{1v}}{K_{1h}}}\frac{r_w}{h},\quad \omega=\frac{\phi_1C_{t1}}{\phi_1C_{t1}+\phi_2C_{t2}},$$

$$\lambda=\frac{\alpha r_w^2}{K_1+K_2}K_2,\quad t_D=\frac{3.6\times10^{-3}K_{1h}t}{\mu\left(\phi C\right)_t r_w^2};\quad q_{1D}=\frac{2\pi r_wLq_1}{q_{sc}},\quad z_D=\frac{z}{h},\quad r_D=\frac{r}{r_w}$$

式中：m_{iD} 为无量纲拟压力，m_0 为原始地层拟压力，q_{sc} 为标准状态下产量，μ 为气体黏度，Z 为气体偏差因子，k_1 为裂缝渗透率，L 为水平井长度；ρ 为各向异性系数，$\rho=\sqrt{\frac{K_{1v}}{K_{1h}}}\frac{r_w}{h}$，$K_{1v}$ 为裂缝垂向渗透率，r_w 井筒半径，h 为井的高度；ω 为弹性储容比 $\omega=\frac{\phi_1C_{t1}}{\phi_1C_{t1}+\phi_2C_{t2}}$，$\phi_1$ 为裂缝孔隙度，ϕ_2 基质孔隙度，C_{t1} 为裂缝综合压缩系数，C_{t2} 为基质综合压缩系数；λ 为双孔介质系统窜流系数，$\lambda=\frac{\alpha r_w^2}{K_1+K_2}K_2$，$\alpha$ 为窜流因子；t_D 为无量纲时间，$t_D=\frac{3.6\times10^{-3}K_{1h}t}{\mu\left(\phi C\right)_t r_w^2}$；$q_{fD}$ 为无量纲井壁速度，$q_{1D}=\frac{2\pi r_wLq_1}{q_{sc}}$，$q_1$ 为井壁速度；z_D 为无因次垂向坐标，$z_D=\frac{z}{h}$，z 为垂向高度；

3.7. 模型求解

不考虑井储和表皮的影响，对(3.6.1)式~(3.6.6)式中的 t_D 做 Laplace 变换如下：

$$\frac{\partial^2\bar{m}_{1D}}{\partial r_D^2}+\frac{1}{r_D}\frac{\partial\bar{m}_{1D}}{\partial r_D}+\rho^2\frac{\partial^2\bar{m}_{1D}}{\partial z_D^2}=s\omega\bar{m}_{1D}+\lambda\left(\bar{m}_{1D}-\bar{m}_{2D}\right) \tag{3.7.1}$$

$$\left(1-\omega\right)\bar{m}_{2D}=\lambda\left(\bar{m}_{1D}-\bar{m}_{2D}\right) \tag{3.7.2}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{m}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=1}=\frac{\pi}{2}\bar{q}_{1D} \tag{3.7.3}$$

$$\bar{m}_{1D}\big|_{r_D\to\infty}=\bar{m}_{2D}\big|_{r_D\to\infty}=0,\quad \bar{m}_{1D}\big|_{r_D=R_D}=\bar{m}_{2D}\big|_{r_D=R_D}=0,\quad \left.\frac{\partial\bar{m}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}=\left.\frac{\partial\bar{m}_{2D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}=0 \tag{3.7.4}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{m}_{1D}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,1}=\left.\frac{\partial\bar{m}_{2D}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,1}=0\ \text{或}\ \bar{m}_{1D}\big|_{z_D=0,1}=\bar{m}_{2D}\big|_{z_D=0,1}=0 \tag{3.7.5}$$

将(3.7.2)式可得：

$$\bar{m}_{2D} = \frac{\lambda}{\lambda + s(1-\omega)} \bar{m}_{1D} \tag{3.7.6}$$

现将(3.7.6)式代入(3.7.1)中可得：

$$\frac{\partial^2 \bar{m}_{1D}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\partial \bar{m}_{1D}}{\partial r_D} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{m}_{1D}}{\partial z_D^2} - \left[s\omega + \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + s(1-\omega)} \right] \bar{m}_{1D} = 0 \tag{3.7.7}$$

现令：

$$f(s) = s\omega + \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + s(1-\omega)} \tag{3.7.8}$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{m}_{1D}}{\partial r_D^2} + \dfrac{1}{r_D}\dfrac{\partial \bar{m}_{1D}}{\partial r_D} + \rho^2 \dfrac{\partial^2 \bar{m}_{1D}}{\partial z_D^2} - f(s)\bar{m}_{1D} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \bar{m}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=1} = \dfrac{\pi}{2}\bar{q}_{1D} \\ \bar{m}_{1D}\big|_{r_D\to\infty} = 0, \bar{m}_{1D}\big|_{r_D=R_D} = 0, \left.\dfrac{\partial \bar{m}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \bar{m}_{1D}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,1} = 0, \bar{m}_{1D}\big|_{z_D=0,1} = 0 \end{cases} \tag{3.7.9}$$

由于有三种垂直于井筒处的边界和四种顶底边界，将各种边界情况组合起来讨论的话共有 12 种边界的组合情况，现对这 12 种情况运用相似构造法求解：

① 顶底定压顶底定压边界，则 z_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为：

$$\begin{cases} \alpha_{1k} = k\pi \\ \lambda_{1k} = \sin(k\pi z_D) \end{cases} \tag{3.7.10}$$

首先对(3.7.9)式中的 z_D 作有限 Fourier 变换则可化为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D^2} + \dfrac{1}{r_D}\dfrac{\partial \tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D} - \left[(\rho\alpha_{1k})^2 + f(s) \right] \tilde{\bar{m}}_{1D} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=1} = -\dfrac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\dfrac{1}{\alpha_{1k}}\left[\cos(\alpha_{1k}z_{2D}) - \cos(\alpha_{1k}z_{1D}) \right] \\ \tilde{\bar{m}}_{1D}\big|_{r_D\to\infty} = 0, \tilde{\bar{m}}_{1D}\big|_{r_D=R_D} = 0, \left.\dfrac{\partial \tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D} = 0 \end{cases} \tag{3.7.11}$$

② 顶底封闭边界，则 z_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为：

$$\begin{cases} \alpha_{2k} = k\pi \\ \lambda_{2k} = \cos(k\pi z_D) \end{cases} \tag{3.7.12}$$

③ 顶部封闭底部定压边界，则 z_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为：

$$\begin{cases} \alpha_{3k} = \dfrac{(2k-1)\pi}{2} \\ \lambda_{3k} = \sin\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2} z_D \right) \end{cases} \tag{3.7.13}$$

④ 顶部定压底部封闭边界，则 z_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为：

$$\begin{cases}\alpha_{4k}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}\\ \lambda_{4k}=\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2}z_D\right)\end{cases}\tag{3.7.16}$$

1'：现令(3.7.11)式中：

$$F_{1k}(s)=\sqrt{(\rho\alpha_{1k})^2+f(s)}\tag{3.7.17}$$

则有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D^2}+\dfrac{1}{r_D}\dfrac{\partial\tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D}-F_{1k}^2(s)\tilde{\bar{m}}_{1D}=0\\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=1}=-\dfrac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\dfrac{1}{\alpha_{1k}}\left[\cos(\alpha_{1k}z_{2D})-\cos(\alpha_{1k}z_{1D})\right]\\ \left.\tilde{\bar{m}}_{1D}\right|_{r_D\to\infty}=0,\left.\tilde{\bar{m}}_{1D}\right|_{r_D=R_D}=0,\left.\dfrac{\partial\tilde{\bar{m}}_{1D}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}=0\end{cases}\tag{3.7.18}$$

则(3.7.18)式为常微分方程的边值问题，根据相似构造理论，不难求得定解方程的两个线性无关的解分别为：

$$\begin{cases}\tilde{\bar{m}}_{1D1}(r_D)=I_0(F_{1k}(s)r_D)\\ \tilde{\bar{m}}_{1D2}(r_D)=K_0(F_{1k}(s)r_D)\end{cases}\tag{3.7.19}$$

故：

$$\tilde{\bar{m}}_{1D}(r_D)=AI_0(F_{1k}(s)r_D)+BK_0(F_{1k}(s)r_D)\tag{3.7.20}$$

构造二元引解函数：

$$\varphi_{0,0}(\zeta,r_D)=I_0(F_{1k}(s)\zeta)K_0(F_{1k}(s)r_D)-I_0(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)\zeta)\tag{3.7.21}$$

$$\varphi_{1,0}(\zeta,r_D)=F_{1k}(s)I_1(F_{1k}(s)\zeta)K_0(F_{1k}(s)r_D)+F_{1k}(s)I_0(F_{1k}(s)r_D)K_1(F_{1k}(s)\zeta)\tag{3.7.22}$$

$$\varphi_{0,1}(\zeta,r_D)=-F_{1k}(s)I_0(F_{1k}(s)\zeta)K_1(F_{1k}(s)r_D)-F_{1k}(s)I_1(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)\zeta)\tag{3.7.23}$$

$$\varphi_{1,1}(\zeta,r_D)=-F_{1k}^2(s)I_1(F_{1k}(s)\zeta)K_1(F_{1k}(s)r_D)+F_{1k}^2(s)I_1(F_{1k}(s)r_D)K_1(F_{1k}(s)\zeta)\tag{3.7.24}$$

根据相似构造理论和 z_D 的三种外边界条件构造相似核函数：

$$\phi_1(r_D,s)=\frac{G\varphi_{0,0}(r_D,R_D)+H\varphi_{1,0}(r_D,R_D)}{G\varphi_{0,1}(1,R_D)+H\varphi_{1,1}(1,R_D)}\tag{3.7.25}$$

对应于不同外边界核函数依次为：

$$\phi_1(r_D,s)=\begin{cases}\dfrac{K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)K_1(F_{1k}(s)r_D)}, & \text{外边界无穷大}\\ \dfrac{I_0(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)R_D)-I_0(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)\left[I_0(F_{1k}(s))K_1(F_{1k}(s)R_D)+I_1(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s))\right]}, & \text{外边界封闭}\\ \dfrac{I_1(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)R_D)+I_0(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)\left[I_1(F_{1k}(s))K_1(F_{1k}(s)R_D)-I_1(F_{1k}(s)R_D)K_1(F_{1k}(s))\right]}, & \text{外边界定压}\end{cases}\tag{3.7.26}$$

则(3.7.18)式对于 z_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为：

$$\tilde{\bar{m}}_{1D}=-\frac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\phi_1\left(r_D,s\right)\frac{1}{\alpha_{1k}}\left[\cos\left(\alpha_{1k}z_{2D}\right)-\cos\left(\alpha_{1k}z_{1D}\right)\right] \tag{3.7.27}$$

2'：同理可得，考虑顶底封闭边界，z_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为：

$$\tilde{\bar{m}}_{2D}=\frac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\phi_2\left(r_D,s\right)\frac{1}{\alpha_{2k}}\left[\sin\left(\alpha_{2k}z_{2D}\right)-\sin\left(\alpha_{2k}z_{1D}\right)\right] \tag{3.7.28}$$

3'：考虑顶部封闭底部定压边界，z_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为：

$$\tilde{\bar{m}}_{3D}=-\frac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\phi_3\left(r_D,s\right)\frac{1}{\alpha_{3k}}\left[\cos\left(\alpha_{3k}z_{2D}\right)-\cos\left(\alpha_{3k}z_{1D}\right)\right] \tag{3.7.29}$$

4'：考虑顶部定压底部封闭边界，z_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为：

$$\tilde{\bar{m}}_{4D}=\frac{\pi}{2}\bar{q}_{1D}\phi_4\left(r_D,s\right)\frac{1}{\alpha_{4k}}\left[\sin\left(\alpha_{4k}z_{2D}\right)-\sin\left(\alpha_{4k}z_{1D}\right)\right] \tag{3.7.30}$$

现对(3.3.27)式作关于 z_D 的 Fourier 逆变换就得到第一种情况地层压力的 Laplace 空间解：

$$\bar{m}_{1D}\left(x_D,y_D,s\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_1\left(r_D,s\right)\bar{q}_{1D}\pi}{\alpha_{1k}}\left[\cos\left(\alpha_{1k}z_{2D}\right)-\cos\left(\alpha_{1k}z_{2D}\right)\right]\sin\left(\alpha_{1k}z_D\right) \tag{3.7.31}$$

若考虑井筒储集系数和表皮因子的影响，对(3.6.7)~(3.6.8)作 Laplace 变换得：

$$\begin{cases} sC_D\bar{m}_{1wD}+\bar{q}_{1D}=\dfrac{1}{s} \\ \bar{m}_{1wD}=\bar{m}_{1wD}^{*}+S\bar{q}_{1D} \end{cases} \tag{3.7.32}$$

仅考虑垂向变化忽略径向影响：

$$\bar{m}_{1wD}^{*}=\frac{1}{z_{2D}-z_{1D}}\int_{z_{1D}}^{z_{2D}}\bar{m}_{1wD}\left(r_D,z_D,s\right)\mathrm{d}z_D \tag{3.7.33}$$

现将(3.7.31)代入(3.7.33)中可得水平井平均压力的 Laplace 空间解：

①'：第一种情况下平均压力的 Laplace 空间解为：

$$\bar{m}_{1wD}^{*}\left(s\right)=-\frac{\pi h\bar{q}_{1D}}{2r_w}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_1\left(r_D,s\right)}{\alpha_{1k}^2}\left[\cos\left(\alpha_{1k}z_{2D}\right)-\cos\left(\alpha_{1k}z_{1D}\right)\right]^2 \tag{3.7.34}$$

②'：与第一种情况的做法相同，可得第二种情况下平均压力的 Laplace 空间解：

$$\bar{m}_{2wD}^{*}\left(s\right)=\frac{\pi h\bar{q}_{1D}}{2r_w}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_2\left(r_D,s\right)}{\alpha_{2k}^2}\left[\sin\left(\alpha_{2k}z_{2D}\right)-\sin\left(\alpha_{2k}z_{1D}\right)\right]^2 \tag{3.7.35}$$

③'：与第一种情况的做法相同，可得第三种情况下平均压力的 Laplace 空间解：

$$\bar{m}_{3wD}^{*}\left(s\right)=\frac{\pi h\bar{q}_{1D}}{2r_w}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_3\left(r_D,s\right)}{\alpha_{3k}^2}\left[\cos\left(\alpha_{3k}z_{2D}\right)-\cos\left(\alpha_{3k}z_{1D}\right)\right]^2 \tag{3.7.36}$$

④'：与第一种情况的做法相同，可得第四种情况下平均压力的 Laplace 空间解：

$$\bar{m}_{4wD}^{*}\left(s\right)=\frac{\pi h\bar{q}_{1D}}{2r_w}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_4\left(r_D,s\right)}{\alpha_{4k}^2}\left[\sin\left(\alpha_{4k}z_{2D}\right)-\sin\left(\alpha_{4k}z_{1D}\right)\right]^2 \tag{3.7.37}$$

若记：

$$G_{ik}(s)=\begin{cases}-\dfrac{\pi h}{2r_w}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\phi_1(r_D,s)}{\alpha_{1k}^2}\left[\cos(\alpha_{1k}z_{2D})-\cos(\alpha_{1k}z_{1D})\right]^2\\ \dfrac{\pi h}{2r_w}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\phi_2(r_D,s)}{\alpha_{2k}^2}\left[\sin(\alpha_{2k}z_{2D})-\sin(\alpha_{2k}z_{1D})\right]^2\\ \dfrac{\pi h}{2r_w}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\phi_3(r_D,s)}{\alpha_{3k}^2}\left[\cos(\alpha_{3k}z_{2D})-\cos(\alpha_{3k}z_{1D})\right]^2\\ \dfrac{\pi h}{2r_w}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\phi_4(r_D,s)}{\alpha_{4k}^2}\left[\sin(\alpha_{4k}z_{2D})-\sin(\alpha_{4k}z_{1D})\right]^2\end{cases},\ i=1,2,3,4 \tag{3.7.38}$$

将(3.7.34)~(3.7.37)代入(3.7.32)中并进行整理，可得考虑井筒储集和表皮效应的井底压力的 Laplace 解为：

$$\overline{m}_{iwD}=\frac{1}{s}\frac{1}{C_D s+\dfrac{1}{G_{ik}(s)+S}},i=1,2,3,4 \tag{3.7.39}$$

3.8. 模型讨论

本文在建立数学模型时，将气体渗流方程处理为形式上的线性扩散方程。这一处理过程基于两个核心步骤：

(1) 拟压力的引入：为了消除气体压力与状态方程(Z 因子)导致的强非线性，本文引入了无因次拟压力 m_{iD}。通过对压力项进行积分变换，有效地吸收了气体密度和偏差因子的非线性变化。

(2) 在引入拟压力后方程中仍残留有关于 μC_g (气体黏度与综合压缩系数之积)的非线性项。本文假设在研究的压力范围内 μC_g 为常数。

适用边界：① 高压气藏环境：当原始地层压力较高时，$\dfrac{1}{\mu Z}$ 随压力的变化相对平缓，此时模型的线性化误差极小，解析解具有极高的可靠性。

② 中小生产压差：在水平井生产初期或压降控制在合理范围内时，本模型能准确捕捉三维空间内的压力波传播特征。

③ 近井地带误差补偿：对于生产压差极大、近井地带发生剧烈压降的工况，由于 μC_g 乘积的剧烈波动，本模型可能会产生一定的截断误差。在工程实践中，建议通过取平均压力下的物性参数或引入时变拟压力法，进一步修正解析解在大压降工况下的解释精度。

4. 总结

(1) 本文考虑三维双孔介质圆柱气藏水平井渗流数学模型的井底压力解，建立了径向的三种不同边界(无穷大、封闭、定压)和垂向的四种不同边界(顶底定压、顶底封闭、顶部定压底部封闭、顶部封闭底部定压)组合共计 12 种不同的边界情况，结合积分变换和相似构造的方法构造出了井底压力的解。解的相似结构式由边界条件的系数所决定，相似核函数可以由零阶贝塞尔函数的两个线性无关解和边界条件中的系数来构造。

(2) 结合 Duhamel 原理，在三维双孔介质圆柱气藏水平井模型中也得到了连分式形式的解。相比于直井中的连分式解，两者在形式上完全一样，区别在于核函数的不同。直井中的核函数 $\phi(x_D,s)$ 可以直接构造得出，而三维圆柱水平井中的核函数中则包含 $\phi(x_D,s)$，其核函数的具体形式见表 1。

Table 1. Eigenvalues, eigenfunctions, and similar kernel functions under different boundary conditions
表 1. 不同边界条件下的特征值、特征函数、相似核函数

顶底边界条件	特征值	特征函数	相似核函数
顶底定压 ($i=1$)	$\alpha_{1k}=k\pi$	$\lambda_{1k}=\sin(k\pi z_D)$	$\phi_1(r_D,s)\begin{cases}\dfrac{K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)K_1(F_{1k}(s)r_D)}, & \text{外边界无穷大}\\ \dfrac{I_0(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)R_D)-I_0(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)\left[I_0(F_{1k}(s))K_1(F_{1k}(s)R_D)+I_1(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s))\right]}, & \text{外边界封闭}\\ \dfrac{I_1(F_{1k}(s)r_D)K_0(F_{1k}(s)R_D)+I_0(F_{1k}(s)R_D)K_0(F_{1k}(s)r_D)}{-F_{1k}(s)\left[I_1(F_{1k}(s))K_1(F_{1k}(s)R_D)-I_1(F_{1k}(s)R_D)K_1(F_{1k}(s))\right]}, & \text{外边界定压}\end{cases}$
顶底封闭 ($i=2$)	$\alpha_{2k}=k\pi$	$\lambda_{2k}=\cos(k\pi z_D)$	$\phi_2(r_D,s)=\begin{cases}\dfrac{K_0(F_{2k}(s)r_D)}{-F_{2k}(s)K_1(F_{2k}(s)r_D)}, & \text{外边界无穷大}\\ \dfrac{I_0(F_{2k}(s)r_D)K_0(F_{2k}(s)R_D)-I_0(F_{2k}(s)R_D)K_0(F_{2k}(s)r_D)}{-F_{2k}(s)\left[I_0(F_{2k}(s))K_1(F_{2k}(s)R_D)+I_1(F_{2k}(s)R_D)K_0(F_{2k}(s))\right]}, & \text{外边界封闭}\\ \dfrac{I_1(F_{2k}(s)r_D)K_0(F_{2k}(s)R_D)+I_0(F_{2k}(s)R_D)K_0(F_{2k}(s)r_D)}{-F_{2k}(s)\left[I_1(F_{2k}(s))K_1(F_{2k}(s)R_D)-I_1(F_{2k}(s)R_D)K_1(F_{2k}(s))\right]}, & \text{外边界定压}\end{cases}$
顶部封闭 底部定压 ($i=3$)	$\alpha_{3k}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$	$\lambda_{3k}=\sin\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2}z_D\right)$	$\phi_3(r_D,s)=\begin{cases}\dfrac{K_0(F_{3k}(s)r_D)}{-F_{3k}(s)K_1(F_{3k}(s)r_D)}, & \text{外边界无穷大}\\ \dfrac{I_0(F_{3k}(s)r_D)K_0(F_{3k}(s)R_D)-I_0(F_{3k}(s)R_D)K_0(F_{3k}(s)r_D)}{-F_{3k}(s)\left[I_0(F_{3k}(s))K_1(F_{3k}(s)R_D)+I_1(F_{3k}(s)R_D)K_0(F_{3k}(s))\right]}, & \text{外边界封闭}\\ \dfrac{I_1(F_{3k}(s)r_D)K_0(F_{3k}(s)R_D)+I_0(F_{3k}(s)R_D)K_0(F_{3k}(s)r_D)}{-F_{3k}(s)\left[I_1(F_{3k}(s))K_1(F_{3k}(s)R_D)-I_1(F_{3k}(s)R_D)K_1(F_{3k}(s))\right]}, & \text{外边界定压}\end{cases}$
顶部定压 底部封闭 ($i=4$)	$\alpha_{4k}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$	$\lambda_{4k}=\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2}z_D\right)$	$\phi_4(r_D,s)=\begin{cases}\dfrac{K_0(F_{4k}(s)r_D)}{-F_{4k}(s)K_1(F_{4k}(s)r_D)}, & \text{外边界无穷大}\\ \dfrac{I_0(F_{4k}(s)r_D)K_0(F_{4k}(s)R_D)-I_0(F_{4k}(s)R_D)K_0(F_{4k}(s)r_D)}{-F_{4k}(s)\left[I_0(F_{4k}(s))K_1(F_{4k}(s)R_D)+I_1(F_{4k}(s)R_D)K_0(F_{4k}(s))\right]}, & \text{外边界封闭}\\ \dfrac{I_1(F_{4k}(s)r_D)K_0(F_{4k}(s)R_D)+I_0(F_{4k}(s)R_D)K_0(F_{4k}(s)r_D)}{-F_{4k}(s)\left[I_1(F_{4k}(s))K_1(F_{4k}(s)R_D)-I_1(F_{4k}(s)R_D)K_1(F_{4k}(s))\right]}, & \text{外边界定压}\end{cases}$

参考文献

[1] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [Strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6

[2] Warren, J.E. and Root, P.J. (1963) The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, **3**, 245-255. https://doi.org/10.2118/426-pa

[3] 栾志安. 带窜流作用和表皮因子的双重介质渗流问题研究[J]. 石油学报, 1981, 2(3): 10-20.

[4] 黄天坤, 王德龙, 王丽影, 等. 双重介质页岩气藏水平井压力动态特征[J]. 成都理工大学学报(自然科学版), 2019, 46(2): 212-220.

[5] 杨济源, 张小涛, 王蜀源, 等. 双重介质气藏不稳态产能变化特征研究[J]. 天然气勘探与开发, 2013, 36(3): 50-53, 57, 4.

[6] 张春光, 姜瑞忠, 乔欣, 等. 双重介质致密分形气藏水平井压力动态分析[J]. 东北石油大学学报, 2018, 42(6): 95-103, 11.

[7] 李顺初. 分形双孔介质油气藏的试井分析模型解[J]. 勘探地球物理进展, 2002(5): 60-62.

[8] 许丽. 基于相似结构的分形双孔油藏球向渗流模型分析[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2012.

[9] 杨雨. 弹性外边界下的分形双孔油藏球向渗流模型解的相似结构[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.