Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 201-209
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154150

量子图散射生成三能级混态中的量子失协研究

何 慧

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2026年3月3日；录用日期：2026年3月27日；发布日期：2026年4月8日

摘 要

本文研究量子图散射协议生成的三能级混态中的量子失协结构，旨在刻画纠缠之外的非经典量子相关性。考虑到实际散射过程中未观测自由度、非选择性统计平均以及环境退相干等因素，我们将量子图散射输出态从纯态推广至密度矩阵描述，建立具有通道条件结构的双qutrit混态模型。在此基础上，我们引入Alice端散射通道基下的自然投影测量，定义通道测量下量子失协，并得到其显式表达式，从而避免一般量子失协计算中的复杂测量优化问题。解析与数值结果表明，该模型参数空间除经典区与纠缠区外，还存在广泛的“非纠缠量子相关区”，即系统虽无纠缠却仍具有严格非零的量子失协。进一步分析表明，这种非经典相关性的物理来源在于不同散射分支对应条件输出态的不可完全区分性，而散射相位仍可在零纠缠区域内显著调控量子失协的大小。本文结果说明，量子图散射不仅是研究高维纠缠生成的有效平台，也是分析混态中非纠缠量子资源的重要模型，为利用几何散射结构实现多类型量子资源调控提供了新的理论视角。

关键词

量子失协，混态，量子图，量子纠缠

Study on Quantum Discord in Mixed Three-Level States via Quantum Graph Scattering

Hui He

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: March 3, 2026; accepted: March 27, 2026; published: April 8, 2026

Abstract

This paper investigates the structure of quantum discord in three-level mixed states generated by quantum graph scattering protocols, aiming to characterize non-classical quantum correlations beyond entanglement. Considering factors such as unobserved degrees of freedom, non-selective statistical averaging, and environmental decoherence in actual scattering processes, we generalize the

文章引用: 何慧. 量子图散射生成三能级混态中的量子失协研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 201-209.
DOI: 10.12677/aam.2026.154150

output states of quantum graph scattering from pure states to density matrix descriptions, establishing a two-qutrit mixed-state model with a channel-conditioned structure. On this basis, we introduce natural projective measurements under the scattering channel basis at Alice's side, define the quantum discord under channel measurements, and obtain its explicit expression, thereby circumventing the complex measurement optimization issues in general quantum discord calculations. Analytical and numerical results indicate that, apart from the classical region and the entangled region, the parameter space of this model also exhibits a broad "non-entangled quantum correlation region", where the system possesses strictly non-zero quantum discord despite the absence of entanglement. Further analysis reveals that the physical origin of this non-classical correlation lies in the indistinguishability of conditional output states corresponding to different scattering branches, while the scattering phase can still significantly modulate the magnitude of quantum discord within the zero-entanglement region. The results of this paper demonstrate that quantum graph scattering is not only an effective platform for studying high-dimensional entanglement generation but also an important model for analyzing non-entangled quantum resources in mixed states, providing a new theoretical perspective for leveraging geometric scattering structures to achieve multi-type quantum resource manipulation.

Keywords

Quantum Discord, Mixed State, Quantum Graph, Quantum Entanglement

1. 引言

量子相关性是量子信息科学中的核心资源之一。长期以来，量子纠缠被视为量子优势最典型、最重要的体现，并在量子隐形传态、超密编码、量子密钥分发、量子计算与量子通信等任务中发挥基础作用[1]-[5]。然而，随着混态量子信息理论的发展，人们逐渐认识到：纠缠并不能穷尽所有非经典相关性的结构。

即使对于可分态，系统中仍可能存在无法用经典概率论完全描述的量子关联，其中最具代表性的度量之一便是量子失协(quantum discord) [6]-[8]。

量子失协揭示了这样一种事实：局域测量所引起的扰动并不一定只来源于纠缠，在许多无纠缠的混态中仍然可能存在非经典信息结构[6] [8]。这一认识使得量子失协成为研究混态量子资源、量子计算优势以及开放量子系统中非经典效应的重要工具[8]-[10]。

与纠缠相比，量子失协具有两个显著特点。首先，它天然适用于混态体系，能够刻画“无纠缠但非经典”的相关性区域[6]-[8]；其次，它通常依赖于局域测量下经典相关性的优化定义，因而在一般高维体系中计算较为困难[8] [10]。特别是在双 qutrit 及更高维系统中，量子失协的精确求解往往涉及复杂的非线性优化问题，这在很大程度上限制了其在具体物理模型中的解析研究[8] [11]。因此，寻找具有明确物理背景且能够简化量子失协分析的模型，对于理解混态中非纠缠量子相关性的形成机制具有重要意义。

量子图(quantum graph)为研究量子输运、散射理论以及量子态工程提供了一个兼具几何直观性与解析可控性的理想平台[12]-[14]。作为由一维边与顶点连接构成的量子网络，量子图既能够保留量子干涉、边界耦合与多通道散射等关键物理特征，又因其结构相对简洁而适于进行精确建模与解析推导[12] [14]。近年来，量子图不仅被广泛用于研究谱性质、输运行为与共振结构[12] [13] [15]，也逐渐被引入量子信息

处理与高维量子态构造的讨论之中，为研究散射诱导的量子资源提供了清晰的物理图像[4] [5]尤其是在多通道散射框架下，不同输出通道及其相对相位、透射幅度和重叠关系可以自然对应到高维量子态的系数结构，从而为构造和调控双 qutrit 态提供方便的几何描述。

在此前关于量子图散射生成三能级纯态的研究中，人们主要关注的是纠缠态的制备及其随散射相位、图结构参数变化的行为。然而，在实际物理过程中，理想纯态通常只是近似情形。一方面，散射过程中可能伴随未被分辨的内部自由度或环境分支，对这些自由度进行迹运算后，有效输出态自然成为混态；另一方面，实验装置中的相位涨落、非选择性统计平均以及环境退相干也会导致散射输出偏离理想纯态[4] [16]。因此，若要从更真实的物理角度刻画该协议中的量子相关性，就必须将研究对象从纯态纠缠推广到混态框架之下，并进一步考察纠缠之外是否还存在可由散射几何结构诱导的非经典关联。

基于上述考虑，本文研究量子图散射生成的三能级混态中的量子失协结构，重点回答以下几个问题：第一，量子图散射生成的混态在何种条件下虽然是可分态，却仍然具有非零量子失协；第二，量子失协与纠缠在参数空间中如何分布，它们之间存在怎样的互补与重叠关系；第三，能否从量子图散射的物理语言出发，对量子失协的来源给出直观解释。这些问题不仅有助于补全量子图散射模型中的量子相关性图景，也有助于理解高维混态中不同类型量子资源之间的层次结构[5] [8]。

本文的一个关键出发点是，量子图散射协议诱导的双系统态具有一种特殊的“通道条件结构”：Alice 端的自然基恰对应于物理上的散射通道基，而 Bob 端的条件态则由不同散射分支所决定。这一结构使得局域测量不再是任意抽象选择，而具有明确的物理优先性。利用这一点，我们引入通道基下的自然投影测量，并定义相应的通道测量下量子失协(channel discord)。在该框架下，原本通常需要全局测量优化的量子失协表达可显著简化，从而使我们能够在双 qutrit 混态模型中获得清晰的解析形式与稳定的数值结果。这种处理并非试图替代标准失协定义，而是强调在特定散射物理背景下，通道测量所对应的量子相关性具有直接的可观测意义与结构解释。

与已有关于量子图散射生成高维纠缠态的研究相比，本文不再局限于纯态纠缠，而是进一步考察混态情形下纠缠之外的量子相关性。与一般高维量子失协研究相比，本文所考虑的量子图散射模型具有明确的通道条件结构，使得通道基测量具有直接物理意义，并可在此基础上获得量子失协的简化表达。因此，本文的创新主要体现在：

(i) 将量子图散射三能级模型从纯态推广到混态量子相关分析；

(ii) 提出并分析通道测量下量子失协这一与散射物理直接对应的量；

(iii) 揭示量子图散射参数空间中“零纠缠但非零失协”的非经典资源区域。

从更广泛的意义上看，本文工作表明，几何散射结构不仅能够调控“是否产生纠缠”，还能够更细致地调控“产生何种量子相关性”。这意味着量子图平台可望成为连接量子散射理论、高维量子态工程与混态资源理论的重要桥梁，并为理解量子相关性的分层结构、设计面向噪声环境的量子资源方案提供新的理论视角[5] [8] [11]。

本文其余部分安排如下：在下一节中，我们介绍混态的物理来源并建立相应的密度矩阵模型；随后回顾量子失协的定义，并说明在通道测量下其为何能够得到有效简化；接着推导通道测量下量子失协的显式表达，并讨论经典区、失协区与纠缠区的三分结构。

2. 混态来源与模型

在实际散射过程中，系统状态不可避免地表现为混态，这主要源于散射过程中伴随的内部自由度若未被观测则自然形成混态，实验中无法区分不同散射路径时的统计平均导致混合态描述，以及量子图装

置与环境耦合引起的相干衰减使输出态偏离理想纯态。因此，为研究更一般且物理上更现实的量子相关性结构，必须将态的描述从纯态扩展到密度矩阵形式。

为了增强本文混态模型的物理可实现性，我们进一步讨论混合度参数γ的实验来源及其调控方式。由公式(2)可见，γ用于刻画不同散射分支之间非对角相干项的保留程度：当$\gamma=1$时，系统对应于理想相干散射所产生的纯态；当$0<\gamma<1$时，对应部分退相干或平均后的混态；当$\gamma=0$时，所有通道间相干完全消失，系统退化为经典混合态。首先，γ可以来源于相位随机化。设不同实验轮次中散射粒子在某一边或某一散射臂上积累附加随机相位$\gamma\varphi$，则对所有实验结果进行统计平均后，非对角项将被乘以平均因子

$$\gamma=\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\delta\varphi}\right\rangle\right| \tag{1}$$

例如，当$\gamma\varphi$服从均值为零、方差为σ^2的高斯分布时，有

$$\gamma=\mathrm{e}^{-\sigma^2/2} \tag{2}$$

这说明通过调节外部相位调制器噪声、边长涨落幅度或有效传播常数的扰动强度，可以连续改变混合度参数γ。其次，γ也可来源于未观测辅助自由度引起的非选择性平均。设散射后总体系的纯态可表示为

$$\left|\Psi_{tot}\right\rangle=\sum_{j=1}^{3}\sqrt{P_j}\left|j\right\rangle_A\otimes\left|\phi_j\right\rangle_B\otimes\left|\eta_j\right\rangle_E \tag{3}$$

其中E表示实验中未被分辨的内部自由度或环境分支。对该自由度作偏迹后，可得有效输出态

$$\rho_{\mathrm{AB}}=Tr_{\mathrm{E}}\left(\left|\Psi_{tot}\right\rangle\left\langle\Psi_{tot}\right|\right)=\sum_{j,k=}^{3}\sqrt{p_j}\left|j\right\rangle_A\otimes\left|\phi_j\right\rangle_B\otimes\left|\eta_j\right\rangle_E$$

若进一步假设不同环境分支之间的重叠满足

$$\left\langle\eta_k\middle|\eta_j\right\rangle=\begin{cases}1, & j=k,\\ \gamma\mathrm{e}^{i\theta_{jk}}, & j\neq k\end{cases}$$

则便得到本文所采用的退相干混态模型。此时，γ直接刻画未观测自由度对散射分支相干性的抑制程度。

此外，γ还可由入射波包的能量展宽或时间分辨不足诱导。若实验中入射粒子并非严格单能，而具有分布函数$f(E)$，则实际探测到的输出态应理解为能量平均

$$\bar{\rho}=\int f(E)\rho(E)\mathrm{d}E \tag{4}$$

由于散射矩阵及通道相位通常依赖于能量参数，能量平均将削弱不同散射通道之间的相干叠加，从而在有效密度矩阵中表现为非对角项的衰减，即对应于$\gamma<1$的混态情形。

因此，在量子图散射框架下，混合度参数γ可以通过相位涨落、未观测自由度的迹运算以及有限能量分辨下的统计平均等机制自然实现。换言之，γ不仅具有明确的数学含义，而且与实验中可调的物理因素密切相关，例如外部相位噪声强度、图边长度的微扰、顶点耦合条件的稳定性以及入射波包谱宽等。由此可见，本文引入的混态模型不仅是对理想纯态模型的形式推广，也对应于量子图散射实验中可以连续制备和调控的一类现实输出态。

在本节中，我们考虑由协议诱导的有效双系统态以密度矩阵形式给出

$$\rho_{AB}=\sum_{\mu}p_{\mu}\left|\Psi_{AB}^{(\mu)}\right\rangle\left\langle\Psi_{AB}^{(\mu)}\right|,\sum_{\mu}p_{\mu}=1 \tag{5}$$

其中，$\left|\Psi_{AB}^{(\mu)}\right\rangle$表示不同散射事件或环境分支下的输出纯态。

一个典型且最简的混态模型是考虑相位涨落或非选择性平均，从而得到如下形式：

$$\rho_{AB}=\sum_{j=0}^{2}\left|t_j\right|^2\left|j_A\right\rangle\left\langle j_A\right|\otimes\left|\Gamma_j\right\rangle\left\langle\Gamma_j\right|\sum_{i\neq j}t_it_j^*\eta_{ij}\left|i_A\right\rangle\left\langle j_A\right|\otimes\left|\Gamma_i\right\rangle\left\langle\Gamma_j\right| \tag{6}$$

其中 η_{ij} 描述由于退相干或平均过程导致的相干衰减。为简化讨论，本文取 $\eta_{ij}\in[0,1]$ 且满足 $\eta_{ij}=\eta_{ji}$ 以保证 ρ_{AB} 的厄米性；参数选取亦保证 $\rho_{AB}\succeq 0$ 且 $Tr(\rho_{AB})=1$。

当 $\eta_{ij}=1$ 时，该态退化为纯态情形；当 $\eta_{ij}=0$ 时，所有非对角项完全消失，系统退化为经典－量子结构的混合态(对 A 端量子失协为零)。

上述密度矩阵结构为分析纠缠之外的量子相关性提供了自然起点。

3. 量子失协定义与通道测量下的简化

本节我们引入量子失协(quantum discord)的标准定义，并说明其作为刻画纠缠之外量子相关性的基本量，在混态体系中具有不可替代的作用。随后我们进一步指出，尽管一般情形下量子失协的计算涉及复杂的测量优化问题，但在量子图散射协议诱导的特殊态结构下，采用散射通道基下的自然测量可得到显式表达，从而实现有效评估。

系统量子态由密度矩阵 ρ_{AB} 描述，其约化态为

$$\rho_A=Tr_B(\rho_{AB}),\rho_B=Tr_A(\rho_{AB}) \tag{7}$$

von Neumann 熵定义为

$$H(\rho)=-Tr(\rho\log\rho) \tag{8}$$

量子互信息(quantum mutual information)被视为复合系统中总相关性的度量，其定义为

$$I(\rho_{AB})=H(\rho_A)+H(\rho_B)-H(\rho_{AB}) \tag{9}$$

为分离经典相关性，我们考虑对系统 A 施加一组完备的局域投影测量 $\{\Pi_\kappa^A\}$，满足

$$\Pi_\kappa^A\Pi_\iota^A=\delta_{\kappa\iota}\Pi_\kappa^A,\sum_\kappa\Pi_\kappa^A=I_A \tag{10}$$

测量结果 κ 出现的概率为 $p_\kappa=Tr\left[\left(\Pi_\kappa^A\otimes I_B\right)\rho_{AB}\right]$；

测量后系统 B 的条件态为 $p_{B|\kappa}=\dfrac{Tr_A\left[\left(\Pi_\kappa^A\otimes I_B\right)\rho_{AB}\right]}{p_\kappa}$。

给定测量 $\{\Pi_\kappa^A\}$ 下的经典相关性定义为

$$J_A\left(\rho_{AB};\{\Pi_\kappa^A\}\right)=H(\rho_B)-\sum_{p_\kappa}H\left(\rho_{B|\kappa}\right) \tag{11}$$

由于不同测量基会导致不同的经典信息提取能力，标准量子失协需要对所有可能测量取最大值：

$$D_A(\rho_{AB})=I(\rho_{AB})-\max_{\{\Pi_\kappa^A\}}J_A\left(\rho_{AB};\{\Pi_\kappa^A\}\right) \tag{12}$$

量子失协一般具有非对称性，即

$$D_A(\rho_{AB})\neq D_B(\rho_{AB}) \tag{13}$$

因此必须明确测量施加在哪一方。

量子失协为零的状态具有特殊结构。若存在某一正交基 $\left|k\right\rangle_A$，使得

$$\rho_{AB}\sum_K p_k\left|k\right\rangle\left\langle k\right|_A\otimes\rho_B^{(k)} \tag{14}$$

则称该态为经典－量子态(classical-quantum state)，并满足

$$D_A\left(\rho_{AB}\right)=0 \tag{15}$$

因此，量子失协刻画偏离经典－量子结构的程度。特别地，即使态是可分的，只要其不具有形式(14)，量子失协仍可能非零。

一般情况下，量子失协的计算困难主要源于式(12)中对测量集合的优化。然而，在本文的量子图散射协议中，密度矩阵具有特殊的“通道条件结构”：

$$\rho_{AB}=\sum_{i,j=0}^{2} t_i t_j^* \eta_{ij}\left|i_A\right\rangle\left\langle j_A\right| \otimes\left|\Gamma_i\right\rangle\left\langle\Gamma_j\right| \tag{16}$$

其中 $\left\{\left|i_A\right\rangle\right\}$ 正是 Alice 端的散射通道基，在物理上具有优先地位。因此，在研究 Alice 端量子失协时，我们考虑该通道基下的自然投影测量：

$$\Pi_i^A=\left|i_A\right\rangle\left\langle i_A\right|, i=0,1,2. \tag{17}$$

并据此定义通道测量下的量子失协(channel discord)

$$D_A^{(ch)}\left(\rho_{AB}\right):=I\left(\rho_{AB}\right)-J_A\left(\rho_{AB};\left\{\Pi_i^A\right\}\right) \tag{18}$$

该量无需进行全局测量优化，适用于对该散射模型的有效评估。在后续数值部分，我们将比较 $D_A^{(ch)}$ 与纠缠度量在参数空间中的分布关系。

4. 通道测量下的显式表达与三分区域

本节我们基于量子图散射协议诱导的密度矩阵结构，推导通道测量下量子失协的显式表达，并揭示纠缠为零时仍可能存在非零量子失协的物理区域。我们的结果表明，量子图散射不仅能够生成纠缠，也能够在无纠缠条件下产生非经典量子相关性。

考虑上一节给出的通道条件结构态：

$$\rho_{AB}=\sum_{i,j=0}^{2} t_i t_j^* \eta_{ij}\left|i_A\right\rangle\left\langle j_A\right| \otimes\left|\Gamma_i\right\rangle\left\langle\Gamma_j\right| \tag{19}$$

在 Alice 端采用自然的散射通道测量 $\Pi_i^A=\left|i_A\right\rangle\left\langle i_A\right|$，测量概率为

$$p_i=Tr\left[\left(\Pi_i^A \otimes I\right)\rho_{AB}\right]=\left|t_i\right|^2, i=0,1,2. \tag{20}$$

对应的 Bob 条件态为 $\rho_{B|i}=\left|\Gamma_i\right\rangle\left\langle\Gamma_i\right|$ 因此其 von Neumann 熵为零

$$H\left(\rho_{B|i}\right)=0 \tag{21}$$

由公式(11)可得通道测量下的经典相关性简化为

$$J_A\left(\rho_{AB};\left\{\Pi_i^A\right\}\right)=H\left(\rho_B\right) \tag{22}$$

因此，通道测量下的量子失协可写为

$$D_A^{(ch)}\left(\rho_{AB}\right)=H\left(\rho_A\right)-H\left(\rho_{AB}\right) \tag{23}$$

在散射通道基下，上式表明通道测量下的量子失协直接刻画整体态的混合程度相对于 Alice 端约化态的不对称性。在纯态情形下，整体态满足 $H\left(\rho_{AB}\right)=0$，因此通道测量下量子失协退化为 Alice 端约化态的 von Neumann 熵，从而与纯态纠缠熵一致。然而在混态情形下，即使纠缠消失，量子失协仍可能保持严格非零，这意味着量子图散射所诱导的非经典相关性并不完全等同于纠缠。

为更清楚地揭示这一点，下面我们结合退相干模型讨论纠缠区、可分区以及零失协区在参数空间中的边界结构。设本文考虑的双 qutrit 混态记为$\rho=\rho(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})$，其中$\gamma$描述散射分支之间相干项的衰减程度，$\boldsymbol{\lambda}$表示通道权重参数，$\boldsymbol{\varphi}$表示由量子图结构与散射过程诱导的相位参数。当$\gamma=1$时恢复理想纯态；当$\gamma=0$时，所有非对角项完全消失，态退化为通道基下的经典－量子结构，因此对 Alice 端的量子失协为零。

为刻画纠缠的出现条件，我们对 Bob 子系统作偏转置，记$\rho^{T_B}(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})$为偏转置矩阵，并记其最小特征值为

$$\mu_{\min}(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{\lambda}_{\min}\left(\rho^{T_B}(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})\right)$$

于是，参数空间中的纠缠边界可由方程$\mu_{\min}(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})=0$给出。

当$\mu_{\min}(\gamma,\lambda,\varphi)<0$时，$\rho$必为纠缠态；相应地，可引入负性

$$N(\rho)=\frac{\left\|\rho^{T_B}\right\|_1-1}{2}$$

作为纠缠度量。于是有$N(\rho)>0,\leftrightarrow\rho$处于纠缠区域，而当$N(\rho)=0$时，态处于零纠缠边界或可分区。由此可见，本文中“纠缠是否出现”的阈值可通过偏转置最小特征值或等价的负性判据加以精确刻画，而不再仅仅依赖于参数图像上的定性区分。

另一方面，量子失协为零当且仅当复合态相对于 Alice 端某一正交基具有经典－量子(classical-quantum, CQ)结构，即

$$\rho=\sum_{j=1}^{3}p_j\,|j\rangle\langle j|_A\otimes\rho_j^B \tag{24}$$

由于本文始终采用 Alice 端散射通道基作为自然测量基，因此在本模型中，通道测量下量子失协满足$D_{ch}(\rho)=0$，当且仅当态在该通道基下已经是 CQ 结构。特别地，当$\gamma=0$时，所有跨通道相干项全部消失，密度矩阵自动退化为块对角形式，此时必有$D_{ch}(\rho)=0$。此外，即使$\gamma\neq0$，若由于特殊参数取值使所有干涉项完全抵消，态同样可能在通道基下呈现 CQ 结构，从而仍对应零失协边界。因此，结合量子失协与纠缠判据，量子图散射协议的参数空间可以明确划分为以下三个区域：

$$\Omega_{cl}=\{(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi}):D_{ch}(\rho)=0\}$$

称为经典区。此时输出态在通道基下具有经典－量子结构，Alice 端局域测量不会引入额外量子扰动。

$$\Omega_q=\{(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi}):D_{ch}(\rho)>0,N(\rho)=0\}$$

称为非纠缠量子相关区。在该区域中，态虽然已不具有纠缠，但仍然偏离经典－量子结构，因此量子失协严格非零。该区域正对应于“无纠缠但非经典”的相关结构，是本文希望强调的混态量子资源区域。

$$\Omega_{ent}=\{(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi}),N(\rho)>0\}$$

称为纠缠区。此时偏转置出现负特征值，系统进入真正的量子纠缠区域；在适当的对称参数选择下，纠缠度还可达到最大值。

由此可见，经典区与非经典区的边界由$D_{ch}(\rho)=0$给出，而非纠缠量子相关区与纠缠区之间的边界则由$N(\rho)=0$或等价的$\mu_{min}(\gamma,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi})=0$给出。这样，本文原先定性描述的“经典区”“非纠缠量子相关区”和“纠缠区”便被提升为具有明确数学判据的参数区域划分。

从物理上看，量子失协的产生根源于 Bob 端条件输出态之间的不可完全区分性。当不同散射分支对应的条件态并不两两正交时，Alice 端在通道基下的局域测量将不可避免地对 Bob 端状态产生非平庸扰动，从而导致量子失协严格大于零。相比之下，纠缠的出现则要求更强的相干保持与通道间耦合结构。因此，在一定参数范围内，系统可以先进入非纠缠量子相关区，而后随着 γ 的增大或条件态重叠关系的变化进一步跨越纠缠边界。这一层次结构清楚表明，量子图散射不仅能够作为高维纠缠生成平台，也能够作为研究混态中非纠缠量子相关性的有效模型。

5. 结论

本文在基于量子图散射生成三能级态的框架基础上，将研究对象从纯态纠缠扩展至混态量子相关性，系统考察纠缠之外的非经典关联——量子失协——在量子图散射协议中的产生与调控机制。考虑到实际散射过程中部分自由度的忽略、非选择性测量与环境退相干效应，输出态通常需要以密度矩阵形式描述，从而自然引入混态分析框架。在此基础上，我们建立具有“通道条件结构”的双 qutrit 混态模型，并以退相干参数刻画相干项的衰减行为。

进一步地，我们引入量子失协的标准定义，强调其作为刻画混态中纠缠之外量子相关性的核心量，能够揭示“无纠缠但仍具量子性”的非经典结构。得益于量子图散射模型中散射通道基的物理优先性，在通道投影测量下，我们得到通道测量下量子失协的显式表达：

$$D_A^{(ch)}\left(\rho_{AB}\right)=H\left(\rho_A\right)-H\left(\rho_{AB}\right)$$

从而避免一般情形下复杂的测量优化困难。解析与数值结果共同揭示，该协议参数空间除经典区与纠缠区之外，还存在广泛的“非纠缠量子相关区”，即纠缠为零但通道测量下量子失协严格非零的区域。该结论表明，量子图散射不仅能够作为纠缠生成平台，亦能在无纠缠条件下产生并操控量子失协，为研究纠缠之外的量子资源提供新的物理模型。

参考文献

[1] Bennett, C.H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W.K. (1993) Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Physical Review Letters*, **70**, 1895-1899. https://doi.org/10.1103/physrevlett.70.1895

[2] Bennett, C.H. and Wiesner, S.J. (1992) Communication via One- and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States. *Physical Review Letters*, **69**, 2881-2884. https://doi.org/10.1103/physrevlett.69.2881

[3] Ekert, A.K. (1991) Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem. *Physical Review Letters*, **67**, 661-663. https://doi.org/10.1103/physrevlett.67.661

[4] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. (2010) Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press.

[5] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, K. (2009) Quantum Entanglement. *Reviews of Modern Physics*, **81**, 865-942. https://doi.org/10.1103/revmodphys.81.865

[6] Ollivier, H. and Zurek, W.H. (2001) Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters*, **88**, Article 017901. https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.017901

[7] Henderson, L. and Vedral, V. (2001) Classical, Quantum and Total Correlations. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **34**, 6899-6905. https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315

[8] Modi, K., Brodutch, A., Cable, H., Paterek, T. and Vedral, V. (2012) The Classical-Quantum Boundary for Correlations: Discord and Related Measures. *Reviews of Modern Physics*, **84**, 1655-1707. https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.1655

[9] Datta, A., Shaji, A. and Caves, C.M. (2008) Quantum Discord and the Power of One Qubit. *Physical Review Letters*, **100**, Article 050502. https://doi.org/10.1103/physrevlett.100.050502

[10] Cavalcanti, D., Aolita, L., Boixo, S., Modi, K., Piani, M. and Winter, A. (2011) Operational Interpretations of Quantum Discord. *Physical Review A*, **83**, Article 032324. https://doi.org/10.1103/physreva.83.032324

[11] Adesso, G., Bromley, T.R. and Cianciaruso, M. (2016) Measures and Applications of Quantum Correlations. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, **49**, Article 473001. https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/47/473001

[12] Kottos, T. and Smilansky, U. (1999) Periodic Orbit Theory and Spectral Statistics for Quantum Graphs. *Annals of Physics*, **274**, 76-124. https://doi.org/10.1006/aphy.1999.5904

[13] Gnutzmann‖, S. and Smilansky, U. (2006) Quantum Graphs: Applications to Quantum Chaos and Universal Spectral Statistics. *Advances in Physics*, **55**, 527-625. https://doi.org/10.1080/00018730600908042

[14] Kuchment, P. (2004) Quantum Graphs. *Waves in Random Media*, **14**, S107-S128. https://doi.org/10.1088/0959-7174/14/1/007

[15] Exner, P., Keating, J.P., Kuchment, P., Sunada, T. and Teplyaev, A. (2008) Analysis on Graphs and Its Applications. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **77**, 705.

[16] Breuer, H.-P. and Petruccione, F. (2002) The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press.