

# Petersen染色猜想的可能最小反例

高漪妮

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年3月2日; 录用日期: 2026年3月26日; 发布日期: 2026年4月7日

## 摘要

Petersen染色猜想是图论在完美匹配方向上的一个仍未被证明的重要猜想, 其表述为任意一个无桥三正则图都有Petersen染色。1985年, Jaeger证明了Petersen染色猜想等价于任意一个无桥三正则图都有normal 5-边染色。若无桥三正则图G有一个正常5-边染色, 对于图G中的任一条边, 其四条邻边与这条边总共用了3种或5种颜色, 则称该正常5-边染色是图G的一种normal 5-边染色, 其中与邻边共用了3种颜色的边被称为穷边, 与邻边共用了5种颜色的边被称为富边。关于这两个猜想的结论大多是在一些特殊图类上, 但对于一些长久存在的猜想, 也有部分学者考虑其可能最小反例的性质, 本文从Petersen染色猜想的等价猜想的性质出发研究Petersen染色猜想的可能最小反例的性质, 证得Petersen染色猜想的可能最小反例必然是循环4-边连通的。

## 关键词

Petersen染色猜想, 可能最小反例, 循环边连通度

# The Possible Minimum Counterexample of Petersen Colouring Conjecture

Yini Gao

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 2, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 7, 2026

## Abstract

Petersen colouring conjecture is an important unresolved conjecture in graph theory in the direction of perfect matchings, which states that every bridgeless cubic graph has a Petersen colouring. In 1985, Jaeger proved that the Petersen colouring conjecture is equivalent to the statement that every bridgeless cubic graph has a normal 5-edge-colouring. If a bridgeless cubic graph G has a normal 5-edge-

colouring such that for any edge in graph  $G$ , the four adjacent edges together with this edge use either 3 or 5 colours, this normal 5-edge-colouring is called a normal 5-edge-colouring of graph  $G$ , where edges sharing 3 colours with adjacent edges are called poor edges and edges sharing 5 colours with adjacent edges are called rich edges. Most conclusions about these two conjectures are on some special classes of graphs, but for some long-standing conjectures, some scholars have also considered the properties of their possible minimum counterexample. This paper studies the properties of possible minimum counterexample of the Petersen colouring conjecture from the perspective of the equivalent conjecture's properties and proves that a possible minimum counterexample of the Petersen colouring conjecture must be cyclically 4-edge-connected.

## Keywords

Petersen Colouring Conjecture, Possible Minimum Counterexample, Cyclically Edge Connectivity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引理

记 Petersen 图为  $P_{10}$ ，若无桥三正则图  $G$  存在映射  $\varphi: E(G) \rightarrow E(P_{10})$ ，使得对于图  $G$  中任意一点  $v$ ， $P_{10}$  中都存在一点  $w$  满足  $\varphi(\partial_G\{v\}) = \partial_{P_{10}}\{w\}$ ，则称图  $G$  有 Petersen 染色。

图  $G$  的正常  $k$ -边染色是一个从边到颜色集  $\{1, 2, \dots, k\}$  的映射  $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ，使得图  $G$  中任意两条相邻的边在映射  $\varphi$  下是不同的颜色。若图  $G$  有正常  $k$ -边染色，但无正常  $(k-1)$ -边染色，则称图  $G$  是  $k$ -边可染的。不是 3-边可染的无桥三正则图被称为 snark。若无桥三正则图  $G$  有一个正常 5-边染色，对于图  $G$  中的任一条边，其四条邻边与这条边总共用了 3 种或 5 种颜色，则称该正常 5-边染色是图  $G$  的一种 normal 5-边染色，其中与邻边共用了 3 种颜色的边被称为穷边，与邻边共用了 5 种颜色的边被称为富边。

Jaeger 于 1985 年 [1] 初步表述了 Petersen 染色猜想，提出了如下猜想 2，并证明了这两个猜想是等价的，后于 1988 年 [2] 正式提出 Petersen 染色猜想。

**猜想 1** (Petersen 染色猜想 [2]) 任意一个无桥三正则图都有 Petersen 染色。

**猜想 2** [1] 任意一个无桥三正则图都有 normal 5-边染色。

目前关于这两个猜想的可能最小反例性质的结果比较少，大部分学者探究的是使得猜想成立的图类，例如下述定理 1 和定理 2，虽然定理 1 与定理 2 未直接参与本文主要定理的推导过程，但这两项成果聚焦于图结构的正向生成，与本文可能最小反例性质分析共同构成了对这两个猜想的多维度探究。

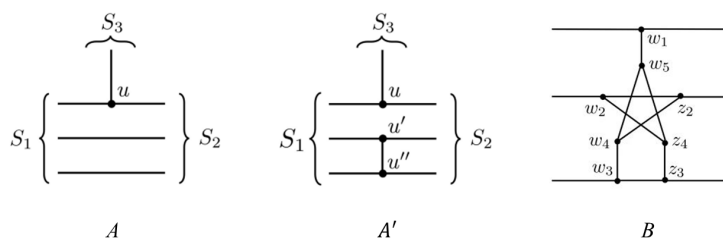
2024 年，Sedlar 和 Škrekovski [3] 证明了如下结论：

**定理 1** [3] 若一个 snark  $G$  有 normal 5-边染色， $C$  为  $G$  中的一个偶圈，对于圈  $C$  上的点用图  $A$  或  $A'$  替换，边用由 Petersen 图得到的图  $B$  替代得到的图仍为 snark 且有 normal 5-边染色，见图 1。

2026 年，Zhou, Hao 和 Luo 等人 [4] 证明了如下结论：

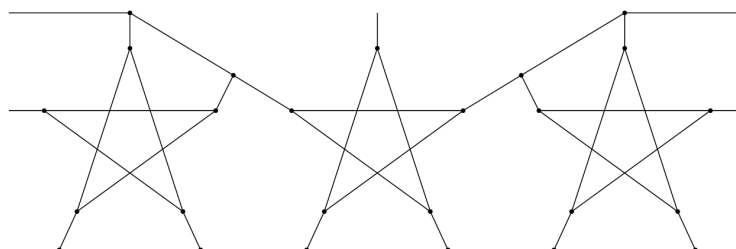
**定理 2** [4] 若一个无桥三正则图  $G$  有 normal 5-边染色， $C$  为  $G$  中的一个圈，对于圈  $C$  上的点用图  $Z$  替换得到的图仍有 normal 5-边染色，见图 2。

对于一些长久存在的猜想，也有部分学者研究其可能最小反例的性质。Fulkerson 于 1971 年提出的 Berge-Fulkerson 猜想 [5] 以及 Fan 和 Raspaud 于 1994 年提出的 Fan-Raspaud 猜想 [6] 是图论在完美匹配方向上的两个重要猜想，Berge-Fulkerson 猜想是 Petersen 染色猜想的推论，可推出 Fan-Raspaud 猜想。



**Figure 1.** Replacement diagram  $A'$  (left),  $A'$  (middle) of vertices and replacement diagram B (right) of edges in Theorem 1

**图 1.** 定理 1 中点的替换图  $A$  (左图)、 $A'$  (中间的图) 和边的替换图 B (右图)



**Figure 2.** Replacement diagram Z of vertices in Theorem 2

**图 2.** 定理 2 中点的替换图 Z

**猜想 3** (Berge-Fulkerson 猜想[5]) 对于任意一个无桥三正则图, 都存在 6 个完美匹配, 使得每条边恰好被 2 个完美匹配覆盖。

**猜想 4** (Fan-Raspaud 猜想[6]) 任意一个无桥三正则图都有 3 个完美匹配  $M_1, M_2, M_3$ , 使得  $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$ 。

2019 年, Mkrtchyan 和 Vardanyan [7] 提出了下述猜想 5, 并证明了该猜想的可能最小反例的如下循环边连通度:

**猜想 5** [7] 图  $G$  是一个无桥三正则图, 边  $e, f, g$  是图  $G$  中与同一个点相关联的三条边,  $i, j, k$  是三个实数, 满足如下条件:

$$i + j + k = 3, 0 \leq i, j, k \leq 2,$$

则  $G$  包含一个 FR-triple  $C$ , 使得

$$v_C(e) = i, v_C(f) = j, v_C(g) = k.$$

**定理 3** [7] 猜想 5 的可能最小反例必然是循环 4-边连通的 snark。

2020 年, Mazzuocolo 和 Zerafa [8] 证明了上述猜想 5 等价于 Fan-Raspaud 猜想。

2020 年, Máčajová 和 Mazzuocolo [9] 证明了 Berge-Fulkerson 猜想的可能最小反例的如下循环边连通度:

**定理 4** [9] 若 Berge-Fulkerson 猜想存在反例, 则其最小反例必然是循环 5-边连通的 snark。

本文从猜想 2 的性质出发, 探究 Petersen 染色猜想的可能最小反例的循环边连通度, 得到如下结果:

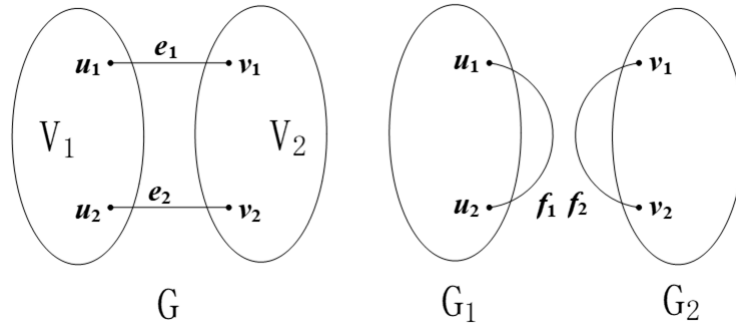
**定理 5** Petersen 染色猜想的可能最小反例必然是循环 4-边连通的。

## 2. 定理 5 的证明

本章证明了定理 5, 即证明了 Petersen 染色猜想(猜想 1)的可能最小反例是循环 4-边连通的。

**定理 5 的证明** 因 Petersen 染色猜想等价于猜想 2, 故可据猜想 2 的性质探究 Petersen 染色猜想的可能最小反例的循环边连通度。假设图  $G$  为猜想 2 的最小反例, 因图  $G$  无桥, 故图  $G$  无循环 1-边割。

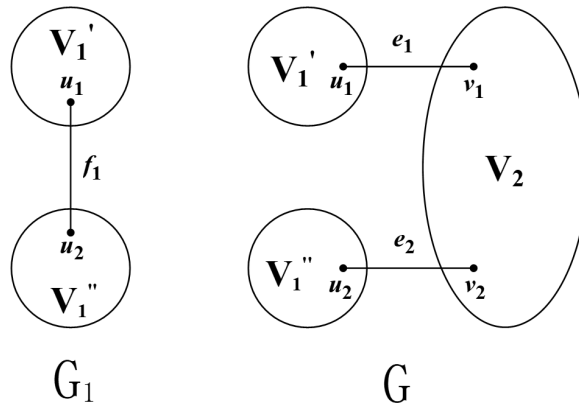
若图  $G$  有循环 2-边割  $S_2 = \{e_1, e_2\}$ ,  $S_2$  将图  $G$  分成两个有圈的分支, 它们的点集分别为  $V_1$  和  $V_2$ , 这两个分支的阶都不小于 3, 记  $e_1 = u_1v_1$ ,  $e_2 = u_2v_2$ , 其中  $u_1, u_2 \in V_1$ ,  $v_1, v_2 \in V_2$ 。在图  $G$  中删去边  $e_1, e_2$ , 连接  $u_1$  和  $u_2$ 、 $v_1$  和  $v_2$ , 两条边分别记为  $f_1$  和  $f_2$ , 则就得到两个比图  $G$  小的有圈三正则图  $G_1$  和  $G_2$ , 如图 3。



**Figure 3.** The minimum counterexample  $G$  (left) of Conjecture 2 and two smaller cubic graphs with cycle than  $G$  (right)

**图 3.** 猜想 2 的最小反例  $G$  (左图) 和两个比  $G$  小的有圈三正则图 (右图)

图  $G_i$  无桥, 否则, 若图  $G_i$  有桥, 不妨以图  $G_1$  为例, 若桥不是边  $f_1$ , 则该桥也是图  $G$  的桥, 这与图  $G$  无桥矛盾; 若桥是边  $f_1$ , 将图  $G_1$  分为两个分支, 它们的点集分别为  $V_1'$  和  $V_1''$ , 点  $u_1$  和点  $u_2$  不在同一个分支内, 不妨设点  $u_1$  在点集  $V_1'$  中, 点  $u_2$  在点集  $V_1''$  中, 此时图  $G_1$  及图  $G$  如下图 4, 显然边  $e_1$  为图  $G$  的桥, 这与图  $G$  无桥矛盾, 故图  $G_i$  无桥, 故图  $G_i$  为比图  $G$  小的无桥三正则图。



**Figure 4.** The graph  $G_1$  (left) and  $G$  (right) when the bridge of the graph  $G_1$  is edge  $f_1$

**图 4.** 图  $G_1$  的桥为边  $f_1$  时的图  $G_1$  (左图) 和图  $G$  (右图)

因图  $G$  为猜想 2 的最小反例, 故图  $G_1$  和  $G_2$  都有 normal 5-边染色, 通过颜色的置换, 使得边  $f_1$  和  $f_2$  都染颜色 1, 与点  $u_1$  相邻的除边  $f_1$  外的两条边分别染颜色 2 和颜色 3, 与点  $v_1$  相邻的除边  $f_2$  外的两条边分别染颜色 2 和颜色 3, 则图  $G_1$  和  $G_2$  都会有如下两种情况, 见图 5。

- (1) 与点  $u_2$  ( $v_2$ ) 相邻的除边  $f_1$  ( $f_2$ ) 外的两条边分别染颜色 2 和颜色 3;
- (2) 与点  $u_2$  ( $v_2$ ) 相邻的除边  $f_1$  ( $f_2$ ) 外的两条边分别染颜色 4 和颜色 5。

在图  $G$  中, 对边  $e_1$  和  $e_2$  都染颜色 1, 其他边染图  $G_1$  和  $G_2$  中对应的边的颜色, 可得到图  $G$  的一个正常 5-边染色。在图  $G$  的这种正常 5-边染色下, 除边  $e_1$  和  $e_2$  外的其他边显然都是穷边或富边; 边  $e_1$  及其四

条邻边共用了 3 种颜色进行染色, 故边  $e_1$  为穷边; 若图  $G_1$  和  $G_2$  都是情况 1 或都是情况 2, 则边  $e_2$  及其四条邻边共用了 3 种颜色进行染色, 故边  $e_2$  是穷边, 若图  $G_1$  和  $G_2$  一个是情况 1, 另一个是情况 2, 则边  $e_2$  及其四条邻边共用了 5 种颜色进行染色, 故边  $e_2$  是富边, 因此, 图  $G$  中任意一条边在该正常 5-边染色下都是穷边或富边, 故该正常 5-边染色即为图  $G$  的 normal 5-边染色, 这与图  $G$  为猜想 2 的反例矛盾, 故图  $G$  无循环 2-边割。

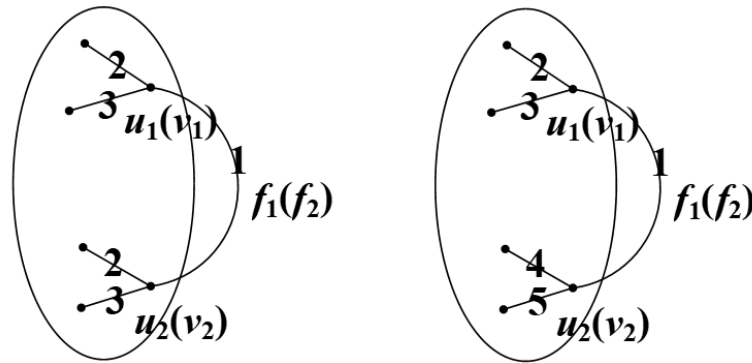


Figure 5. Case 1 (left) and case 2 (right)  
图 5. 情况 1 (左图) 和情况 2 (右图)

若图  $G$  有循环 3-边割  $S_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $S_3$  将图  $G$  分成两个有圈的分支, 它们的点集分别为  $V_1$  和  $V_2$ , 这两个分支的阶都不小于 3, 记  $e_1 = u_1v_1$ ,  $e_2 = u_2v_2$ ,  $e_3 = u_3v_3$ , 其中  $u_1, u_2, u_3 \in V_1$ ,  $v_1, v_2, v_3 \in V_2$ 。在图  $G$  中删去边  $e_1, e_2, e_3$ , 加上两个点  $u$  和  $v$ , 点  $u$  分别与点  $u_1, u_2, u_3$  连接, 三条边分别记为  $f_1, f_2, f_3$ , 点  $v$  分别与点  $v_1, v_2, v_3$  连接, 三条边分别记为  $g_1, g_2, g_3$ , 则就得到两个比图  $G$  小的有圈三正则图  $G_1$  和  $G_2$ , 如图 6。

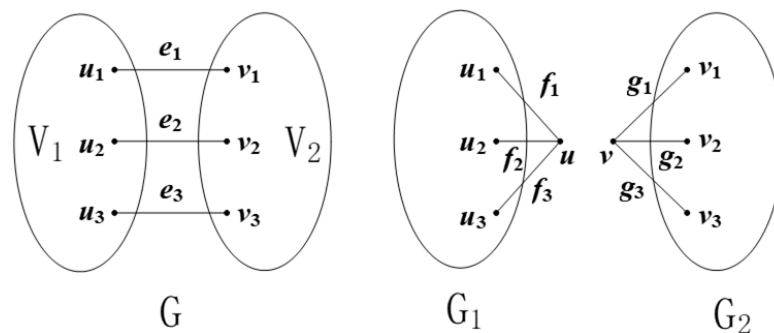


Figure 6. The minimum counterexample  $G$  (left) of Conjecture 2 and two smaller cubic graphs with cycle than  $G$  (right)  
图 6. 猜想 2 的最小反例  $G$  (左图) 和两个比  $G$  小的有圈三正则图 (右图)

图  $G_i$  无桥, 否则, 若图  $G_i$  有桥, 不妨以图  $G_1$  为例, 若桥不是边  $f_i$ , 则该桥也是图  $G$  的桥, 这与图  $G$  无桥矛盾; 若桥是边  $f_i$ , 不妨设是边  $f_1$ , 将图  $G_1$  分为两个分支, 它们的点集分别为  $V'_1$  和  $V''_1$ , 点  $u_1$  和点  $u$  不在同一个分支内, 不妨设点  $u_1$  在点集  $V'_1$  中, 点  $u$  在点集  $V''_1$  中, 则点  $u_2$  和点  $u_3$  也在点集  $V''_1$  中, 此时图  $G_1$  及图  $G$  如下图 7, 显然边  $e_1$  为图  $G$  的桥, 这与图  $G$  无桥矛盾, 故图  $G_i$  无桥, 故图  $G_i$  为比图  $G$  小的无桥三正则图。

因图  $G$  为猜想 2 的最小反例, 故图  $G_1$  和  $G_2$  都有 normal 5-边染色, 通过颜色的置换, 使得边  $f_1$  和  $g_1$  都染颜色 1, 边  $f_2$  和  $g_2$  都染颜色 2, 边  $f_3$  和  $g_3$  都染颜色 3, 则图  $G_1$  中的边  $f_i$  的除  $f_j$  和  $f_k$  外的两条邻边 ( $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ , 且互不相等), 以及图  $G_2$  中的边  $g_i$  除  $g_j$  和  $g_k$  外的两条邻边都会有如下两种情况, 见图 8。

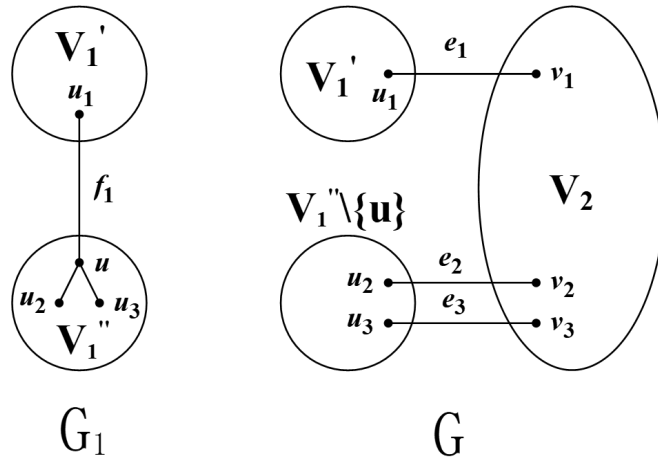


Figure 7. The graph  $G_1$  (left) and  $G$  (right) when the bridge of the graph  $G_1$  is edge  $f_1$

图 7. 图  $G_1$  的桥为边  $f_1$  时的图  $G_1$  (左图)和图  $G$  (右图)

- (1) 边  $f_i(g_i)$  的除  $f_j(g_j)$  和  $f_k(g_k)$  外的两条邻边分别染颜色  $j$  和颜色  $k$ ;
- (2) 边  $f_i(g_i)$  的除  $f_j(g_j)$  和  $f_k(g_k)$  外的两条邻边分别染颜色 4 和颜色 5.

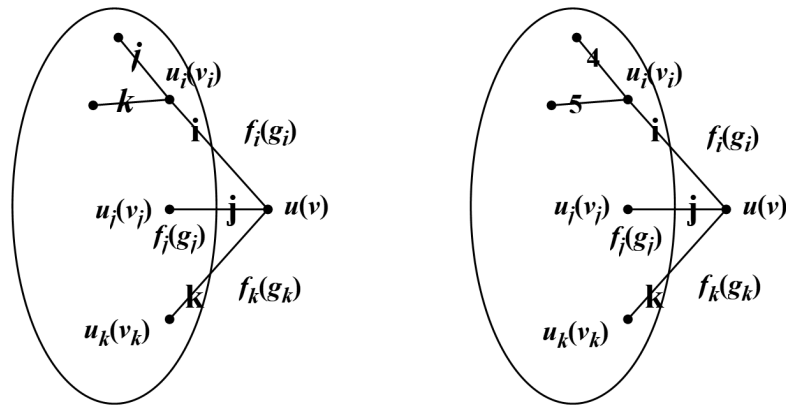


Figure 8. Case 1 (left) and case 2 (right)

图 8. 情况 1 (左图)和情况 2 (右图)

在图  $G$  中, 对边  $e_1$  染颜色 1, 边  $e_2$  染颜色 2, 边  $e_3$  染颜色 3, 其他边染图  $G_1$  和  $G_2$  中对应的边的颜色, 可得到图  $G$  的一个正常 5-边染色。在图  $G$  的这种正常 5-边染色下, 除边  $e_1$ 、 $e_2$  和  $e_3$  外的其他边显然都是穷边或富边; 对于这三条边中的任意一条边  $e_i$ , 若图  $G_1$  和  $G_2$  都是情况 1 或都是情况 2, 则它和它的四条邻边共用了 3 种颜色进行染色, 故边  $e_i$  是穷边, 若图  $G_1$  和  $G_2$  一个是情况 1, 另一个是情况 2, 则它和它的四条邻边用了 5 种颜色进行染色, 故边  $e_i$  是富边, 因此, 图  $G$  中任意一条边在该正常 5-边染色下都是穷边或富边, 故该正常 5-边染色即为图  $G$  的 normal 5-边染色, 这与图  $G$  为猜想 2 的反例矛盾, 故图  $G$  无循环 3-边割。综上, 因图  $G$  无循环 1-边割、循环 2-边割和循环 3-边割, 故图  $G$  必然是循环 4-边连通的, 即猜想 2 的可能最小反例必然是循环 4-边连通的, 因猜想 2 等价于 Petersen 染色猜想, 故 Petersen 染色猜想的可能最小反例必然是循环 4-边连通的, 定理 5 得证。

### 3. 总结与展望

本文从 Petersen 染色猜想的等价猜想的性质出发研究 Petersen 染色猜想的可能最小反例的性质, 证

得 Petersen 染色猜想的可能最小反例必然是循环 4-边连通的。其循环边连通度能否得到进一步提高是一个可以继续研究的问题,但在考虑可能最小反例存在循环 4-边割时,会存在无法由两个更小的图的 normal 5-边染色延拓得到可能最小反例的 normal 5-边染色的情况,需要对这两个更小的图的 normal 5-边染色进行改变,这是一个比较困难的问题。

## 参考文献

- [1] Jaeger, F. (1985) On Five-Edge-Colorings of Cubic Graphs and Nowhere-Zero Flow Problems. *Ars Combinatoria*, **20**, 229-244.
- [2] Jaeger, F. (1988) Nowhere-Zero Flow Problems. In: Beineke, L.W. and Wilson, R.J., Eds., *Selected Topics in Graph Theory*, Vol 3, Academic Press, 71-95.
- [3] Sedlar, J. and Škrekovski, R. (2024) Normal 5-Edge-Coloring of Some Snarks Superpositioned by the Petersen Graph. *Applied Mathematics and Computation*, **467**, Article ID: 128493. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128493>
- [4] Zhou, W., Hao, R., Luo, R. and Luo, Y. (2026) An Infinite Family of Normal 5-Edge Colorable Superpositioned Snarks. *Discrete Applied Mathematics*, **378**, 259-269. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.07.032>
- [5] Fulkerson, D.R. (1971) Blocking and Anti-Blocking Pairs of Polyhedra. *Mathematical Programming*, **1**, 168-194. <https://doi.org/10.1007/bf01584085>
- [6] Fan, G.H. and Raspaud, A. (1994) Fulkerson's Conjecture and Circuit Covers. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **61**, 133-138. <https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1039>
- [7] Mkrtchyan, V.V. and Vardanyan, G.N. (2020) On Two Consequences of Berge-Fulkerson Conjecture. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **17**, 584-586. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2019.03.018>
- [8] Mazzuocolo, G. and Zerafa, J.P. (2020) An Equivalent Formulation of the Fan-Raspaud Conjecture and Related Problems. *Ars Mathematica Contemporanea*, **18**, 87-103. <https://doi.org/10.26493/1855-3974.1860.a3d>
- [9] Máčajová, E. and Mazzuocolo, G. (2020) Reduction of the Berge-Fulkerson Conjecture to Cyclically 5-Edge-Connected Snarks. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 4643-4652. <https://doi.org/10.1090/proc/15057>