Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 675-679
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154192

利用Hall定理证明并推广Hakimi定理

周多智

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2026年3月23日；录用日期：2026年4月18日；发布日期：2026年4月24日

摘　要

图的荫度理论一直是图论中主要的研究问题，Nash-Williams定理给出了图的荫度至多为k的充要条件，对应的，Hakimi定理给出了图的伪荫度至多为k的充要条件，本文主要是利用Hall定理，给出了证明Hakimi定理的一个新思路，并利用同样的思路将Hakimi定理推广至了分数形式。

关键词

荫度，Hall定理，Hakimi定理

Prove and Generalize Hakimi's Theorem Using Hall's Theorem

Duozhi Zhou

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 23, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 24, 2026

Abstract

The theory of graph arboricity has always been a primary research topic in graph theory. Nash-Williams' theorem provides the necessary and sufficient conditions for a graph to have an arboricity at most k, while Hakimi's theorem gives the corresponding conditions for a graph to have a pseudo-arboricity at most k. This paper primarily employs Hall's theorem to present a novel approach for proving Hakimi's theorem and further extends Hakimi's theorem to a fractional form using the same reasoning.

Keywords

Arboricity, Hall's Theorem, Hakimi's Theorem

文章引用: 周多智. 利用 Hall 定理证明并推广 Hakimi 定理[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 675-679.
DOI: 10.12677/aam.2026.154192

1. 引言

图的分解问题是图论中许多学者研究的主要方向之一，也是图论学科的基石。本文所研究的图都是无向图，对于一个无向图 G，$V(G)$表示图 G 的顶点集，$E(G)$表示图 G 的边集，$\Delta(G)$ 表示图 G 的最大出度，$\Delta^+(G)$ 表示图 G 的最大出度。若 σ 是图 G 的一个定向(实际上是 $E(G)$的一个定向)，我们用 G^σ 表示定向后的图。近年来，研究者们把图的分解形式推广到了以树的形式进行划分，从而形成图的荫度理论，众多学者对图的荫度研究有着广泛的兴趣。

图的森林分解是指将图 G 分解成一组边不相交的子图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，使得 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\cdots\cup E(G_k)$，且任意的子图 $G_i\,(1\le i\le k)$ 都不包含圈。图的荫度是指把图的边集分解成互不相交的森林的最少数量。伪树是指至多包含一个圈的连通图。伪森林是指每个连通分支至多包含一个圈的图。如果存在一个对图 G 的定向 σ 使得 $\Delta^+(G^\sigma)\le 1$，则图 G 是一个伪森林。图的伪荫度是指把图的边集分解成互不相交的伪森林的最少数量。

1986 年，Payan [1]提出了图的分数荫度参数概念，图 G 的分数荫度参数

$$\gamma(G):=\max_{H\subseteq G,|V(H)|>1}\frac{|E(H)|}{|V(H)|-1}$$

Nash-Williams [2]定理给出了图 G 的荫度至多为 k 的充要条件，即图 G 能最多分解成 k 个边不交的森林当且仅当 $\gamma(G)\le k$。图 G 的最大平均度定义为

$$\mathrm{mad}(G)=\max_{H\subseteq G}\frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$$

Frank [3]给出了有向图 D 的荫度至多为 k 的充要条件，即有向图 D 能最多分解成 k 个弧不交的分支当且仅当 $\gamma(D)\le k$。

Hakimi [4]定理给出了图 G 的伪荫度至多为 k 的充要条件，即图 G 存在一个定向 σ 使得 $\Delta^+(G^\sigma)\le k$ 当且仅当 $\mathrm{mad}(G)\le 2k$。

有关伪森林分解的应用有很多，文献[5]证明了在最大平均度的约束下，分解出的伪森林中至少有一个伪森林的最大度是有界的，文献[6]证明了在最大平均度的约束下，分解出的伪森林中至少有一个伪森林的连通分支的边数是有界的，在有向图中，文献[7]证明了在最大平均度的约束下，分解出的伪分支中至少有一个伪分支的最大出度是有界的。

1992 年，Alon和 Tarsi [8]利用 Hall 定理给出了 Hakimi 定理的一个证明，同时，在文献[9]中利用了可达性将 Hakimi 定理推广至了分数形式，文献[10]中利用了最大流最小割定理也给出了 Hakimi 定理的分数形式的一个证明方法。本文主要是利用 Hall 定理给出 Hakimi 定理的分数形式的一个证明方法。在此之前我们还需要给出图 G 的分数定向 w 的定义：

定义 1：G 是一个无向图，图 G 的分数定向 w 是一个函数 $\theta:V(G)^2\to[0,1]$ 满足

(1) 如果 $u,v\in V(G)$ 且 $uv\notin E(G)$，则 $\theta(u,v)=\theta(v,u)=0$；

(2) $\forall e=uv\in E(G)$，有 $\theta(u,v)+\theta(v,u)=1$。

对应地，图 G 在分数定向 w 下的最大出度定义为：

$$\Delta^+\left(G^w\right)=\max_{u\in V(G)}\sum_{uv\in E(G)}\theta\left(u,v\right)$$

2. 主要定理及证明

2.1. 主要定理

本文主要利用 Hall 定理来证明并推广 Hakimi 定理，具体形式如下：

定理 1 (Hakimi 定理)：图 G 存在一个定向 σ 使得 $\Delta^+\left(G^\sigma\right)\le k$ 当且仅当 $\mathrm{mad}\left(G\right)\le 2k$。

定理 2：图 G 存在一个分数定向 w 使得 $\Delta^+\left(G^w\right)\le k+\frac{q}{p}$ 当且仅当 $\mathrm{mad}\left(G\right)\le 2\left(k+\frac{q}{p}\right)$。

2.2. 主要定理证明

Alon和 Tarsi [8]于 1992 年已经利用 Hall 定理给出了 Hakimi 定理的一个证明，这里为了文章的完整性，我们也给出利用 Hall 定理来证明 Hakimi 定理的证明过程，这里所构造的二部图与 Alon 在文章[8]中构造的二部图是一样的，同时在根据 Hall 定理得到的匹配后如何给出定向方法也是一样的，但我们将其中如何利用最大平均度的条件得到 Hall 定理的条件解释得更加详细，这将有利于理解在后面利用 Hall 定理证明 Hakimi 定理的分数形式过程中，我们如何得到 Hall 定理的条件。

定理 1 (Hakimi 定理)：图 G 存在一个定向 σ 使得 $\Delta^+\left(G^\sigma\right)\le k$ 当且仅当 $\mathrm{mad}\left(G\right)\le 2k$。

证明：($\Rightarrow$)这个方向的证明是平凡的。

($\Leftarrow$)我们把 G 中的每个顶点都复制 k 个进而构成集合 A，图 G 的边集构成集合 B。我们构建一个二部图 $Q\,[A,B]$，如果 $e=uv\in B$，那在二部图中，e 和 u 的 k 个复制体以及 v 的 k 个复制体相连。$\forall X\subseteq B$，$G\,[X]$是 G 由 X 导出的子图，因为 $\mathrm{mad}\left(G\right):=\max_{H\subseteq G}\frac{2\left|E\left(H\right)\right|}{\left|V\left(H\right)\right|}\le 2k$，那么对 G 的任意子图 H，都有 $\left|E\left(H\right)\right|\le k\cdot\left|V\left(H\right)\right|$，所以 $\left|X\right|=\left|E\left(G\left[X\right]\right)\right|\le k\cdot\left|V\left(G\left[X\right]\right)\right|=\left|N\left(X\right)\right|$。由 Hall 定理，二部图 Q 有一个可以覆盖 B 中每个点的匹配，如果 B 中的点 e = uv 匹配至 u，那我们就把 e = uv 定向为 $e=\left(u,v\right)$。因此对于 B 中的每个点(G 中的每条边)，存在一个定向 σ 使得 $\forall v\in V\left(G\right)$，$d^+_{G^\sigma}\left(v\right)\le k$，所以 G 可以分解成 k 个伪森林。

现在我们可以开始利用 Hall 定理证明 Hakimi 定理的分数形式。

定理 2：图 G 存在一个分数定向 w 使得 $\Delta^+\left(G^w\right)\le k+\frac{q}{p}$ 当且仅当 $\mathrm{mad}\left(G\right)\le 2\left(k+\frac{q}{p}\right)$。

证明：($\Rightarrow$)对 G 的任意子图 H，因为 $\Delta^+\left(G^w\right)\le k+\frac{q}{p}$，所以 $\Delta^+\left(H^w\right)\le k+\frac{q}{p}$。在原来的定义中，一条边能提供两个度数，而在本文的分数定向中，一条边只能提供一个权重，所以原来的握手定理在本文中对应的结果为 $\left|E\left(H\right)\right|=\sum_{v\in V(H),vu\in E(H)}\theta\left(v,u\right)\le\left(k+\frac{q}{p}\right)\cdot\left|V\left(H\right)\right|$，所以 $\frac{2\left|E\left(H\right)\right|}{\left|V\left(H\right)\right|}\le\frac{2\left(k+\frac{q}{p}\right)\cdot\left|V\left(H\right)\right|}{\left|V\left(H\right)\right|}=2\left(k+\frac{q}{p}\right)$，由 H 的任意性，我们可以得到 $\mathrm{mad}\left(G\right)\le 2\left(k+\frac{q}{p}\right)$。

($\Leftarrow$)设 $V\left(G\right)=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_n\right\}$，$E\left(G\right)=\left\{e_1,e_2,\cdots,e_m\right\}$。我们把图 G 中的每个顶点 v_i 复制 $pk+q$ 个构成集合 $V_i\left(1\le i\le n\right)$，令集合 $A=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$，图 G 的每条边 e_j 都复制 p 个构成集合 $E_j\left(1\le j\le m\right)$，令集合 $B=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m$。我们构建一个二部图 Q [A, B]，如果 $e=uv\in B$，那在二部图中，e 的 p 个复制体每个都和 u 的 $pk+q$ 个复制体以及 v 的 $pk+q$ 个复制体相连。设 $\forall X\subseteq\bigcup_{i\in I}E_i\subseteq B$，其中集合 I 是集

合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个子集，令 $G[X]$是 G 由所有 $e_i\left(i\in I\right)$ 导出的子图，则 $\left|E\left(G\left[x\right]\right)\right|=\left|I\right|$，因为 $\mathrm{mad}\left(G\right):=\max_{H\subseteq G}\frac{2\left|E\left(H\right)\right|}{\left|V\left(H\right)\right|}\le 2\left(k+\frac{q}{p}\right)$，那么对 G 的任意子图 H，都有 $\left|E\left(H\right)\right|\le\left(k+\frac{q}{p}\right)\cdot\left|V\left(H\right)\right|$，即 $p\cdot\left|E\left(H\right)\right|\le\left(pk+q\right)\cdot\left|V\left(H\right)\right|$，则 $p\cdot\left|E\left(G\left[X\right]\right)\right|\le\left(pk+q\right)\cdot\left|V\left(G\left[X\right]\right)\right|$，则 $\left|X\right|\le\sum_{i\in I}\left|E_i\right|=\sum p\cdot\left|I\right|=p\cdot\left|E\left(G\left[X\right]\right)\right|$，由二部图 $Q\ [A, B]$的构造，因为每条边 $e=\left(u,v\right)$ 的每个复制体的邻居都是 u 的 $pk + q$ 个复制体以及 v 的 $pk + q$ 个复制体，所以只要这条边包含在 X 中，那么它的 $pk + q$ 倍个端点就会包含在 $N\left(X\right)$ 中，所以 $\left|N\left(X\right)\right|=\left(pk+q\right)\cdot\left|V\left(G\left[X\right]\right)\right|$，所以 $\forall X\in B$，有 $\left|X\right|\le\left|N\left(X\right)\right|$，由 *Hall* 定理，二部图 Q 有一个可以覆盖 B 中每个点的匹配，如果 B 中每有一个点 $e = uv$ 匹配至 u，那就在 $e = uv$ 中分配一个 $\theta\left(u,v\right)=\frac{1}{p}$。

因为 G 中的每条边在 B 中都只有 p 个复制体，所以 $\forall e=\left(u,v\right)\in E\left(G\right)$，$\theta\left(u,v\right)+\theta\left(v,u\right)=1$，且如果 $uv\notin E\left(G\right)$，则 $\theta\left(u,v\right)=\theta\left(v,u\right)=0$，因此我们得到了一个图 G 的分数定向 w。又因为 G 中的每个顶点在 A 中都只有 $pk+q$ 个复制体，所以 $\forall u\in V\left(G\right)$，$\sum_{uv\in E(G)}\theta\left(u,v\right)\le\frac{pk+q}{p}=k+\frac{q}{p}$，即图 G 存在一个分数定向 w 使得 $\Delta^+\left(G^w\right)\le k+\frac{q}{p}$。

3. 总结

自从荫度理论提出以来，众多学者都对图的荫度研究有着广泛的兴趣，并得到了许多结果，为该领域的发展贡献了强大的力量。本文主要利用 Hall 定理，给出了 Hakimi 定理的一个新的证明方法，并利用同样的方法将 Hakimi 定理推广至了分数形式，由于实数比分数更为复杂，这个方法暂且无法将 Hakimi 定理推广至任意实数形式。

本文的研究方法也具有一定的推广性，本文只研究了无向图中的伪荫度理论，也可以将这个方法推广至有向图、混合图甚至其他图类中，也许能得到一些有趣的结果，进而为实际问题提供更多的理论支持。同时，在推广的过程中不可避免的会出现一些新的挑战和问题，攻克这些挑战问题也将推动荫度理论的进步和发展，从而推动图论这门学科的进步，最终可以为数学领域的进步做出更大贡献。

总而言之，荫度理论的研究任重而道远，相信众多学者齐心协力，前赴后继，终将可以挖掘完善更多关于荫度理论的成果，进而让图论这门学科可以得到更好的发展。

参考文献

[1] Payan, C. (1986) Graphes équilibrés et arboricité rationnelle. *European Journal of Combinatorics*, **7**, 263-270. https://doi.org/10.1016/s0195-6698(86)80032-4

[2] Nash-Williams, C.S.J.A. (1964) Decomposition of Finite Graphs into Forests. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 12-12. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.12

[3] Frank, A. (1979) Covering Branching. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (*Szeged*), **41**, 77-81.

[4] Hakimi, S.L. (1965) On the Degrees of the Vertices of a Directed Graph. *Journal of the Franklin Institute*, **279**, 290-308. https://doi.org/10.1016/0016-0032(65)90340-6

[5] Fan, G., Li, Y., Song, N. and Yang, D. (2015) Decomposing a Graph into Pseudoforests with One Having Bounded Degree. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **115**, 72-95. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.05.003

[6] Grout, L. and Moore, B. (2020) The Pseudoforest Analogue for the Strong Nine Dragon Tree Conjecture Is True. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **145**, 433-449. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2020.07.001

[7] Gao, H. and Yang, D. (2022) Digraph Analogues for the Nine Dragon Tree Conjecture. *Journal of Graph Theory*, **102**, 521-534. https://doi.org/10.1002/jgt.22884

[8] Alon, N. and Tarsi, M. (1992) Colorings and Orientations of Graphs. *Combinatorica*, **12**, 125-134. https://doi.org/10.1007/bf01204715

[9] Kierstead, H.A., Yang, D. and Yi, J. (2020) On Coloring Numbers of Graph Powers. *Discrete Mathematics*, **343**, Article 111712. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111712

[10] Christoph, M., Martinsson, A., Steiner, R. and Wigderson, Y. (2025) Resolution of the Kohayakawa-Kreuter Conjecture. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **130**, e70013. https://doi.org/10.1112/plms.70013