Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 362-370
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154164

最优控制问题综述

陈世奇

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2026年3月8日；录用日期：2026年4月2日；发布日期：2026年4月10日

摘　要

本文系统综述了偏微分方程(PDE)约束的最优控制问题。首先梳理了其从变分法到现代控制理论的发展历程，重点分析了“先离散后优化”与“先优化后离散”两类数值求解策略，探讨了有限差分法、有限元法等离散方法的特性。特别关注了带复杂约束的非光滑问题求解，评述了神经网络等新兴方法的进展。最后从算法创新、多物理场耦合等维度展望了未来发展方向，为研究者提供该领域的知识体系概览和发展趋势分析。

关键词

最优控制问题，数值计算，离散方法，优化算法，神经网络

A Review of Optimal Control Problems

Shiqi Chen

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

This article systematically reviews the optimal control problems constrained by partial differential equations (PDEs). Firstly, it traces the development process from variational methods to modern control theory, focusing on analyzing the two numerical solution strategies of “discretization first and optimization second” and “optimization first and discretization second”. It also discusses the characteristics of discretization methods such as finite difference method and finite element method. Special attention is paid to the solution of non-smooth problems with complex constraints, and the progress of emerging methods such as neural networks is reviewed. Finally, it looks forward to future development directions from dimensions such as algorithm innovation and multi-physics field coupling, providing researchers with an overview of the knowledge system and trend analysis in this field.

文章引用: 陈世奇. 最优控制问题综述[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 362-370. DOI: 10.12677/aam.2026.154164

Keywords

Optimal Control Problem, Numerical Calculation, Discrete Method, Optimization Algorithm, Neural Network

1. 引言

从工程学的角度来看：最优控制问题主要是设计一种控制策略，以便在特定情况下使系统达到最优运行状态。从数学的角度来看：最优控制问题的目的是求得一系列的控制变量，使得这些变量在给定的约束条件下能使一个性能指标最小化或最大化。当前，最优控制问题被广泛运用于各个领域，不管是立足当下，还是展望未来，深入研究最优控制问题都是具有重要价值的。本文主要针对最优控制问题的研究背景及发展、国内外研究现状等进行综合性描述。

2. 研究背景及意义

2.1. 最优控制问题的起源

瑞士数学家约翰•伯努利在 1696 年提出了最速下降问题(problem of brachistochrone)，即：求从定点 A 到不在它垂直下方的点 B 的一条曲线，使一质点沿这条曲线从 A 下滑至 B 的时间最短，其过程中的摩擦阻力均忽略。该问题直接导致了数学家们对寻找动态系统最优轨迹的兴趣，对于该问题的研究催生出泛函与变分法的概念。瑞士数学家莱昂哈德•欧拉在 1756 年发表的一篇论文中提出了变分法，最优控制问题最早的理论基础来源于变分法，变分法不仅为物理学提供了极为重要的分析原理，也极大地促进了数学理论的研究与发展，自变分法问世以来，愈来愈多的学者将其应用至许多领域，如物理学、数学、材料学、航天航空领域等。

2.2. 现代控制理论的突破

现代控制理论的突破出现在 20 世纪，数学家庞特里亚金及其同事在 1950 年代提出了“极大值原理”[1]，庞特里亚金等人致力于寻找一种在给定约束下寻找最优控制策略的方法，通过整合经典变分法、动力学系统、经济学最优决策理论的思想提出了“极大值原理”这一猜想，并给出了严格的数学证明将其验证成功，“极大值原理”成为现代控制理论的重要组成部分。同时期美国数学家理查德•贝尔曼提出了“动态规划”[2]，“动态规划”将原问题分解成若干个相对原问题来说更简单的子问题，通过求解这些子问题来获得原问题的解，能够有效地处理复杂决策问题，确保在动态约束中作出最优决策，因其有效性与灵活性而被广泛运用于许多领域。

2.3. 最优控制问题的应用

最优控制问题作为现代控制理论的重要一环，对其开展深入研究有着深远的意义。由偏微分约束的最优控制问题被广泛运用于各个领域。在材料学领域，文献[3]介绍了模型预测控制(MPC)问题，该问题基于半线性抛物线偏微分方程(PDE)系统，提出了一个基于 PDE 系统的 MPC 策略，该策略旨在离线(无需过程测量)确定用于在线 MPC 的理论最优过程行为，将该策略应用于厚截面聚合物复合材料层压板的

制造过程中，特别是优化处理温度。在生物医学工程领域，文献[4]介绍了对神经元内物质运输调控机制，并开发了一个基于 PDE 的优化模型来模拟和研究这一过程，通过模拟不同的条件和参数，研究者能够洞察健康和异常神经元中物质运输的动态。在机器人学领域，文献[5]详细介绍了如何在随机噪声和障碍物存在的情况下，设计一个最优的反馈控制律，通过数值解 HJB 方程，得到了一个势场，可以引导随机系统避开障碍物并向目标集移动。在金融数学领域，文献[6]提出了一个新的偏微分方程(PDE)模型，用于包含违约风险调整的衍生品定价，考虑了买卖双方违约风险，该模型通过数值方法和渐近近似公式为金融实践中的定价问题提供了有效的解决方案。在环境工程领域，文献[7]开发了一个新颖的数学模型，用于准确捕捉 RABR 中微藻生物膜的生长动态，模型考虑了 RABR 的空间异质性，并引入了一个基于偏微分方程(PDE)的模型，从而更准确地模拟 RABR 中的生物膜生长。

2.4. 当前研究热点

带控制约束、状态约束以及混合约束的偏微分方程约束的最优控制问题是当前的研究热点。本课题主要研究以下介绍的一类偏微分方程约束的最优控制问题：

$$\min_{y,u} J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_d\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$s.t.\begin{cases}-\Delta y+S(y)=f+u & in\ \Omega\\ y=0 & on\ \partial\Omega\quad (P)\\ u_a\le u\le u_b & a.e.\ on\ \Omega\end{cases}$$

其中 $J(y,u)$ 为性能指标， $y\in Y=H_0^1(\Omega)$ 为状态变量， $u\in U=L^2(\Omega)$ 为控制变量， $\Omega\subseteq R^n\ (n=2,3)$ 是有多边形边界 $\partial\Omega$ 的凸开区域； $y_d\in L^2(\Omega)$ 是给定的期望状态； $f\in L^2(\Omega)$ 为已知项； $\lambda>0$ 为正则化参数， $u_a\le u\le u_b$ 为盒子约束且 u_a,u_b 均为给定参数。

3. 国内外研究现状

3.1. 单一控制的最优控制问题

对于控制约束或者状态约束的最优控制问题，已有大量的数值计算方法进行计算，并且有完善的理论成果。文献[8]专注于受偏微分方程(PDE)和不等式约束控制/状态的优化问题的求解，提出了两种策略来预处理在使用共轭梯度方法求解过程中出现的线性算子方程，并且用数值实验验证了该预处理方法可以有效处理具有状态约束的抛物线最优控制问题和具有控制约束的椭圆最优控制问题。文献[9]提出了一种基于活动集策略的数值算法，该算法涉及原始变量和对偶变量，并通过状态约束的广义 Moreau-Yosid 正则化来实现，该算法在有限的迭代次数内收敛到最优解，并且在数值实验中表现出了高效性。文献[10]以具有边界控制函数的线性最优控制问题为例，提出了用于状态约束和控制约束的增广拉格朗日算法。文献[11]研究了状态约束最优控制问题中的一阶最优性条件，特别是在状态方程缺乏足够正则性以及在函数空间中存在 Slater 点的情况下，推导出了问题的一阶最优性条件，并讨论了拉格朗日乘数的存在性和正则性。文献[12]主要研究了状态约束最优控制问题的数值计算方法，提出了一种正则化最优性系统，并利用半光滑牛顿方法求解最优性系统，证明了该方法的收敛性，并通过数值实验验证了理论结果。

3.2. 混合约束的最优控制问题

相较于对控制变量或状态变量进行单一约束的问题，混合约束的最优控制问题的求解难度系数更大、理论分析更深入。文献[13]研究了一类带有非线性混合控制－状态约束的半线性椭圆最优边界控制问题，利用 SQP 方法进行求解，证明了该方法的局部二次收敛性。文献[14]提出了一个具有混合控制－状态约束

以及纯状态约束的最优控制问题，介绍了欧拉离散化方法并将其应用于上述问题，给出了误差界限。文献[15]研究了一类具有非规则混合约束的仿射–凸控制问题，推导出在没有正则性假设的情况下的一个极小值原理，扩展了现有文献中对正则性条件的依赖，为解决非规则混合约束的最优控制问题提供了新的视角。

4. 最优控制问题的求解思路

4.1. 两种求解路线

在现有的文献中，对于偏微分约束的最优控制问题的数值计算方法，主要分为两种策略，分别是先离散再优化和先优化再离散。二者各自均有优缺点，这两种策略对算法的收敛性、计算成本和实现复杂度的影响体现在不同层面。在收敛性方面，“先离散后优化”将问题转化为有限维非线性规划后，可直接依托成熟的优化算法收敛理论，其收敛性主要取决于离散格式是否满足变分一致性要求，若离散不当可能导致解偏离原物理问题，而“先优化后离散”由于在连续空间中先建立了最优性系统，离散后求解的是结构化的 KKT 系统，更容易实现网格无关的收敛速度，收敛行为更为稳健。在计算成本方面，“先离散后优化”将状态与控制变量耦合在一个大规模规划问题中，随着网格加密变量规模急剧膨胀，每次迭代的计算开销显著增加，而“先优化后离散”通过引入伴随方程，梯度计算仅需求解一次线性系统的成本，与设计变量个数无关，在控制维度较高时计算效率优势明显。总体而言，两种策略的选择取决于问题规模、精度需求的综合权衡。文献[16]中给出了这两种策略求解同一最优控制问题的结果对比。

4.2. 离散方法

常见的离散最优控制问题的方法有：有限差分法、有限体积法、有限元法、Galerkin 有限元法、谱方法、边界元法等，这些方法各有优缺点，在离散的步骤时针对具体问题来选择合适的离散方法往往会得到较好的结果。上述方法均源于加权残量法或变分原理，其本质区别在于试探函数、权函数的选择以及离散化方式的不同。有限差分法直接以差分商近似导数，基于点值进行局部逼近，实现最为简单但难以处理复杂几何与边界条件，主要适用于规则区域上的问题。有限体积法在控制体积上积分守恒律，通过通量计算实现局部守恒，在流体力学与计算传热学中占据主导地位，对复杂网格适应性良好。有限元法与 Galerkin 有限元法本质上是变分方法，通过分片多项式在单元上逼近解，以积分弱形式为基础，能够天然处理复杂几何与非结构网格，理论严谨且适用范围最广。谱方法采用全局高光滑函数(如傅里叶级数、切比雪夫多项式)作为试探函数，在光滑解问题上可实现指数级收敛速度，但受限于规则区域。边界元法基于基本解将控制方程转化为边界积分方程，仅需对边界进行离散，从而将问题维数降低一维，特别适用于无限域或边界主导问题，但系数矩阵通常稠密且依赖于基本解的存在性。文献[17]主要研究一类椭圆最优控制问题，使用有限差分方法对状态方程以及控制问题进行离散化，推导出数值解的误差估计。在文献[18]中，作者利用有限元方法对具有点控制约束的抛物线最优控制问题进行离散化，推导出先验误差估计的结果并利用数值实验验证了理论结果。文献[19]应用有限体积法离散抛物型分布式最优控制问题，考虑了半离散和全离散的分段线性 FVEM，在不同范数下给出了相应的误差估计。文献[20]利用 Galerkin 有限元方法对二维一阶线性双曲型问题进行离散，构造出 Euler 格式与 Crank-Nicolso 格式，并且分析了两种格式的稳定性与误差估计。文献[21]开发了一种用于离散带有 L2 范数控制约束的抛物线最优控制问题的时空谱方法，并推导出了先验和后验误差估计。

有限差分法[22]将连续的问题转化为离散问题，核心思想是利用网格对问题进行划分，利用有限数量的网格点来近似表示连续的函数或解的分布，有限差分法对于规则区域和边界问题的离散相对简单且直接，由于划分的网格是规则的，离散后的方程通常是带状的，更利于求解。文献[23]主要研究了具有时间依赖参数的椭圆型最优控制问题，并提出了一种基于有限差分方法对状态方程进行离散化以及对控制变

量进行分段近似的数值解法。关于有限差分法的应用与分析可在文献[24]-[27]内查找。有限差分法处理非规则区域和边界问题时，采用的网格需要更精细划分以适应不规则的边界形状，且边界条件较难处理，这体现了处理这类问题时的局限性，于是，本课题在研究过程中遇到此类问题时，着重关注有限元方法。有限元方法[28]将问题的域划分为有限数量的小区域，这些小区域通常是简单的几何形状，在每个小区域中选择合适的基函数进行近似，有限元方法的灵活性和适应性能有效处理不规则的区域和边界问题。自适应有限元方法是对传统有限元方法的改进，通过构造后验误差估计器来选择在误差较大的区域调整基函数的阶数和节点个数以提高该区域的节点密度，从而提高离散的精度，相反的，在误差较小的区域可通过类似上述的调整以提高计算效率。文献[29]研究了抛物线最优控制问题的自适应混合有限元方法，状态和伴随状态变量通过最低阶 Raviart-Thomas 混合有限元空间来近似，控制变量通过分段常数元素来近似，推导了混合有限元解的后验误差估计，这些估计可以用来构建更有效和可靠的自适应混合有限元方法。文献[30]研究了具有点向约束和积分控制约束的最优控制问题，推导出变分不等式在连续和离散情况下的显式解，建立了先验误差估计器，并进一步推导出了状态和控制近似的等价后验误差估计器，这些估计器可用于自适应多网格有限元方案的调整。文献[31]设计了一种新的后验误差估计器，并结合有限元方法将其应用于一类分布式椭圆最优控制问题。文献[32]-[34]有类似的研究。

4.3. 优化算法

对于离散后的系统，已有许多优化算法对其进行求解，例如梯度类算法、牛顿类算法、增广拉格朗日算法、对偶算法、交替方向乘子法、近似点算法等。文献[35] [36]将梯度类算法运用于最优控制问题。文献[37]-[39]使用牛顿类算法求解最优控制问题。文献[40] [41]将交替方向乘子法运用于最优控制问题。这些算法均为求解优化问题的核心数值方法，它们都可视为通过迭代构造逼近最优解的点列，并可从变分不等式或算子分裂的统一框架下加以理解。梯度类算法(如梯度下降、共轭梯度法)仅利用一阶导数信息，迭代格式简单、单步计算成本低，适用于大规模光滑问题，但收敛速度通常仅为线性且对条件数敏感。牛顿类算法(包括拟牛顿法)利用二阶导数或对其近似，通过求解局部二次模型实现迭代，具有超线性甚至二次收敛速度，但每步需求解线性系统、存储与计算 Hessian 矩阵的成本较高，适用于中小规模或结构稀疏的高精度问题。增广拉格朗日算法通过将约束以惩罚项和乘子项结合的方式引入目标函数，在迭代中交替优化原变量与更新乘子，能够处理等式与不等式约束且具有良好的收敛鲁棒性，但需谨慎选择罚参数。对偶算法将原问题转化为对偶问题求解，利用弱对偶性在凹函数上实现高效优化，特别适合原变量复杂但对偶变量约束简单的问题。交替方向乘子法(ADMM)融合了对偶分解与增广拉格朗日的思想，将原问题分解为若干可分离子问题交替求解，在大规模分布式优化、统计学习等领域应用广泛，但对子问题求解精度与步长参数较为敏感。近似点算法通过引入邻近项构造隐式迭代格式，能够有效处理非光滑项与包含算子求逆的复杂结构，是求解非光滑、复合优化及变分不等式的有力工具，但其每步常需求解子问题，计算成本较高。总体而言，这些算法在选择时需根据问题的光滑性、规模、约束结构与精度要求进行综合权衡。

4.4. 神经网络方法

利用神经网络求解最优控制问题的方法已然成为求解新思路。文献[42]针对由 ReLU 神经网络(ReLU neural network)作为非线性项的椭圆型最优控制问题，提出了一种基于最优性系统(Optimality System)的神经网络求解方法(OSNN)。该方法通过神经网络同时逼近状态方程与伴随方程的解，将原问题转化为一个无约束优化问题，并利用蒙特卡洛采样近似相应的积分项来构造损失函数。理论分析方面，作者给出了近似解在 L^2 范数下的误差估计，该估计明确依赖于神经网络参数(如深度、宽度)、采样点数量以及问题

的正则性数据。数值实验在线性、带控制约束以及半线性等不同场景下验证了该方法的有效性，并将其与交替优化神经网络(AONN)和增广拉格朗日法(ALM)进行了对比，结果表明 OSNN 在精度和训练稳定性方面具有竞争力。

文献[43]中，作者系统研究了由 ReLU 神经网络(ReLU neural network)作为非线性项的椭圆型最优控制问题的理论分析与数值算法。该工作首先详细分析了 ReLU 神经网络的数学特性，特别是其作为连续分段线性函数(Continuous Piecewise Affine functions)的表示能力，并探讨了通过典型平滑化(Canonical Smoothing)技术(如使用平滑激活函数近似 ReLU)处理非光滑性时可能引发的理论挑战，例如可能破坏非线性项的单调性，进而影响状态方程解的唯一性。在理论层面，作者针对这类非光滑 PDE 约束的最优控制问题，建立了一系列一阶最优性条件。他们从 B-稳定(B-stationarity)条件出发，通过正则化技术推导出弱稳定(weak stationarity)条件，并在非线性项满足分段连续可微(PC^1)的假设下，进一步建立了 C-稳定(C-stationarity)条件。在附加的约束规格下，他们还将最优性条件强化为强稳定(strong stationarity)条件，并讨论了不同稳定性概念之间的层次关系。

5. 最优控制问题的未来展望

基于当前研究，特别是针对偏微分方程(PDE)约束的最优控制问题，其未来发展将围绕以下几个核心方向展开，旨在解决现有方法的局限性并拓展其应用边界。

5.1. 算法与理论基础的深化与创新

结合第 3、4 节中对现有算法的分析可见，当前处理带有复杂约束(如控制约束、状态约束及非光滑非线性项)的最优控制问题时，数值算法(如序列二次规划(SQP)、增广拉格朗日法、活动集策略等)在收敛速度、稳定性以及对初值的敏感性方面仍面临显著挑战。针对上述瓶颈，未来的研究将致力于开发更高效、更鲁棒的数值算法。例如，为应对现有离散化方法在解变化剧烈区域计算效率低下的问题，发展自适应离散化方法(如自适应有限元方法)成为重要方向，它能够根据后验误差估计自动加密网格，在保证精度的同时显著提升计算效率。同时，针对当前算法在处理非光滑结构时收敛速度受限的困境，探索高阶优化算法(如非光滑牛顿法、半光滑牛顿法)与问题结构(如 PDE 约束的特定性质)的更紧密结合是一大关键，这有望实现超线性收敛速度。在理论层面，为弥补当前对先进算法收敛性分析的不足，需要为这些算法建立更强大和更一般的收敛性框架，特别是针对非凸、非光滑的无穷维问题。此外，基于第 3 节中对不同一阶最优性条件适用范围的讨论，深入研究 B-稳定性、C-稳定性、强稳定性等条件之间的等价关系以及保证这些关系成立的约束规格，将为数值方法的设计提供更坚实的理论基础。

5.2. 模型复杂性与应用场景的拓展

未来的研究工作将显著超越当前相对简化的模型。一个主要方向是将研究拓展至动态系统，即从当前的稳态椭圆 PDE 约束最优控制问题，拓展到瞬态问题，如抛物型(例如，时间依赖的反应–扩散方程)和双曲型 PDE 约束的最优控制。这将引入时间变量，带来诸如长时间积分、守恒律等新的数值挑战。此外，处理多物理场耦合系统(如流体–结构相互作用、热–电–力耦合)的控制问题将成为重点，这要求数值方法能够有效处理多个相互作用的物理过程及其带来的复杂约束。最终，目标是将这些方法应用于高维和不确定性量化问题，例如涉及随机 PDE 约束的优化或需要考虑参数不确定性的鲁棒最优控制问题，这需要将 PDE 约束优化与不确定性量化技术深度融合。

5.3. 神经网络与机器学习方法的深度融合

近年来，利用神经网络求解 PDE 约束最优控制问题的方法显示出巨大潜力，如文献[42]提出的基于

最优性系统的神经网络方法(OSNN)和文献[43]对非光滑 ReLU 网络约束问题的理论分析。未来，这一方向将进一步深化。关键在于发展高效的“学习－控制”耦合框架，即如何利用在线或离线数据动态校正 PDE 模型中的未知参数或非线性项(通常由神经网络表示)，从而实现自适应的最优控制。另一方面，需要深入研究学习模型的泛化能力与不确定性量化，确保基于有限数据训练的代理模型在控制策略下的可靠性和安全性。尽管神经网络方法在处理高维问题上潜力巨大，但其可解释性通常较差，如何平衡其“黑箱”特性与控制系统对安全性和可靠性的高要求，是一个重要的未来挑战。

综上，最优控制问题的研究正朝着理论更严谨、算法更高效、应用更广泛的方向发展。其在解决复杂系统建模、不确定性处理以及与数据驱动方法融合方面的潜力，预示着它将在科学与工程计算领域持续扮演核心角色。

6. 小结

本文系统综述了偏微分方程(PDE)约束的最优控制问题，梳理了其从变分法、极大值原理到现代数值方法的发展脉络。重点分析了“先离散后优化”与“先优化后离散”两类求解策略，探讨了有限元法、有限差分法等离散方法的特性，以及梯度法、牛顿法等优化算法的应用。特别关注了带复杂约束的非光滑问题求解，并评述了神经网络等新兴方法在求解高维问题上的潜力与挑战。最后展望了该领域在算法创新、多物理场耦合、数据驱动融合等方向的未来发展趋势，彰显了最优控制理论在解决复杂系统优化问题中的重要价值和广阔前景。

参考文献

[1] Goldstine, H.H. (1980) A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. New York, Springer.

[2] Bellman, R. (1957) Dynamic Programming. Princeton University Press.

[3] Dufour, P., Michaud, D.J., Touré, Y. and Dhurjati, P.S. (2004) A Partial Differential Equation Model Predictive Control Strategy: Application to Autoclave Composite Processing. *Computers & Chemical Engineering*, **28**, 545-556. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2003.08.007

[4] Li, A. and Zhang, Y.J. (2022) Modeling Material Transport Regulation and Traffic Jam in Neurons Using Pde-Constrained Optimization. *Scientific Reports*, **12**, Article No. 3902. https://doi.org/10.1038/s41598-022-07861-6

[5] Shah, S.K. and Tanner, H.G. (2015) Control of Stochastic Unicycle-Type Robots. 2015 *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (*ICRA*), Seattle, 26-30 May 2015, 389-394. https://doi.org/10.1109/icra.2015.7139028

[6] Chen, Y.W. and Christara, C.C. (2023) Bilateral XVA Pricing under Stochastic Default Intensity: PDE Modelling and Computation. *Applied Numerical Mathematics*, **185**, 236-259. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.11.014

[7] Jones, G.B., Sims, R.C. and Zhao, J. (2024) Computational Modeling of Microalgal Biofilm Growth in Heterogeneous Rotating Algal Biofilm Reactors (RABRs) for Wastewater Treatment. *Applied Mathematical Modelling*, **131**, 487-504. https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.04.021

[8] Schiela, A. and Ulbrich, S. (2014) Operator Preconditioning for a Class of Inequality Constrained Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **24**, 435-466. https://doi.org/10.1137/120877532

[9] Bergounioux, M. and Kunisch, K. (2002) Primal-Dual Strategy for State-Constrained Optimal Control Problems. *Computational Optimization and Applications*, **22**, 193-224. https://doi.org/10.1023/a:1015489608037

[10] Bergounioux, M. and Kunisch, K. (1997) Augemented Lagrangian Techniques for Elliptic State Constrained Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **35**, 1524-1543. https://doi.org/10.1137/s036301299529330x

[11] Schiela, A. (2009) State Constrained Optimal Control Problems with States of Low Regularity. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 2407-2432. https://doi.org/10.1137/080727610

[12] Ito, K. and Kunisch, K. (2003) Semi-Smooth Newton Methods for State-Constrained Optimal Control Problems. *Systems & Control Letters*, **50**, 221-228. https://doi.org/10.1016/s0167-6911(03)00156-7

[13] Griesse, R., Metla, N. and Rösch, A. (2008) Convergence Analysis of the SQP Method for Nonlinear Mixed-Constrained Elliptic Optimal Control Problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **88**, 776-792.

https://doi.org/10.1002/zamm.200800036

[14] Dontchev, A.L., Hager, W.W. and Malanowski, K. (2007) Error Bounds for Euler Approximation of a State and Control Constrained Optimal Control Problem. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **21**, 653-682.

[15] Becerril, J.A., Cortez, K.L. and de Pinho, M.D.R. (2023) A Minimum Principle for Affine-Convex Control Problems with Nonregular Mixed Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **68**, 5081-5088. https://doi.org/10.1109/tac.2022.3218586

[16] Liu, J. and Wang, Z. (2019) Non-Commutative Discretize-Then-Optimize Algorithms for Elliptic Pde-Constrained Optimal Control Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **362**, 596-613. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.07.028

[17] Alt, W. and Bräutigam, N. (2009) Finite-Difference Discretizations of Quadratic Control Problems Governed by Ordinary Elliptic Differential Equations. *Computational Optimization and Applications*, **43**, 133-150. https://doi.org/10.1007/s10589-007-9129-6

[18] Zhang, X.D., Zhao, J.P. and Hou, Y.R. (2023) A Priori Error Estimates of Crank-Nicolson Finite Element Method for Parabolic Optimal Control Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **144**, 274-289. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.06.017

[19] Luo, X.B., Chen, Y.P., Huang, Y.Q. and Hou, T.L. (2012) Some Error Estimates of Finite Volume Element Method for Parabolic Optimal Control Problems. *Optimal Control Applications and Methods*, **35**, 145-165. https://doi.org/10.1002/oca.2059

[20] Sun, C. and Qin, S.J. (1999) The Full Discrete Discontinuous Finite Element Analysis for First-Order Linear Hyperbolic Equation. *Journal of Computational Mathematics*, **17**, 97-112.

[21] Tao, Z.Z. and Sun, B. (2023) Space-Time Spectral Approximations of a Parabolic Optimal Control Problem with an L2-Norm Control Constraint. *Optimal Control Applications and Methods*, **44**, 2984-3007. https://doi.org/10.1002/oca.3022

[22] Thomée, V. (2001) From Finite Differences to Finite Elements a Short History of Numerical Analysis of Partial Differential Equations. In: *Partial Differential Equations*, Elsevier, 1-54. https://doi.org/10.1016/b978-0-444-50616-0.50004-x

[23] Alt, W. and Bräutigam, N. (2009) Discretization of Elliptic Control Problems with Time Dependent Parameters. *Applied Numerical Mathematics*, **59**, 410-423. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.03.001

[24] Kyei, Y. (2004) Higher-Order Cartesian Grid Based Finite Difference Methods for Elliptic Equations on Irregular Domains and Interface Problems and Their Applications. North Carolina State University.

[25] Antonietti, P.F., Bigoni, N. and Verani, M. (2013) Mimetic Discretizations of Elliptic Control Problems. *Journal of Scientific Computing*, **56**, 14-27. https://doi.org/10.1007/s10915-012-9659-7

[26] Solaymani Fard, O., Borzabadi, A.H. and Sarani, F. (2019) An Adaptive Semismooth Newton Method for Approximately Solving Control-Constrained Elliptic Optimal Control Problems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **41**, 3010-3020. https://doi.org/10.1177/0142331218823862

[27] Brett, C., Dedner, A. and Elliott, C. (2016) Optimal Control of Elliptic PDEs at Points. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **36**, 1015-1050. https://doi.org/10.1093/imanum/drv040

[28] Pelosi, G. (2007) The Finite-Element Method, Part I: R. L. Courant [Historical Corner]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **49**, 180-182. https://doi.org/10.1109/map.2007.376627

[29] Lu, Z.L. (2011) Adaptive Mixed Finite Element Methods for Parabolic Optimal Control Problems. *Mathematical Problems in Engineering*, **2011**, Article 217493.

[30] Du, N., Ge, L. and Liu, W. (2014) Adaptive Finite Element Approximation for an Elliptic Optimal Control Problem with Both Pointwise and Integral Control Constraints. *Journal of Scientific Computing*, **60**, 160-183. https://doi.org/10.1007/s10915-013-9790-0

[31] Li, R., Liu, W.B., Ma, H.P. and Tang, T. (2002) Adaptive Finite Element Approximation for Distributed Elliptic Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **41**, 1321-1349. https://doi.org/10.1137/s0363012901389342

[32] Chen, Y.P. and Liu, W.B. (2008) A Posteriori Error Estimates for Mixed Finite Element Solutions of Convex Optimal Control Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **211**, 76-89. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.11.015

[33] Dond, A.K., Nataraj, N. and Nayak, S. (2024) Convergence of Adaptive Crouzeix-Raviart and Morley FEM for Distributed Optimal Control Problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **24**, 599-622. https://doi.org/10.1515/cmam-2023-0083

[34] Chen, T.J., Xiao, J.X. and Wang, H.Y. (2014) Multi-Mesh Adaptive Finite Element Algorithms for Constrained Optimal Control Problems Governed by Semi-Linear Parabolic Equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*,

30, 411-428. https://doi.org/10.1007/s10255-014-0292-0

[35] Wang, F.S., Su, C.T. and Liu, Y.C. (1999) Computation of Optimal Feedforward and Feedback Control by a Modified Reduced Gradient Method. *Applied Mathematics and Computation*, **104**, 85-100. https://doi.org/10.1016/s0096-3003(98)10054-1

[36] Lichtenecker, D., Rixen, D., Eichmeir, P. and Nachbagauer, K. (2023) On the Use of Adjoint Gradients for Time-Optimal Control Problems Regarding a Discrete Control Parameterization. *Multibody System Dynamics*, **59**, 313-334. https://doi.org/10.1007/s11044-023-09898-5

[37] Chen, J. and Rabitz, H. (2019) On Lifting Operators and Regularity of Non-Smooth Newton Methods for Optimal Control Problems of Differential Algebraic Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**, 518-535. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1364-8

[38] Dontchev, A.L., Huang, M., Kolmanovsky, I.V. and Nicotra, M.M. (2019) Inexact Newton-Kantorovich Methods for Constrained Nonlinear Model Predictive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**, 3602-3615. https://doi.org/10.1109/tac.2018.2884402

[39] Gerdts, M. (2008) Global Convergence of a Non-Smooth Newton Method for Control-State Constrained Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **19**, 326-350. https://doi.org/10.1137/060657546

[40] von Esch, M.P., Landgraf, D., Steffel, M., Völz, A. and Graichen, K. (2024) Distributed Stochastic Optimal Control of Nonlinear Systems Based on ADMM. *IEEE Control Systems Letters*, **8**, 424-429. https://doi.org/10.1109/lcsys.2024.3393411

[41] Glowinski, R., Song, Y. and Yuan, X. (2020) An ADMM Numerical Approach to Linear Parabolic State Constrained Optimal Control Problems. *Numerische Mathematik*, **144**, 931-966. https://doi.org/10.1007/s00211-020-01104-4

[42] Dai, Y., Jin, B., Sau, R.C. and Zhou, Z. (2025) Solving Elliptic Optimal Control Problems via Neural Networks and Optimality System. *Advances in Computational Mathematics*, **51**, Article No. 31. https://doi.org/10.1007/s10444-025-10241-z

[43] Dong, G., Hintermüller, M. and Papafitsoros, K. (2024) A Descent Algorithm for the Optimal Control of ReLU Neural Network Informed PDEs Based on Approximate Directional Derivatives. *SIAM Journal on Optimization*, **34**, 2314-2349. https://doi.org/10.1137/22m1534420