Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 1-7
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156260

基于特殊指数函数求取特征函数的光滑近似函数

牛　冰

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2026年4月29日；录用日期：2026年5月23日；发布日期：2026年6月2日

摘　要

本文针对概率约束优化问题中特征函数的非光滑性导致的数值优化困难，提出了一种基于特殊指数函数构造的新型光滑近似函数。概率约束优化问题在航空航天、铁路调度、通信网络及能源管理等领域具有广泛应用，但特征函数的非连续性与非光滑性使得直接进行梯度计算或数值优化极其困难。为克服这一挑战，本文首先分析了传统Sigmoid型光滑近似函数在收敛速度和参数调节灵活性方面的局限性，进而通过倒数变换与指数函数构造了新的光滑近似函数。理论分析验证了该函数满足值域规范、极限一致、分段单调性及无穷阶可微等核心性质。数值实验表明，相较于常规近似函数，本文提出的方法具有更快的收敛速度和更敏锐的参数调节机制，能够更好地适应不同约束特征和随机分布下的概率约束优化场景，为该类问题的求解提供了新的有效工具。

关键词

概率约束优化，特征函数，光滑近似，指数函数，收敛性分析

Smooth Approximation of Characteristic Functions Based on Special Exponential Functions

Bing Niu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: April 29, 2026; accepted: May 23, 2026; published: June 2, 2026

Abstract

To address the numerical optimization difficulties caused by the non-smoothness of characteristic

文章引用：牛冰．基于特殊指数函数求取特征函数的光滑近似函数[J]．应用数学进展, 2026, 15(6): 1-7.
DOI: 10.12677/aam.2026.156260

functions in probabilistically constrained optimization problems, this paper proposes a novel smooth approximation function constructed based on special exponential functions. Probabilistically constrained optimization problems have extensive applications in aerospace, railway scheduling, communication networks, and energy management. However, the discontinuity and non-smoothness of characteristic functions make direct gradient computation or numerical optimization extremely challenging. To overcome this difficulty, this paper first analyzes the limitations of traditional Sigmoid-type smooth approximation functions in terms of convergence speed and parameter adjustment flexibility, and then constructs a new smooth approximation function through reciprocal transformation and exponential functions. Theoretical analysis verifies that the proposed function satisfies core properties including range normalization, limit consistency, piecewise monotonicity, and infinite-order differentiability. Numerical experiments demonstrate that compared with conventional approximation functions, the proposed method exhibits faster convergence speed and more sensitive parameter adjustment mechanisms, enabling better adaptation to probabilistically constrained optimization scenarios with different constraint characteristics and random distributions, thus providing a new effective tool for solving such problems.

Keywords

Probabilistically Constrained Optimization, Characteristic Function, Smooth Approximation, Exponential Function, Convergence Analysis

1. 引言

概率约束优化问题(Jointly Constrained Probabilistic Problems, JCCP)在航空航天、铁路调度、通信网络、能源管理以及计算机科学等诸多实际领域中具有广泛的应用价值。在处理这些现实世界的问题时，系统往往面临天气波动、设备故障或需求随机性等不确定因素的挑战。为了提高决策的鲁棒性，一种行之有效的策略是采用概率约束，即确保所有约束条件在给定的高概率水平下得到满足[1]。

$$\begin{aligned}&\min_{x\in X}\ g(x)\\&\text{s.t.}\quad \Pr\{c_1(x,\xi)\le 0, c_2(x,\xi)\le 0,\cdots,c_m(x,\xi)\le 0\}\ge 1-\alpha\end{aligned}\tag{JCCP}$$

其中，x 是 l 维的决策随机向量，$x\in R^l$，ξ 是支撑 $\Xi\subset R^k$ 的 k 维随机向量，$\alpha\in(0,1)$。其中，$g:R^l\to R$ 和 $c_i:R^l\times\Xi\to R, i=1,2,\cdots,m$ 是实值函数并且对于 $\forall\xi\in\Xi$，函数 $g:R^l\to R$ 和 $c_i:R^l\times\Xi\to R, i=1,2,\cdots,m$ 关于 x 都是凸连续可微的。

设

$$c(x,\xi)=\max\{c_1(x,\xi),c_2(x,\xi),\cdots,c_m(x,\xi)\},$$

$$P(x)=1-\Pr\{c_1(x,\xi)\le 0,c_2(x,\xi)\le 0,\cdots,c_m(x,\xi)\le 0\}=\Pr\{c(x,\xi)>0\}.$$

从而，问题(JCCP)就可以改写为如下形式：

$$\begin{aligned}&\min_{x\in X}\ g(x)\\&\text{s.t.}\quad p(x)\le\alpha.\end{aligned}\tag{P}$$

为了方便记法，将问题(P)改写为：

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad g(x) \\ &\text{s.t.} \quad E\left[1_{(0,+\infty)}\left(c(x,\xi)\right)\right] \le \alpha, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，

$$1_{(0,+\infty)}(z) = \begin{cases} 1, & z \in (0,+\infty), \\ 0, & z \notin (0,+\infty). \end{cases}$$

然而，在求解该问题的过程中，由于特征函数本质上具有非连续性与非光滑性，直接对其进行梯度计算或数值优化极其困难。因此，构建特征函数的高质量光滑近似函数成为了该领域的研究重点。传统上，研究者常采用 Sigmoid 型函数作为光滑近似函数。例如，任等人[2]基于 Sigmoid 函数，将概率约束函数光滑化并建立了相应的光滑近似问题，通过收敛性分析证明了当参数充分大时，光滑近似问题与原问题等价。Ren 等人[3]进一步系统研究了基于 Sigmoid 函数的概率约束优化光滑近似方法，分析了其收敛性质和参数选择策略。然而，这些基于 Sigmoid 函数的方法在实际计算中仍存在以下共同局限性：一是收敛速度受限于参数调节范围较窄，在逼近精度要求较高时所需的平滑参数过大，导致数值稳定性下降；二是该类函数在特征函数跳变点附近的梯度变化不够剧烈，难以在较低平滑参数下实现快速逼近；三是参数调节机制不够灵敏，难以灵活适应不同约束特征和随机分布下的概率约束优化场景。

尽管上述方法在理论上满足光滑近似的基本要求，但在实际计算中仍存在收敛速度受限、参数调节不够灵活、对跳变点附近逼近能力不足等局限性。

针对上述挑战，本文提出并构建了一种基于特殊函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^t}{t^2}$ 的光滑近似函数

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}}.$$

通过理论分析与数值实验，本文验证了该近似函数在以下两个方面具有显著优势：

1) 更快的收敛速度：相较于常规函数，双曲正切近似函数在迭代初期能以更快的速度逼近真实的特征函数，从而显著提升整体优化过程的收敛效率。

2) 更强的灵活性：该函数的参数调整机制更为敏锐，能够更好地适应不同约束特征和随机分布下的概率约束优化场景。

本文随后将从函数的值域、极限性质、单调性以及无穷阶可微性等五个核心维度对该函数进行严谨的数学验证。

2. 特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$ 的光滑近似函数

2.1. 构造函数

定义 1 [2] 令 $\varphi: R^2 \to R^+$ 是一个非负的实值函数，$\varphi(z,t)$ 满足以下两个条件：

1) 函数 $\varphi(z,t)$ 是一光滑函数，其中 $t>0$ 是一个参数；

2) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(z,t) = 1_{(0,+\infty)}(z)$；

则称函数 $\varphi(z,t)$ 是 $1_{(0,+\infty)}(z)$ 的一个光滑近似函数。

本文主要构建有如下性质的特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$ 的光滑近似函数。

命题 1 [3] 当 $t>0$ 时，假设函数 $\varphi(z,t)$ 有如下性质：

1) 对于任意 $z \in R$， $\varphi(z,t) \in (0,1)$，且 $\varphi(0,t) = \dfrac{1}{2}$。

2) $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(z,t) = 1_{(0,+\infty)}(z)$， $z \in R \setminus \{0\}$。

3) 当 $z > 0$ 时， $\varphi(z,t)$ 关于 t 单调递减；当 $z < 0$ 时， $\varphi(z,t)$ 关于 t 单调递增。

4) $\varphi(z,t)$ 对于 z 来说是单调递增的。

5) $\varphi(z,t)$ 对于 z 来说是无穷阶连续可微的。

下面讨论满足上述性质的特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$， $z \in R$ 的光滑近似函数，及其构造方法。

例 1：考虑函数 $\varphi(z,t) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^t}{t^2}+1\right)^{-z}}$，

由图 1 可知当 $t \to 0$ 时， $\varphi(z,t)$ 是特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$， $z \in R$ 的一个光滑近似函数。

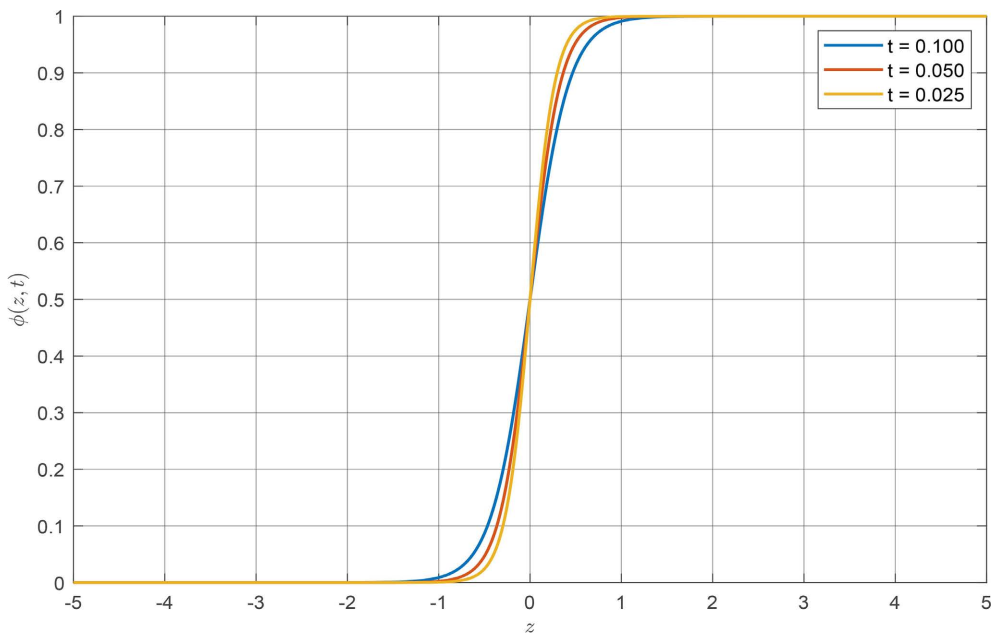

Figure 1. Image of function $\varphi(z,t)$

图 1. 函数 $\varphi(z,t)$ 的图像

验证函数 $\varphi(z,t)$ 是否满足上述性质：

1) 由上述构造方法可知对于任意 $z \in R$， $\varphi(z,t) \in (0,1)$；且当 $z = 0$ 可得 $\varphi(0,t) = \dfrac{1}{2}$。

2) 判断当 $z \in R \setminus \{0\}$ 时，是否有 $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(z,t) = 1_{(0,+\infty)}(z)$ 成立。

当 $z > 0$ 时， $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(z,t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^t}{t^2}+1\right)^{-z}} = 1$。

当 $z < 0$ 时， $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(z,t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^t}{t^2}+1\right)^{-z}} = 0$。

3) 判断当 $z>0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递减；当 $z<0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递增。

$$\varphi(z,t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}}.$$

首先，我们将计算 $\varphi(z,t)$ 关于 t 的偏导数。计算得到 $\varphi(z,t)$ 关于 t 的导数为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{z\cdot\mathrm{e}^{t}(t-2)}{t^{3}\cdot\left(1+\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\right)^{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{z+1}}.$$

接下来，我们需要分析这个导数的符号。当 $z>0$ 时，由于 $t\in(0,\delta)$，我们可得 $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z,t)<0$，$\varphi(z,t)$ 关于 t 单调递减。同理可得，当 $z<0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递增。

4) 判断 $\varphi(z,t)$ 关于 z 是否是单调递增的。

首先，我们需要计算函数 $\varphi(z,t)$ 关于 z 的导数，计算得到函数 $\varphi(z,t)$ 关于 z 的偏导数为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\right)^{2}}.$$

接下来，我们需要分析这个导数的符号。由于 $t>0$，我们可以看到分子

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)$$

总是正的，分母

$$\left(1+\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\right)^{2}$$

也总是正的。

因此，偏导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}\right)^{2}}$$

总是正的，即 $\varphi(z,t)$ 关于 z 是单调递增的。

5) 判断 $\varphi(z,t)$ 关于 z 是否是无穷阶连续可微的。

为验证 $\varphi(z,t)$ 关于 z 的无穷阶连续可微性，需考察其构成要素：$\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}$ 和 $\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z}$。

由于

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}+1\right)^{-z},$$

是指数函数，所以

$$\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}+1,$$

也是指数函数。又由于

$$\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}+1>0,$$

恒成立，所以其倒数也是光滑函数。

综上，$\varphi(z,t)$ 是特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$ 的一个光滑近似函数。

2.2. 光滑近似函数的理论收敛性分析

除满足命题 1 所列的基本性质外，本节进一步从理论上分析所构造的光滑近似函数 $\varphi(z,t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}}$ 对特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$ 的逼近性能。

定理 2 (跳变点附近的梯度特性)： 函数 $\varphi(z,t)$ 在 $z=0$ 处的导数为

$$\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial z}=\left.\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)^{-z}\right)^2}\right|_{z=0}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right).$$

证 令 $u=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)$，则函数可改写为 $\varphi(z,t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-uz}}$。对 z 求偏导得 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{u\mathrm{e}^{-uz}}{\left(1+\mathrm{e}^{-uz}\right)^2}$，代入 $z=0$ 即得 $\frac{u}{4}$。该结果表明，函数在跳变点处的斜率与 u 成正比。

定理 3 (收敛速度的比较分析) 对于传统的 Sigmoid 型光滑函数 $\varphi_s(z,t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{-z}{t}}}$，其对应的参数 $u_s=\frac{1}{t}$。对于本文所构造的函数 $u_{new}=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)$。当 $t\to+\infty$ 时，有如下渐近关系：

由于 $\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\to+\infty$ $(t\to+\infty)$，所以 $u=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)\sim\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right)=t-2\ln t$，即 $u\sim t$。然而 $u_s=\frac{1}{t}$。当 t 较大时，$u=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}+1\right)$ 远大于 $u_s=\frac{1}{t}$。由于光滑函数与特征函数之间的 L1 误差为 $2\frac{\ln 2}{u}$，本文所构造函数的误差收敛阶为 $O\left(\frac{1}{t}\right)$，而传统 Sigmoid 函数的误差收敛阶为 $O(t)$。需要说明的是，传统方法的误差随 t 增大而增大，而本文方法的误差随 t 增大而减小，这一差异源于参数定义方式的不同：在传统 Sigmoid 函数中，t 通常作为分母出现，即 $\varphi_s(z,t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{-z}{t}}}$，$t$ 越大函数越平坦；而在本文函数中，t 通过指数形式 e^t 出现，t 越大函数越陡峭。因此，在相同的参数取值下，本文方法能够以更快的速度逼近真实的特征函数。

3. 问题(P)的等价问题

设 $\overline{p}(x,t) := E[\varphi(z,t)] = E[\varphi(c(x,\xi),t)]$，并且有 $\overline{p}(x) = \lim_{t\to 0}\overline{p}(x,t)$。进而我们可以建立问题(P)的近似问题[4]：

$$\begin{aligned}&\min_{x\in X}\quad g(x)\\ &\text{s.t.}\quad \overline{p}(x)\le\alpha\end{aligned}\qquad(\overline{\mathrm{P}})$$

接下来，为了证明问题(P)与问题($\overline{\mathrm{P}}$)等价，给出以下假设：

假设 1 集合 X 是 $\mathbb{R}^l$ 的紧致凸子集，并且随机变量 ξ 的支撑集 $\Xi\in R^n$ 是 R^k 闭子集。对于任意的 $\xi\in R^n$，函数 $g(x)$ 和 $c_i(x,\xi)$，$i=1,\cdots,m$，关于 $\forall x\in D$ 都是凸连续可微的，其中 D 是集合 X 一个有界的开集。

假设 2 对于 $\forall x\in R^l$，函数 $c(x,\cdot)$ 都是可测的，并且 $c(x,\cdot)$ 对于几乎所有的 $\xi\in\Xi$ 都是连续的。

假设 3 对于任意 $\overline{x}\in X$，集合 $\{\xi\in\Xi : c(\overline{x},\xi)=0\}$ 的 P 测度为零，即 $c(\overline{x},\xi)\neq 0$ 几乎必然成立。

定理 1 [1]：若假设 1~3 成立。那么，对于任何 $x\in X$ 和 $t>0$，有 $\lim_{t\to 0}\overline{p}(x,\mu)=p(x)$ 成立，即问题(P)与问题($\overline{\mathrm{P}}$)等价。

证明：令 $z=c(x,\xi)$，由例 1 和 Lebsgue 控制收敛定理可知，

$$\begin{aligned}\overline{p}(x) &= \lim_{t\to 0}\overline{p}(x,t) = \lim_{t\to 0}E[\varphi(c(x,\xi),t)]\\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\Xi}\varphi(c(x,\xi),t)\,\mathrm{d}P(\xi)\\ &= \int_{\Xi}\lim_{t\to 0}\varphi(c(x,\xi),t)\,\mathrm{d}P(\xi)\\ &= \int_{\Xi}I_{(0,+\infty)}(c(x,\xi))\,\mathrm{d}P(\xi)\\ &= E\left[I_{(0,+\infty)}(c(x,\xi))\right]\\ &= P(x)\end{aligned}$$

从而，问题(P)与问题($\overline{\mathrm{P}}$)等价。

参考文献

[1] Ren, Y., Sun, Y., Li, D. and Guo, F. (2024) A D.C. Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints Based on Chen-Harker-Kanzow-Smale Smooth plus Function. *Mathematical Methods of Operations Research*, **99**, 179-203. https://doi.org/10.1007/s00186-024-00859-y

[2] 任咏红, 张晓有, 马燕妮. 概率约束规划问题的一个光滑近似[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(1): 7-10.

[3] Ren, Y.H., Xiong, Y., Yan, Y.H. and Gu, J. (2022) A Smooth Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints Based on Sigmoid Function. *Journal of Inequalities and Applications*, **2022**, Aticle No. 38. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02774-4

[4] 任咏红, 池慧, 姜欢. 特征函数 $1_{0,+\infty}$(z)的一个光滑 D.C.近似函数[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(4): 438-442.