

# 一类具有三次方非线性项的Lotka-Volterra型竞争系统的波速符号

周里琼\*, 万雨婷

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月9日

## 摘要

本文研究一类带有三次非线性项的Lotka-Volterra竞争扩散模型的双稳行波解的波速符号。该模型用于刻画两类均能释放有毒物质的浮游生物之间的强竞争过程。在一定参数条件下, 系统存在连接两个稳定平衡点的行波解。本文重点分析其波速符号的确定条件。通过构造与时间无关的上解, 结合比较原理建立了波速为负的若干充分条件。结果表明, 在特定参数范围内波速恒为负, 这意味着竞争结果中某一物种呈现逆向传播的入侵行为。研究结论为理解种群竞争中的空间传播动态提供了理论依据。

## 关键词

Lotka-Volterra竞争模型, 双稳行波解, 波速符号, 上下解

## The Sign of the Wave Speed for a Class of Lotka-Volterra Competitive Systems with Cubic Reaction Terms

Liqiong Zhou\*, Yuting Wan

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 9, 2026

## Abstract

This paper investigates the sign of the bistable wave speed for a class of Lotka-Volterra competition-

\*通讯作者。

文章引用: 周里琼, 万雨婷. 一类具有三次方非线性项的 Lotka-Volterra 型竞争系统的波速符号[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 311-318. DOI: 10.12677/aam.2026.154159

diffusion models with cubic nonlinear terms. This model describes the strong competition between two types of toxin-producing phytoplankton. Under certain parameter conditions, the system has a traveling wave solution connecting two stable equilibrium points. The focus of this paper is on analyzing the sign of the wave speed. By constructing a time-independent upper solution and combining the comparison principle, several sufficient conditions for the wave speed to be negative are established. The results show that the wave speed is always negative within a specific parameter range, indicating that one of the species exhibits an invasive behavior of reverse propagation in the competition outcome. The research conclusion provides a theoretical basis for understanding the spatial propagation dynamics in population competition.

## Keywords

Lotka-Volterra Competitive Model, Bistable Traveling Wave, Wave Speed Sign, Upper-Lower Solutions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文研究如下带有三次方非线性反应项的 Lotka-Volterra 竞争系统:

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + r_1 u(1 - a_1 u - c_1 v - b_1 uv), \\ v_t = d_2 v_{xx} + r_2 v(1 - c_2 u - a_2 v - b_2 uv), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

在(1)中,  $u(t, x)$  和  $v(t, x)$  分别表示在时刻  $t$  和位置  $x$  处两种浮游种群的密度;  $b_1$  是种群  $v$  对种群  $u$  施加的毒性抑制率,  $b_2$  的含义与  $b_1$  类似。参数  $r_i$  为净增长率,  $1/a_i$  为环境容纳量;  $c_i$  为种间竞争系数,  $d_i$  为扩散系数, 这里  $i = 1, 2$ 。以上所有参数均假设为正实数。通过变换

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1/d_1} x &\rightarrow x, r_1 t \rightarrow t, a_1 u(t, x) \rightarrow u(t, x), a_2 v(t, x) \rightarrow v(t, x), \\ \frac{c_1}{a_2} &= k_1, \frac{b_1}{a_1 a_2} = k_3, \frac{d_2}{d_1} = d, \frac{r_2}{r_1} = r, \frac{c_2}{a_1} = k_2, \frac{b_2}{a_1 a_2} = k_4, \end{aligned}$$

系统(1)可简化为以下系统:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u - k_1 v - k_3 uv), \\ v_t = d v_{xx} + r v(1 - k_2 u - v - k_4 uv), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

在生态学研究, 有毒物质对生态群落的影响是环境科学中的重要问题。在污染近似恒定的水生生态系统中, 部分生物能释放有毒物质, 这打破了传统种群间的竞争模式, 进而影响物种的演替进程。传统的 Lotka-Volterra 竞争系统多采用线性或双线性假设, 难以刻画有毒物质带来的非线性效应。为此, Maynard Smith [1] 和 Chattopadhyay [2] 首次提出一类含三次非线性项的反应扩散系统, 用以描述两类释放有毒物质的浮游生物之间的竞争过程。该系统假设两种群在竞争过程中不仅通过对资源和领地的竞争来抑制对方种群增长, 还能进一步通过对对方释放有毒物质来影响竞争过程。同时, 文献[2]中表明, 有毒物质对于系统的稳定性具有一定的促进作用。在此基础上, 本文主要分析系统(2)双稳行波解的波速符号, 进一步揭示在竞争过程中何种浮游生物将赢得胜利, 最终得以生存。

Lotka-Volterra 竞争系统的双稳行波解, 其波速  $c$  的符号直接刻画了物种在空间中的入侵或撤退行为,

是理解种群空间动力学的关键。对于经典 Lotka-Volterra 模型

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u-k_1v), \\ v_t = dv_{xx} + rv(1-k_2u-v), \end{cases} \quad t \in R^+, x \in R.$$

波速符号的判定已有较为深入的研究[3]-[9]。特别地, Ma 等人[3]基于比较原理, 构造依赖于时间  $t$  的上下解, 给出了判别波速正、负号的若干充分条件。随后, 他们进一步在[4]中引入带可调参数的构造方法, 拓展了参数空间中可判定波速符号的区域。最近, Nakamura 与 Ogiwara [9]通过构造与时间  $t$  无关的上解, 提出了一种新的波速为负的条件, 从而在方法和结果上推广了前人的工作。

值得注意的是, 对于反应项形式更为复杂的模型, 波速符号的判定条件往往也更为复杂。然而, 一个有趣的反例出现在具有三次非线性项的 Gilpin-Ayala 竞争系统

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u-k_1v^2), \\ v_t = dv_{xx} + rv(1-k_2u^2-v), \end{cases} \quad t \in R^+, x \in R.$$

Perthame [10]运用能量函数法证明了该模型的波速符号仅由参数组合  $k_2 - k_1$  决定。相比之下, 对于本文所关注的系统(1), 由于反应项结构的复杂性, 其双稳行波波速的符号判定面临显著挑战。Wang 等人 [11]利用波速唯一性给出了波速为零的充分条件, 并沿用依赖于时间  $t$  的上下解法, 建立了若干波速符号的判定准则。本文旨在进一步发展与时间无关的上下解构造技巧, 借鉴[9]中的方法, 针对系统(2)建立一系列波速为负的新条件。对于波速为正的情形, 可参照文献[3]的方法, 通过逆转波速为负的条件得到相应结论。

对于系统(2), 不难验证, 若参数  $k_i, i=1,2,3,4$  满足

$$\begin{cases} k_1 > 1, k_2 > 1, \\ \frac{1}{k_1} \leq \frac{k_4}{k_3} \leq k_2, \\ k_4 + 1 - k_1k_2 < k_3 < 2k_1k_4 + k_1k_2 - k_4 - 1. \end{cases}$$

则在不变区域  $\mathbb{W} = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$  内的系统(2)恰有四个平衡点  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (0, 1)$ ,  $E_2 = (1, 0)$ ,  $E^* = (u^*, v^*)$ 。根据文献[11],  $E_0$  与  $E^*$  不稳定, 而边界平衡点  $E_1$  与  $E_2$  是稳定的。此时, 连接两个稳定平衡点  $E_1$  与  $E_2$  的行波解称为双稳行波解。具体地, 寻找系统(2)的形如

$$(u(t, x), v(t, x)) = (\bar{U}(z), \bar{V}(z)), z := x + ct, \quad (3)$$

的非负解, 其中波速  $c \in R$ ,  $\bar{U}, \bar{V} \in C^2(R)$  且满足边界条件

$$(\bar{U}, \bar{V})(-\infty) = (0, 1), (\bar{U}, \bar{V})(\infty) = (1, 0).$$

将(3)代入系统(2), 得到对应的行波方程

$$\begin{cases} 0 = \bar{U}'' - c\bar{U}' + \bar{U}(1 - \bar{U} - k_1\bar{V} - k_3\bar{U}\bar{V}), \\ 0 = d\bar{V}'' - c\bar{V}' + r\bar{V}(1 - k_2\bar{U} - \bar{V} - k_4\bar{U}\bar{V}), \end{cases} \quad z \in R, \quad (4)$$

系统(4)行波解的存在性在文献[11]中已有讨论。本文主要的研究内容如下: 在第二节引入必要的符号并构造两组与时间无关的上解。第三节给出了保证  $c < 0$  成立的具体参数。

## 2. 波速符号的判定

通过变换  $U = \bar{U}, V = 1 - \bar{V}$ , 可将系统(4)改写为如下形式的合作系统:

$$\begin{cases} cU' = U'' + f(U, V), & z \in R, \\ cV' = dV'' + rg(U, V), & z \in R, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$f(U, V) := U(1 - U - k_1(1 - V) - k_3U(1 - V)), g(U, V) := (1 - V)(k_2U - V + k_4U(1 - V)).$$

满足

$$(U, V)(-\infty) = (0, 0), (U, V)(\infty) = (1, 1).$$

在区域  $D := \{(U, V) | U \geq 0, V \leq 1\}$  中, 容易验证:

$$\frac{\partial f}{\partial V} \geq 0, \frac{\partial g}{\partial U} \geq 0.$$

表明在  $D$  中比较原理对(5)的上下解成立。接下来, 受文献[9]启发, 通过借助一类  $S$  形函数构造系统(5)的一组上解。为此, 对  $\forall p > 1$ , 定义  $\alpha_p := \frac{6}{(p+1)(p+2)} \in (0, 1)$ 。令  $h_p \in C^1(R)$ , 其定义为

$$h_p(s) := \begin{cases} s(1-s)(s^{p-1} - \alpha_p), & s \geq 0, \\ -\alpha_p s, & s < 0. \end{cases} \quad (6)$$

根据文献[12]和[13], 存在一个严格单调递增的解  $\sigma = \sigma_p(x), x \in R$  满足以下方程:

$$\begin{cases} \sigma'' + h_p(\sigma) = 0, \\ \sigma(-\infty) = 0, \sigma(\infty) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

接下来, 将使用  $\sigma$  函数来构造上解。

**定理 1** 对  $\forall a > 0$ , 设  $(U_+(x), V_+(x)) = (\sigma_p(ax)^p, \sigma_p(ax)), x \in R$ , 其中  $\sigma_p$  为(7)定义的单调递增解。若参数  $a$  与  $p$  满足下列条件:

$$(Q_1) p \leq k_1 + k_3 \text{ 或 } p > k_1 + k_3 \text{ 且 } a^2 \geq \frac{(p+1)(p+2)(p-k_1-k_3)}{p(p-1)(p+4)};$$

$$(Q_2) p < 2k_1 - 1 \text{ 且 } a^2 \leq \frac{(2k_1 - p - 1)(p+1)(p+2)}{2p(p^2 + 4p + 1)};$$

$$(Q_3) \frac{r(k_2 + k_4)}{d} \leq a^2 \leq \frac{r(p+1)(p+2)}{6d}.$$

则  $(U_+(x), V_+(x))$  构成系统(5)的一个上解。

**证明:** 为证明  $(U_+(x), V_+(x))$  是系统(5)的一个上解, 定义:

$$I(x) := U_+''(x) + f(U_+(x), V_+(x)), J(x) := \frac{d}{r} V_+''(x) + g(U_+(x), V_+(x)).$$

现只需证明  $I(x) \leq 0, J(x) \leq 0, x \in R$ 。依据(6)和(7), 通过计算可得:

$$\sigma'' = -h_p(\sigma) = \alpha_p \sigma(1 - \sigma) - \sigma^p(1 - \sigma),$$

$$(\sigma')^2 = -2 \int_0^\sigma h_p(s) ds = \alpha_p \sigma^2 - \frac{2}{3} \alpha_p \sigma^3 - \frac{2}{p+1} \sigma^{p+1} + \frac{2}{p+2} \sigma^{p+2}.$$

令  $s = \sigma_p(ax) \in (0, 1)$ , 将  $(U_+(x), V_+(x)) = (s^p, s)$  代入  $I(x)$ , 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
U_+'' &= p(p-1)s^{p-2} \cdot a^2 \left[ \alpha_p s^2 - \frac{2}{3} \alpha_p s^3 - \frac{2}{p+1} s^{p+1} + \frac{2}{p+2} s^{p+2} \right] \\
&\quad + ps^{p-1} \cdot a^2 \left[ \alpha_p s(1-s) - s^p(1-s) \right] \\
&= a^2 s^p \left[ p^2 \alpha_p - \alpha_p p \cdot \frac{2p+1}{3} s - p \frac{3p-1}{p+1} s^{p-1} + \frac{3p^2}{p+2} s^p \right] \\
&= s^p \left[ \frac{6p^2 a^2}{(p+1)(p+2)} - \frac{2p(2p+1)a^2}{(p+1)(p+2)} s - \frac{p(3p-1)a^2}{p+1} s^{p-1} + \frac{3p^2 a^2}{p+2} s^p \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

以及

$$f(s^p, s) = s^p [1 - s^p - k_1(1-s) - k_3 s^p(1-s)]. \tag{9}$$

现在引入以下参数:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{6p^2}{(p+1)(p+2)} a^2 - (k_1 - 1), B = -\frac{2p(2p+1)}{(p+1)(p+2)} a^2 + k_1, \\
C &= -\frac{p(3p-1)}{p+1} a^2, D = \frac{3p^2}{p+2} a^2 - 1 - k_3, E = k_3.
\end{aligned}$$

容易验证  $A+B+C+D+E=0$ 。将(8), (9)代入  $I(x) = U_+''(x) + f(s^p, s)$ , 化简计算可得

$$I(x) = s^p (A + Bs + Cs^{p-1} + Ds^p + Es^{p+1}). \tag{10}$$

令  $\tau = s^{-1} > 1$ , 将  $E = -A - B - C - D$  代入则(10)中可得:

$$I(x) = \tau^{-2p-1} (\tau - 1) I_1(\tau).$$

其中

$$I_1(\tau) = A \frac{\tau^{p+1} - 1}{\tau - 1} + B \frac{\tau^p - 1}{\tau - 1} + C(\tau + 1) + D. \tag{11}$$

由洛必达法则可知

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^+} I_1(\tau) = (p+1)A + pB + 2C + D = \frac{-p(p-1)(p+4)}{(p+1)(p+2)} \cdot a^2 + (p - k_1 - k_3).$$

于是由条件  $(Q_1)$  可得

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^+} I_1(\tau) \leq 0. \tag{12}$$

由(11)可知, 当  $\tau \rightarrow +\infty$  时,  $I_1(\tau)$  的正负性取决于  $A$  的正负性。由条件  $(Q_2)$  可得:

$$2k_1 \geq \frac{2p(p^2 + 4p + 1)}{(p+1)(p+2)} a^2 + p + 1 > \frac{12p + 2p(p^2 - 2p + 1)}{(p+1)(p+2)} a^2 + 2.$$

化简可得:

$$k_1 \geq \frac{6p}{(p+1)(p+2)} a^2 + 1. \tag{13}$$

由  $A$  的定义可知(13)等价于  $A < 0$ , 从而有

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} I_1(\tau) < 0. \tag{14}$$

此外, 直接计算  $I_1(\tau)$  的导数可得:

$$I_1'(\tau) = \frac{p\tau^{p+1}A - (p+1)\tau^p A + (p-1)\tau^p B - p\tau^{p-1}B + A + B + C}{(\tau-1)^2}.$$

接下来考虑辅助函数

$$I_2(\tau) := (\tau-1)^2 I_1'(\tau).$$

直接计算可得  $\lim_{\tau \rightarrow 1^+} I_2(\tau) = C \leq 0$ 。由于  $A < 0$  有

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} I_2(\tau) < 0.$$

对  $I_2(\tau)$  求导可得:

$$I_2'(\tau) = p\tau^{p-2}(\tau-1)[(p+1)A\tau + (p-1)B].$$

定义  $Y := (p+1)A + (p-1)B$ , 代入  $A, B$  的值并化简可得:

$$Y = \frac{2p(p^2 + 4p + 1)}{(p+1)(p+2)}a^2 - (2k_1 - p - 1).$$

由条件  $(Q_2)$  可得  $Y \leq 0$ , 进一步有  $I_2'(\tau) \leq 0$ 。因此, 对  $\forall \tau \in (1, +\infty)$ , 都有  $I_2(\tau) < 0$ , 从而  $I_1'(\tau) = I_2(\tau)/(\tau-1)^2 < 0$ , 再结合(13), (14)可得  $I_1(\tau) \leq 0$ , 于是  $I(x) = \tau^{-2p-1}(\tau-1)I_1(\tau) \leq 0, x \in R$ 。

接下来证明  $J(x) \leq 0, x \in R$ 。与  $U''$  和  $f$  的计算相似, 我们可以得到  $V_+''$  和  $g$ :

$$V_+''(x) = a^2 \sigma''(ax) = a^2 s(1-s)(\alpha_p - s^{p-1}), g(s^p, s) = (1-s)(k_2 s^p - s + k_4 s^p(1-s)).$$

以及  $J(x) = s(1-s)J_1(s)$ , 其中  $J_1(s) = \frac{d}{r}a^2\alpha_p - 1 + \left(k_2 - \frac{d}{r}a^2\right)s^{p-1} + k_4 s^{p-1}(1-s)$ , 进一步可得

$$J_1'(s) = s^{p-2} \left[ (p-1) \left( k_2 - \frac{d}{r}a^2 + k_4 \right) - pk_4 s \right].$$

由条件  $(Q_3)$  可知  $J_1'(s) \leq 0$  以及  $J_1(0) \leq 0$ , 进而  $J_1(s) \leq J_1(0) \leq 0$ , 所以  $J(x) \leq 0$ 。证毕。

由于定理 1 的条件  $(Q_2)$  包含了一个条件  $A < 0$ , 我们尝试将它分离出来作为一个新的条件  $(Q_4)$ , 并使用另一个条件  $(Q_2')$  来代替  $(Q_2)$ 。

**定理 2** 对于  $a > 0$ , 设  $(U_+(x), V_+(x)) = (\sigma_p(ax)^p, \sigma_p(ax))$ 。若  $a, p$  满足:

$$(Q_2') a^2 > \frac{(k_3+1)(p+1)}{(3p-1)(2-p)}, 1 < p < 2;$$

$$(Q_3) \frac{r(k_2+k_4)}{d} \leq a^2 \leq \frac{r(p+1)(p+2)}{6d};$$

$$(Q_4) a^2 < \frac{(p+1)(p+2)}{6p^2}(k_1-1).$$

则  $(U_+(x), V_+(x))$  构成系统(5)的一个上解。

**证明:** 符号  $s, A, B, C, D, E, I(x), J(x)$  请参考定理 1。  $J(x) \leq 0$  的证明与定理 1 相似, 此处从略。下面验证  $I(x) \leq 0$ 。由(10)式可将  $I(x)$  表示为

$$I(x) = s^p I_3(s).$$

其中  $I_3 = A + Bs + Cs^{p-1} + Ds^p + Es^{p+1}$ , 又由条件  $(Q_4)$  可得:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} I_3(s) \leq 0, \quad (15)$$

由**定理 1**中的等式  $A+B+C+D+E=0$  知:

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} I_3(s) = 0. \quad (16)$$

接下来计算  $I_3(s)$  的二阶导数:

$$\begin{aligned} I_3''(s) &= (p+1)ps^{p-1}E + (p-1)ps^{p-2}D + (p-1)(p-2)s^{p-3}C \\ &= s^{p-3}p \left[ k_3[(p+1)s^2 - (p-1)s] + (p-1) \left( \frac{3p^2}{p+2}a^2 - 1 \right) s - \frac{(3p-1)(p-1)(p-2)}{p+1}a^2 \right] \\ &\geq s^{p-3}p \left[ k_3(1-p) - (p-1) - \frac{(3p-1)(p-1)(p-2)}{p+1}a^2 \right] \end{aligned}$$

根据条件  $(Q_2')$  可得: 对  $\forall s \in (0,1)$  都有  $I_3''(s) \geq 0$ 。结合(15)与(16)可知  $I_3(s) \leq 0$ , 于是

$$I(x) = s^p I_3(s) \leq 0, x \in R.$$

证毕。

**定理 3** 如果存在满足**定理 1**或**定理 2**的常数  $p > 1, a > 0, 0 < s < 1$  使得  $(U_+(x), V_+(x)) = (\sigma_p(ax)^p, \sigma_p(ax))$  是(5)的上解, 那么传播速度  $c < 0$ 。

**证明:** 此证明与[9]类似, 在此省略。

### 3. 确定双稳行波传播速度的符号

在本节中, 我们确定双稳行波  $(U(x+ct), V(x+ct))$  的传播速度  $c$  的符号。由于模型的复杂性, 我们未能找到如文献[9]中所述的参数函数以直接应用**定理 1**和**定理 2**。然而, 通过选取若干特殊参数值, 我们在简化计算的同时, 仍获得了令人满意的结果。

**定理 4** 如果系统参数满足

$$\frac{(k_1-1)(k_1+1)(k_1+2)}{2k_1(k_1^2+4k_1+1)} \geq \frac{1}{4} \quad (17)$$

以及

$$4(k_2+k_4) \leq \frac{d}{r} \leq \frac{2(k_1+1)(k_1+2)}{3}, \quad (18)$$

则波速满足  $c < 0$ 。

**证明:** 在**定理 1**中取  $p = k_1$  与  $a = \frac{1}{2}$ 。此时条件  $(Q_1)$  以及条件  $(Q_2)$  的前半部分成立。将  $p = k_1$  与  $a = \frac{1}{2}$  代入  $(Q_2)$  的后半部分, 由不等式(17)可保证其成立; 类似地, 代入  $(Q_3)$  后, 由(18)可保证其成立。因此**定理 1**的所有条件均被满足, 根据**定理 3**即得  $c < 0$ 。证毕。

**定理 5** 如果系统参数满足以下条件:

$$\frac{48(k_3+1)}{49} < \frac{r}{d} < \frac{4(k_1-1)}{9} \quad (19)$$

以及

$$k_2+k_4 \leq \frac{35}{24}, \quad (20)$$

则波速满足  $c < 0$ 。

证明: 在定理 2 中取  $p = \frac{3}{2}$  与  $a = \sqrt{\frac{35r}{24d}}$ 。由不等式(19)左端可得  $\frac{35r}{24d} > \frac{10(k_3+1)}{7}$ , 结合  $a, p$  的取值可知条件  $(Q_2')$  成立; 由(20)得  $\frac{r(k_2+k_4)}{d} \leq \frac{35r}{24d}$ , 结合  $a, p$  的取值可知条件  $(Q_3)$  成立; 由(19)右端可得  $\frac{35r}{24d} < \frac{35}{54}(k_1-1)$ , 结合  $a, p$  的取值可知条件  $(Q_4)$  成立。因此定理 2 的全部条件均成立, 根据定理 3 即得  $c < 0$ 。证毕。

## 基金项目

湖南省自然科学基金面上项目(项目编号: 2025JJ50010), 湖南省教育厅重点项目(项目编号: 23A0342)。

## 参考文献

- [1] Maynard Smith, J. (1974) *Models in Ecology*. Cambridge University Press.
- [2] Chattopadhyay, J. (1996) Effect of Toxic Substances on a Two-Species Competitive System. *Ecological Modelling*, **84**, 287-289. [https://doi.org/10.1016/0304-3800\(94\)00134-0](https://doi.org/10.1016/0304-3800(94)00134-0)
- [3] Ma, M., Huang, Z. and Ou, C. (2019) Speed of the Traveling Wave for the Bistable Lotka-Volterra Competition Model. *Nonlinearity*, **32**, 3143-3162. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab231c>
- [4] Ma, M., Zhang, Q., Yue, J. and Ou, C. (2020) Bistable Wave Speed of the Lotka-Volterra Competition Model. *Journal of Biological Dynamics*, **14**, 608-620. <https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1795284>
- [5] Rodrigo, M. and Mimura, M. (2001) Exact Solutions of Reaction-Diffusion Systems and Nonlinear Wave Equations. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **18**, 657-696. <https://doi.org/10.1007/bf03167410>
- [6] Girardin, L. (2019) The Effect of Random Dispersal on Competitive Exclusion—A Review. *Mathematical Biosciences*, **318**, Article 108271. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2019.108271>
- [7] Girardin, L. and Nadin, G. (2015) Travelling Waves for Diffusive and Strongly Competitive Systems: Relative Motility and Invasion Speed. *European Journal of Applied Mathematics*, **26**, 521-534. <https://doi.org/10.1017/s0956792515000170>
- [8] Morita, Y., Nakamura, K. and Ogiwara, T. (2023) Front Propagation and Blocking for the Competition-Diffusion System in a Domain of Half-Lines with a Junction. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **28**, 6345-6361. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022136>
- [9] Nakamura, K.I. and Ogiwara, T. (2025) Propagation Speed of Traveling Waves for Diffusive Lotka-Volterra System with Strong Competition. arXiv:2510.14311.
- [10] Perthame, B. (2015) Parabolic Equations in Biology. In: Perthame, B., Ed., *Parabolic Equations in Biology*, Springer International Publishing, 1-21. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19500-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19500-1_1)
- [11] Wan, Y., Li, J. and Wang, H. (2024) The Sign of Bistable Wave Speed for a Plankton Model. *International Journal of Biomathematics*, **18**, Article 2450023. <https://doi.org/10.1142/s1793524524500232>
- [12] Kanel', I.Ya. (1962) Stabilization of Solutions of the Cauchy Problem for Equations Encountered in Combustion Theory. *Matematicheskii Sbornik (N.S.)*, **59**, 245-288.
- [13] Fife, P.C. and McLeod, J.B. (1977) The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **65**, 335-361. <https://doi.org/10.1007/bf00250432>