

非线性脉冲微分方程模型在害虫治理中的应用研究

李 静

云南民族大学, 就业创业指导服务中心, 云南 昆明

收稿日期: 2026年3月23日; 录用日期: 2026年4月18日; 发布日期: 2026年4月24日

摘 要

针对资源约束下的害虫综合治理需要, 本文构建了一个基于Holling-II型功能性反应与Leslie-Gower捕食结构的非线性脉冲控制害虫-天敌动力学模型。首先, 通过分析害虫灭绝子系统, 结合频闪映射与不动点理论, 证明了害虫灭绝周期解的存在性; 随后, 借助Floquet特征乘子与比较定理, 系统分析该周期解的局部渐近稳定性与全局吸引性, 并推导出害虫灭绝的阈值条件; 在此基础上, 进一步通过阈值分析与数值模拟, 探究天敌投放周期、最大致死率及半饱和常数对阈值的影响, 揭示资源有限性对种群动态的调控作用。结果表明, 资源约束会使害虫种群趋于稳定正平衡态而非彻底灭绝, 天敌种群可维持稳定水平并持续发挥生物控制功能, 因此害虫治理目标应聚焦于将害虫密度控制在经济损害阈值以下。

关键词

害虫综合治理, 非线性脉冲控制, 资源约束, 阈值条件

Study on the Application of Nonlinear Impulsive Differential Equation Models in Pest Management

Jing Li

Career and Entrepreneurship Guidance Service Center, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: March 23, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 24, 2026

Abstract

To address the requirements of integrated pest management under resource constraints, this paper develops a nonlinear impulsive control dynamic model for pest-natural enemy systems based

on Holling-II type functional response and Leslie-Gower predation structure. Firstly, by analyzing the pest-eradication subsystem and combining the stroboscopic map with the fixed point theorem, the existence of the pest-eradication periodic solution is proved. Subsequently, using Floquet characteristic multipliers and the comparison theorem, the local asymptotic stability and global attractivity of the periodic solution are systematically investigated, and the threshold condition for pest eradication is derived. On this basis, further threshold analysis and numerical simulations are carried out to explore the effects of the natural enemy release period, the maximum mortality rate and the half-saturation constant on the threshold, revealing the regulatory effect of resource limitation on population dynamics. The results demonstrate that resource constraints drive the pest population to converge to a stable positive equilibrium instead of complete extinction, while the natural enemy population can maintain a stable level and exert a sustainable biological control effect. Therefore, the objective of pest management should focus on keeping the pest density below the economic injury level.

Keywords

Integrated Pest Management, Nonlinear Impulsive Control, Resource Constraints, Threshold Condition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

农业害虫是威胁全球粮食安全的关键因素之一，不仅直接降低作物产量、劣化农产品品质，还会诱发次生病害，严重影响农业经济与国民生产。为应对这一挑战，综合害虫管理(IPM)应运而生，其核心是融合化学、生物、物理等多种防控手段，将害虫种群控制在经济损害阈值以下，同时最大限度减少对生态环境的影响[1]。其中，化学防治因高效普适，仍是应急控害的主要手段；生物防治依托天敌、病原微生物等，兼具环境友好性与可持续性，是IPM策略的核心组成[2]。

近年来，随着数学理论的持续完善与生态学研究的不断深入，数学建模方法在IPM相关研究中的应用愈发广泛且深入[3][4]。研究人员可定量分析害虫与天敌种群的动态变化，深入探究不同管理策略的防控效果。Kumari [5]构建结合化学与生物防治的IPM数学模型，检验了害虫根除与非平凡平衡态的可行性，并分析了害虫根除平衡点的局部稳定性。Li [6]考虑农药残留与延迟效应，建立带出生脉冲和农药喷洒的害虫防治模型，探究其动力学特性与平衡稳定性，明确了害虫根除和系统持久的阈值条件。Deng [7]构建了一个含密度依赖与脉冲效应的IPM模型，研究靶向杀虫剂与天敌动态释放的协同控制机制，推导了害虫根除周期解全局渐近稳定充分条件，并分析了系统的有界性和永久性。

然而，实际IPM策略常受资源有限性的制约，不同地区的经济投入、农药存量及天敌繁育能力均存在上限，传统的线性脉冲模型难以客观反映控制力度的饱和性与非均匀特征。随着非线性因素在种群动力学研究中日益受到重视[8]，Liu [9]考虑有限天敌资源、农药效应及害虫生理与行为抗性，构建非线性综合害虫管理模型，得到害虫灭绝周期解与阈值，提出天敌弹性释放与杀虫剂轮换策略；Wang [10]研究非线性脉冲控制下的害虫-天敌系统，得到无害虫周期解全局稳定阈值，发现频繁释放天敌未必利于控害，系统可产生复杂分岔与动力学行为，证明非线性脉冲控制需精细设计。为此，本文构建了具有资源约束的非线性脉冲害虫-天敌模型，将农药效力饱和与天敌投放上限非线性因素融入脉冲控制过程。

本文结构安排如下，第二节建立具有资源约束的非线性脉冲害虫-天敌模型；第三节研究害虫灭绝

周期解的存在性与稳定性，导出阈值条件；第四节进行阈值分析与数值模拟，探讨关键参数对阈值的影响，对比资源约束下的种群动态演化；最后一节总结全文并展望未来研究方向。

2. 模型建立

在农业生态系统中，害虫与天敌的种群动态可由 Holling-II 型 Leslie-Gower 捕食模型刻画，该模型可有效捕捉天敌捕食的饱和效应与害虫种群的密度制约效应。实际害虫治理中，化学防治和天敌投放等措施通常以固定周期集中实施，形成脉冲式干预。为刻画周期性人为干预下的害虫治理过程，本文在具有 Holling-II 型的 Leslie-Gower 捕食模型基础上[11]，引入脉冲控制策略，建立如下脉冲微分系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta y(t)}{x(t) + \alpha} \right], \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[s \left(1 - \frac{by(t)}{x(t) + a} \right) \right], \end{array} \right\} t \neq nT, \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t^+) = (1 - I_1(x))x(t), \\ y(t^+) = (1 - I_2(y))y(t) + \tau, \end{array} \right\} t = nT,$$

其中 $x(t), y(t)$ 分别表示 t 时刻害虫与天敌的种群密度； r 和 s 分别为两者的内禀增长率； K 为害虫环境容纳量； β 为天敌对害虫的最大捕食率； α 为功能性反应的半饱和常数； b 为天敌种群平均减少率的最大值。脉冲控制措施在 $t = nT$ 时刻实施，其中 T 为控制周期； $I_1(x)$ ， $I_2(y)$ 表示杀虫剂对害虫与天敌的瞬时致死率，且满足 $0 < I_1(x) \leq 1$ ， $0 < I_2(y) \leq 1$ ； τ 为人工投放天敌的数量。

在实际害虫防治过程中，杀虫剂的致死效应往往受到农业资源投入的制约，并表现出随种群密度变化的非线性饱和特征。为刻画这一资源有限性，引入 Hill 型函数[12]

$$I(z) = \frac{p_i \cdot z}{z + \theta_i} \quad (i=1,2, z=x,y), \quad (2)$$

以刻画害虫种群密度 x 、天敌种群密度 y 的密度依赖致死率，其中 p_1 和 p_2 分别表示杀虫剂对害虫和天敌的最大致死率 $0 < p_1 \leq 1$ ， $0 < p_2 \leq 1$ ； θ_1 和 θ_2 为半饱和常数，反映资源制约程度，将函数(2)嵌入模型(1)中，得到具有资源约束的害虫 - 天敌脉冲控制模型为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta y(t)}{x(t) + \alpha} \right], \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[s \left(1 - \frac{by(t)}{x(t) + a} \right) \right], \end{array} \right\} t \neq nT, \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t^+) = \left(1 - \frac{p_1 x(t)}{x(t) + \theta_1} \right) x(t), \\ y(t^+) = \left(1 - \frac{p_2 y(t)}{y(t) + \theta_2} \right) y(t) + \tau, \end{array} \right\} t = nT,$$

其中各参数生物学意义与模型(1)和式(2)保持一致。

3. 害虫灭绝周期解的存在性与稳定性

在害虫综合治理中，害虫灭绝周期解对应害虫被根除、天敌种群在脉冲干预下周期性波动的理想控

制状态。本节将聚焦于模型(3)的害虫灭绝子系统,通过频闪映射与不动点理论,证明周期解的存在性[13];并结合脉冲微分系统的稳定性判据,从局部与全局两个层面,分析该周期解的渐近稳定性,从而揭示在资源约束下实现害虫长期根除的关键阈值。

3.1. 害虫灭绝周期解的存在性

对于模型(3),当 $x(t)=0$ 时,可得到无害虫状态下天敌种群脉冲动力学行为的子系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = sy(t) - \frac{bs}{a}y^2(t), & t \neq nT, \\ y(t^+) = \left(1 - \frac{p_2 y(t)}{y(t) + \theta_2}\right)y(t) + \tau, & t = nT, \\ y(0^+) = y_0, \end{cases} \quad (4)$$

该子系统描述了无害虫时天敌种群的脉冲动力学行为。求解系统(4)的第一个方程,可解得

$$y(t) = \frac{1}{\left[\frac{a}{ay(nT^+) - b}\right]e^{-s(t-nT)} + \frac{b}{a}},$$

将 $t = (n+1)T$ 代入可得

$$y((n+1)T) = \frac{1}{\left[\frac{1}{y(nT^+) - \frac{b}{a}}\right]e^{-sT} + \frac{b}{a}}. \quad (5)$$

将式(5)代入(4)的脉冲条件,得到脉冲后的种群密度为

$$y((n+1)T^+) = \left[1 - \frac{p_2 y((n+1)T)}{y((n+1)T) + \theta_2}\right] \cdot y((n+1)T) + \tau. \quad (6)$$

为方便,记 $M = \frac{b}{a}(1 - e^{-sT})$ 。联立式(5)和(6),则(6)变形为

$$y((n+1)T^+) = \frac{(1 - p_2 + \theta_2 M)y^2(nT^+) + \theta_2 \left(1 - \frac{a}{b}M\right)y(nT^+)}{(M + \theta_2 M^2)y^2(nT^+) + \left[\left(1 - \frac{a}{b}M\right)(1 + 2\theta_2 M)\right]y(nT^+) + \theta_2 \left(1 - \frac{a}{b}M\right)^2} + \tau.$$

此时记 $y(nT^+) = y_n$,由此可以建立如下频闪映射

$$y_{n+1} = \frac{(1 - p_2 + \theta_2 M)y_n^2 + \theta_2 \left(1 - \frac{a}{b}M\right)y_n}{(M + \theta_2 M^2)y_n^2 + \left[\left(1 - \frac{a}{b}M\right)(1 + 2\theta_2 M)\right]y_n + \theta_2 \left(1 - \frac{a}{b}M\right)^2} + \tau \triangleq F(y_n). \quad (7)$$

令 $F(y) = \tilde{y}$,则(7)可重写为关于 \tilde{y} 的三次代数方程

$$a_1 \tilde{y}^3 + b_1 \tilde{y}^2 + c_1 \tilde{y} + d_1 = 0, \quad (8)$$

其中

$$a_1 = M + \theta_2 M^2, \quad b_1 = -\theta_2 \left(2\frac{a}{b} + \tau \right) M^2 + \left(\theta_2 - \frac{a}{b} - \tau \right) M + p_2,$$

$$c_1 = \left(\theta_2 \frac{a^2}{b^2} + 2\tau\theta_2 \frac{a}{b} \right) M^2 + \left(\tau \frac{a}{b} - \theta_2 \frac{a}{b} - 2\tau\theta_2 \right) M - \tau, \quad d_1 = -\tau\theta_2 \left(1 - \frac{a}{b} M \right)^2.$$

令 $A_1 = b_1^2 - 3a_1c_1$, $B_1 = b_1c_1 - 9a_1d_1$, $C_1 = c_1^2 - 3b_1d_1$, 结合生物学合理参数约束 ($a, s, \theta_2, \tau, T, b > 0$), 易知 $a_1 > 0$ 且非平凡情形下 $d_1 < 0$ 。对于三次函数 $f(\tilde{y}) = a_1\tilde{y}^3 + b_1\tilde{y}^2 + c_1\tilde{y} + d_1$, 因 $f(0) = d_1 < 0$ 、 $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} f(\tilde{y}) = +\infty$, 由介值定理直接保证式(8)至少存在一个正实根。特别地, 根据盛金公式[14], 当 $\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1 > 0$, 式(8)存在唯一正实根, 即为映射(7)的唯一不动点

$$\tilde{y} = \frac{-b_1 - (\sqrt[3]{Y_{11}} + \sqrt[3]{Y_{12}})}{3a_1},$$

其中 $Y_{11} = A_1b_1 + 3a_1 \left(\frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2} \right)$, $Y_{12} = A_1b_1 + 3a_1 \left(\frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2} \right)$ 。该不动点 \tilde{y} 对应子系统(4)的一个非平凡正周期解, 进而可得周期解的表达式为

$$y_p(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - \frac{b}{a} \right) e^{-s(t-nT)} + \frac{b}{a}}, \quad nT < t \leq (n+1)T.$$

定理 1: 子系统(4)存在一个以 T 为周期的正周期解 $y_p(t)$, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 子系统(4)的任意解 $y(t)$ 均满足 $|y(t) - y_p(t)| \rightarrow 0$ 。

由于 $x(t) = 0$ 恒为模型(3)第一个方程的解, 故对任意 $n \in \mathcal{N}$, 模型(3)在 $(nT, (n+1)T]$ 上存在害虫灭绝周期解 $(0, y_p(t))$ 。这表明在资源约束的脉冲控制下, 天敌种群可在无猎物补给的条件下形成稳定的周期波动, 为害虫灭绝的生态稳态提供种群基础。

3.2. 害虫灭绝周期解的稳定性

本节进一步讨论模型(3)中害虫灭绝周期解 $(0, y_p(t))$ 局部渐近稳定性与全局吸引性。为研究子模型(3)害虫灭绝周期解的局部渐近稳定性, 作变量替换

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x(t) - x_p(t), \\ \bar{y}(t) = y(t) - y_p(t), \end{cases}$$

则线性化系统可表示为

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{y}(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < T,$$

其中 $\Phi(t)$ 为基解矩阵, 满足 $d\Phi(t)/dt = J^* \cdot \Phi(t)$, $\Phi(0) = E$, J^* 为原系统在周期解 $(0, y_p(t))$ 处的雅可比矩阵, 表达式为

$$J^* = \begin{pmatrix} r - \frac{\beta}{a} y_p(t) & 0 \\ sb \frac{y_p^2(t)}{a^2} & s - \frac{2sb}{a} y_p(t) \end{pmatrix}.$$

求解 $d\Phi(t)/dt = J^* \cdot \Phi(t)$, 可求得基解矩阵为

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^T [r - \frac{\beta}{\alpha} y_p(t)] dt} & 0 \\ \Lambda & e^{\int_0^T [s - \frac{2sb}{a} y_p(t)] dt} \end{pmatrix},$$

其中 Λ 为与稳定性分析无关的余项, 这里不进行展开。类比 $\Phi(t)$ 的求解过程, 对于模型(3)的第二、四个方程, 将周期解 $(0, y_p(t))$ 带入其雅可比矩阵中可得

$$J_1^* = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \theta_1) p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} \end{pmatrix},$$

故模型(3)的脉冲方程变为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(nT^+) \\ \dot{y}(nT^+) \end{pmatrix} = J_1^* \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(nT) \\ \dot{y}(nT) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \theta_1) p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(nT) \\ \dot{y}(nT) \end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(nT^+) \\ \dot{y}(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \theta_1) p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(nT) \\ \dot{y}(nT) \end{pmatrix} \triangleq B(nT) \begin{pmatrix} \dot{x}(nT) \\ \dot{y}(nT) \end{pmatrix},$$

则模型(3)的周期解 $(0, y_p(t))$ 的局部渐近稳定性取决于以下单值矩阵的两个特征乘子

$$M \triangleq B(T)\Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \theta_1) p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\int_0^T [r - \frac{\beta}{\alpha} y_p(t)] dt} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^T [s - \frac{2sb}{a} y_p(t)] dt} \end{pmatrix},$$

其特征乘子表达式为

$$\lambda_1 = [1 - (1 - \theta_1) p_1] e^{\int_0^T [r - \frac{\beta}{\alpha} y_p(t)] dt}, \quad \lambda_2 = \left\{ 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} \right\} e^{\int_0^T [s - \frac{2sb}{a} y_p(t)] dt}.$$

根据脉冲微分系统稳定性理论[15], 当 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 时, 周期解 $(0, y_p(t))$ 局部渐近稳定。结合 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, 故稳定性条件等价于 $\lambda_1 < 1$ 且 $\lambda_2 < 1$ 。

由于 $0 < 1 - (1 - \theta_1) p_1 < 1$, 故 $\lambda_1 < 1$ 等价于

$$\int_0^T \left(r - \frac{\beta}{\alpha} y_p(t) \right) dt < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^T y_p(t) dt > \frac{r\alpha T}{\beta}.$$

计算整理可得 $\frac{a}{bsT} \ln \left[1 + \frac{b}{a} (e^{sT} - 1) \tilde{y} \right] > \frac{r\alpha}{\beta}$, 则

$$\mathcal{R}_1 \triangleq \frac{a \left(e^{\frac{r\alpha s T}{\beta}} - 1 \right)}{b (e^{sT} - 1) \tilde{y}} < 1, \quad (9)$$

由 $e^{\int_0^T [s - \frac{2sb}{a} y_p(t)] dt} > 0$, 且 $0 < 1 - p_2 + \frac{\theta_2^2 p_2}{[\theta_2 + y_p(t)]^2} < 1$, 故 $\lambda_2 < 1$ 等价于

$$\int_0^T \left(s - \frac{2sb}{a} y_p(t) \right) dt < 0 \Rightarrow \int_0^T y_p(t) dt > \frac{aT}{2b}.$$

计算整理可得 $\frac{a}{bsT} \ln \left[1 + \frac{b}{a} (e^{sT} - 1) \bar{y} \right] > \frac{a}{2b}$, 则

$$\mathcal{R}_2 \triangleq \frac{a \left(e^{\frac{sT}{2}} - 1 \right)}{b(e^{sT} - 1) \bar{y}} < 1. \quad (10)$$

定理 2: 若 $\mathcal{R} = \max \{ \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \}$ 成立, 则模型(3)的害虫灭绝周期解 $(0, y_p(t))$ 是局部渐近稳定的。

接着进一步证明害虫灭绝周期解是全局吸引的。由 $\mathcal{R} < 1$ 可知, 存在充分小的 $\varepsilon_1 > 0$, 使得以下不等式成立

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T [y_p(t) - \varepsilon_1] > \frac{r\alpha}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T [y_p(t) - \varepsilon_1] > \frac{a}{2b}. \end{cases} \quad (11)$$

由模型(3)及其子系统可得

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \geq sy(t) - \frac{bs}{a} y^2(t), & t \neq nT, \\ y(t^+) = \left(1 - \frac{p_2 y(t)}{y(t) + \theta_2} \right) y(t) + \tau, & t = nT. \end{cases}$$

结合脉冲条件, 根据脉冲微分方程比较定理, 设 $y_1(t)$ 为相应比较系统的最大解, 即

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = sy_1(t) - \frac{bs}{a} y_1^2(t), & t \neq nT, \\ y_1(t^+) = \left(1 - \frac{p_2 y_1(t)}{y_1(t) + \theta_2} \right) y_1(t), & t = nT, \end{cases}$$

则 $y(t) \geq y_1(t)$ 。当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $y_1(t) \rightarrow y_p(t)$ 。因此, 存在 $t_1 > 0$ 和 $\varepsilon_1 > 0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时, 有

$$y_p(t) - \varepsilon_1 < y_1(t) \leq y(t). \quad (12)$$

将式(12)代入模型(3)的第一个方程, 化简可得

$$\dot{x}(t) = x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta y(t)}{x(t) + \alpha} \right] \leq x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta (y_p(t) - \varepsilon_1)}{x_1(t) + \alpha} \right].$$

为此构造如下比较系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \left[r \left(1 - \frac{x_1(t)}{K} \right) - \frac{\beta (y_p(t) - \varepsilon_1)}{x_1(t) + \alpha} \right], & t \neq nT, \\ x_1(t^+) = \left(1 - \frac{p_1 x_1(t)}{x_1(t) + \theta_1} \right) x_1(t), & t = nT. \end{cases} \quad (13)$$

在区间 $[nT, (n+1)T]$ 上对上式第一个方程积分可得

$$x_1((n+1)T) = x_1(nT) e^{\int_0^T \left[r \left(1 - \frac{x_1(t)}{K} \right) - \frac{\beta (y_p(t) - \varepsilon_1)}{x_1(t) + \alpha} \right] dt}.$$

注意到被积函数是关于 t 的周期为 T 的周期函数，故积分值与 n 无关。通过递推可得

$$x_1(nT) = x_1(0) e^{n \int_0^T \left[r \left(1 - \frac{x_1(t)}{K} \right) - \frac{\beta(y_p(t) - \varepsilon_1)}{x_1(t) + \alpha} \right] dt}.$$

由条件(11)可知，该指数因子小于 1。因此，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $x_1(nT) \rightarrow 0$ 。进一步，对于任意 $t \in [nT, (n+1)T]$ ，有

$$x_1(t) = x_1(nT) \exp \left(\int_{nT}^t \left[r \left(1 - \frac{x_1(s)}{K} \right) - \frac{\beta(y_p(s) - \varepsilon_1)}{x_1(s) + \alpha} \right] ds \right),$$

由指数部分的积分在有限区间 $[nT, (n+1)T]$ 上是有界的，故当 $n \rightarrow \infty$ 时， $x_1(t) \rightarrow 0$ 对 t 一致成立。

设 $(x(t), y(t))$ 为模型(3)的解，其初值 $x(0^+) = x_0 > 0$ ， $y(0^+) = y_0 > 0$ 。由比较定理，计算可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ 。结合 $x(t) > 0$ ，可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。故存在 $t_2 > t_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$ ，使得当 $t \geq t_2$ 时， $0 < x(t) \leq \varepsilon_2$ 。将此结果代入 $y(t)$ 的所满足方程，可得

$$sy(t) - \frac{bs}{a} y^2(t) \leq \frac{dy(t)}{dt} \leq sy(t) - \frac{bs}{\varepsilon_2 + a} y^2(t).$$

为此，引入如下比较系统

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = sy_2(t) - \frac{bs}{\varepsilon_2 + a} y_2^2(t), & t \neq nT, \\ y_2(t^+) = \left(1 - \frac{p_2 y_2(t)}{y_2(t) + \theta_2} \right) y_2(t), & t = nT, \end{cases} \quad (14)$$

类似于 3.1 节中关于害虫灭绝周期解存在性的讨论，利用频闪映射、不动点定理及盛金公式，可证系统(14)存在一个全局渐近稳定的正周期解

$$y_p^*(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{y}_2} - \frac{b}{\varepsilon_2 + a} \right) e^{-s(t-nT)} + \frac{b}{\varepsilon_2 + a}}, \quad t \in [nT, (n+1)T],$$

其中 $\bar{y}_2 = y_2(nT^+) = y_2^*(0^+)$ ，可由盛金公式给出，为节约空间，这里不作进一步讨论。

由比较定理可得 $y_1(t) \leq y(t) \leq y_2(t)$ 。此外，当 $t \rightarrow +\infty$ 时，有 $y_1(t) \rightarrow y_p(t)$ ， $y_2(t) \rightarrow y_p^*(t)$ 成立。故存在 $t_3 \geq t_2 > 0$ 和 $\varepsilon_3 > 0$ ，使得当 $t > t_3$ 时，有 $y_p(t) - \varepsilon_3 < y(t) < y_p^*(t) + \varepsilon_3$ ，且当 $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ 时，有 $y_p(t) - \varepsilon_3 < y(t) < y_p(t) + \varepsilon_3$ 。由此可得，当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $y(t) \rightarrow y_p(t)$ 。故当 $\mathcal{R} < 1$ 时，模型(3)的害虫灭绝周期解 $(0, y_p(t))$ 是全局渐近稳定的。这表明，当控制强度达到临界阈值时，无论初始种群状态如何，系统终将收敛至害虫灭绝周期解。这表明，在农业生产中，只需将化学防治与天敌投放控制在阈值范围内，即可实现害虫的长期根除，同时维持天敌种群的生态功能，为资源有限条件下的可持续害虫治理提供了理论依据。

4. 阈值分析及数值模拟

4.1. 阈值分析

阈值 \mathcal{R} 用于衡量害虫种群对生态环境的威胁程度。本节将分析天敌投放策略对阈值 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 的影响，关注投放周期 T 、杀虫剂对天敌的最大致死率 p_2 及反映资源制约程度的半饱和常数 θ_2 关键参数。

为探究投放周期 T 与半饱和常数 θ_2 对阈值的影响，考察 $T \rightarrow 0$ 时 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 的极限行为，通过计算可得

$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{R}_1 = 0$, $\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{R}_2 = 0$ 。这表明, 当投放周期 T 趋近于零时, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 均趋于零, 从而阈值 \mathcal{R} 也趋于零。此时害虫种群对生态环境的威胁降至最低, 防控效果达到最优。为直观展示这一变化趋势, 图 1 展示了阈值 \mathcal{R} 随投放周期 T 变化趋势, 并对比不同半饱和和常数 θ_2 取值下 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 的变化曲线, 其余参数取值为: $r = 0.13$, $s = 0.05$, $b = 200$, $a = 0.8$, $p_2 = 0.25$, $\tau = 0.1$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 10$ 。结果表明, 在资源有限的情况下(即 $\theta_2 > 0$ 时), 当固定投放周期 T 时, 阈值 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 是关于资源制约因子 θ_2 的单调减函数; 当固定 θ_2 时, 阈值 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 是关于投放周期 T 的单调增函数。基于此单调性与图 1(A) 的结果, 存在临界投放周期 $T_{\max 1}$, 使得对所有 $T < T_{\max 1}$, 有 $\mathcal{R}_1 < 1$ 成立。同理, 结合图 1(B) 可判断存在一个最大的投放周期 $T_{\max 2}$, 使得对所有的 $T < T_{\max 2}$, 有 $\mathcal{R}_2 < 1$ 成立。因此, 对于阈值 \mathcal{R} , 存在最大投放周期 $T_{\max} = \max\{T_{\max 1}, T_{\max 2}\}$, 使得对所有 $T < T_{\max}$, 有 $\mathcal{R} < 1$ 成立。

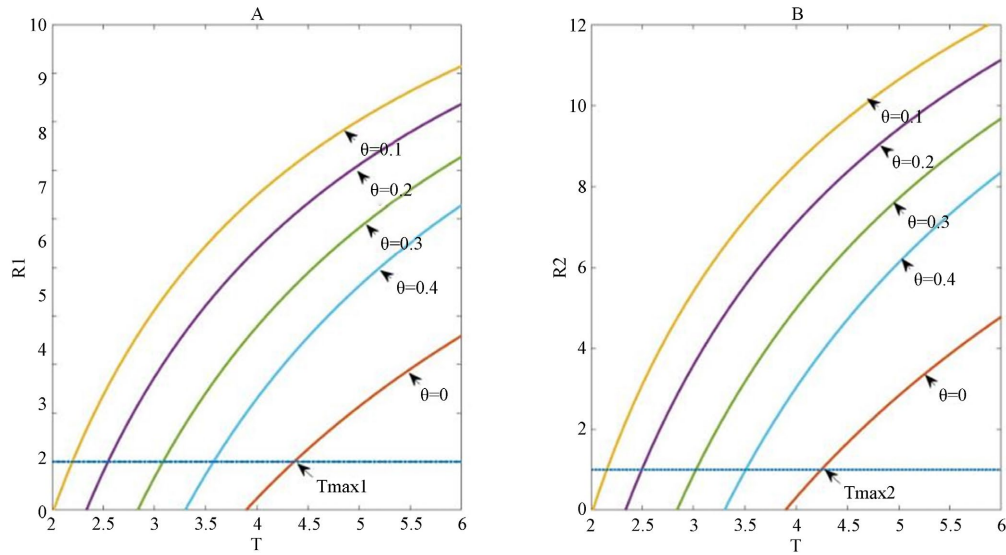


Figure 1. The effects of the half-saturation constant θ_2 and the release period T on the thresholds \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2
图 1. 半饱和常数 θ_2 与投放周期 T 对阈值 \mathcal{R}_1 和 \mathcal{R}_2 的影响

接下来, 为探究天敌投放策略对害虫种群的控制效果, 进一步分析模型(3)中害虫种群单调衰减的条件。若对所有 $t > 0$ 有 $\dot{x}(t) \leq 0$ 成立, 则害虫密度将持续下降。由模型(3)的第一个方程可得

$$\dot{x}(t) = x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta y(t)}{x(t) + \alpha} \right] \leq 0,$$

因 $x(t) \geq 0$, 则上式等价于

$$r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\beta y(t)}{x(t) + \alpha} \leq 0.$$

令 $f(x) = \left(1 - \frac{x}{K} \right) (x + \alpha)$, 易知其最大值为 $f_{\max} = (K + \alpha)^2 / 4K$, 因此, 为确保 $\dot{x}(t) \leq 0$ 成立, 天敌种群密度需满足

$$y(t) \geq \frac{r(K + \alpha)^2}{4\beta K} \triangleq y_c,$$

即 $y(t)$ 达到阈值 y_c 时就进行一次脉冲投放。结合模型(3)的第二个方程及比较定理, 可推导出保证

$y(t) \geq y_c$ 成立的最大投放周期为

$$T_{\max} = \frac{1}{s} \ln \left[\frac{\frac{1}{y_3(0)} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{y_c} - \frac{b}{a}} \right],$$

其中

$$y_3(0) = \left(1 - \frac{p_2 y_c}{y_c + \theta_2} \right) y_c + \tau.$$

结果表明, 只要投放周期小于 T_{\max} , 害虫种群将逐渐衰减直至灭绝。特别地, 若不考虑资源限制(即 $\theta_2 = 0$), 最大允许投放周期为

$$T_{\max^0} = \frac{1}{s} \ln \left[\frac{\frac{1}{(1-p_2)y_c + \tau} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{y_c} - \frac{b}{a}} \right]$$

由此可见, 在资源有限条件下, 天敌投放策略的效果受杀虫剂对天敌的致死率 p_2 和半饱和常数 θ_2 等非线性因素影响。

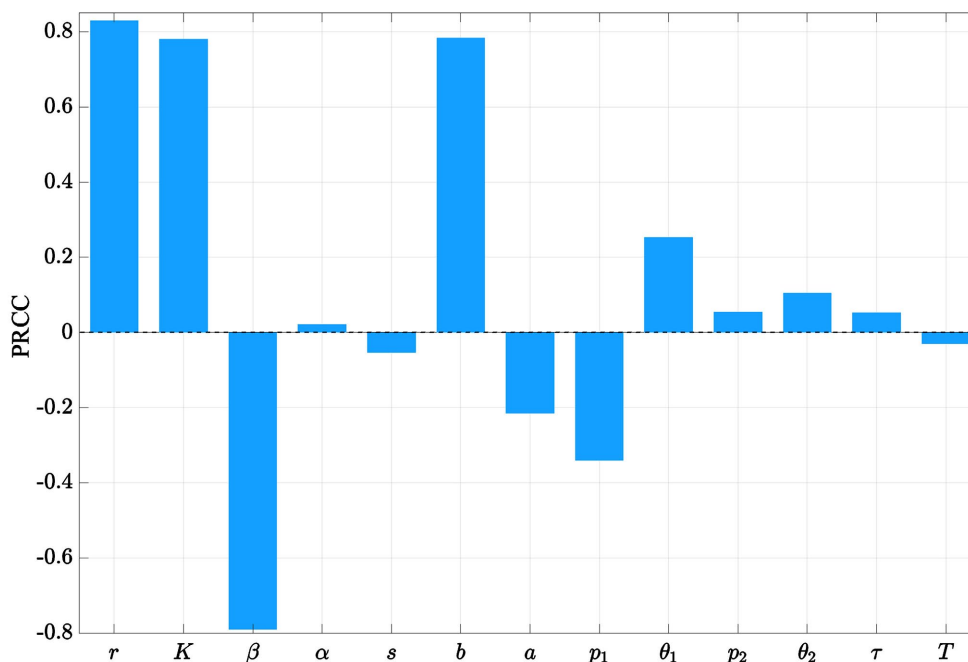


Figure 2. PRCC results of model (3) parameters
图 2. 模型(3)参数的 PRCC 结果参数取值

4.2. 数值模拟

为探究资源有限性对害虫治理效果的影响, 本节对模型(3)进行数值模拟, 结合 PRCC 敏感性分析识别关键影响参数, 同时对比分析考虑与不考虑资源约束两种情形下害虫及天敌种群的动态演化规律。

为评估模型(3)关键参数对系统动态的影响, 采用偏秩相关系数(PRCC)进行敏感性分析, 结果如图 2

所示。害虫内禀增长率 r 、环境容纳量 K 及天敌种群平均减少率 b 与系统输出呈强正相关，其增大会显著提高害虫平衡密度与控制阈值 R ；天敌对害虫的捕食效率 β 呈强负相关，提升该参数可有效抑制害虫爆发。其余参数中， α, s, p_2, τ, T 的 PRCC 绝对值均小于 0.1，敏感性较弱。结果表明，模型对 r, K, b, β 等核心生态参数高度敏感，而对控制周期 T 、天敌投放量 τ 等参数鲁棒性较强，说明合理调控害虫生长与天敌捕食能力，可有效决定田间害虫种群的控制效果与稳定程度。

图 3 展示了害虫种群 $x(t)$ 在不同资源约束条件下的时间序列。其中图 3(A) 对应不考虑资源约束的情形 ($\theta_2 = 0$)，图 3(B) 对应考虑资源约束的情形 ($\theta_2 = 0.02$)。从图 3(A) 可以看出，当不考虑资源约束时，害虫种群密度持续下降，最终趋于灭绝；而在图 3(B) 中，引入资源约束后，害虫种群密度先经历短暂下降，随后逐渐趋于一个稳定的正平衡态，并未完全灭绝。结果表明，在实际害虫治理中，受制于农业资源投入、环境容纳量及生态平衡维持等因素，害虫的彻底灭绝往往难以实现。更为现实且可持续的治理目标是将害虫种群密度控制在经济损害阈值以下，使其对农作物的危害降至可接受水平。

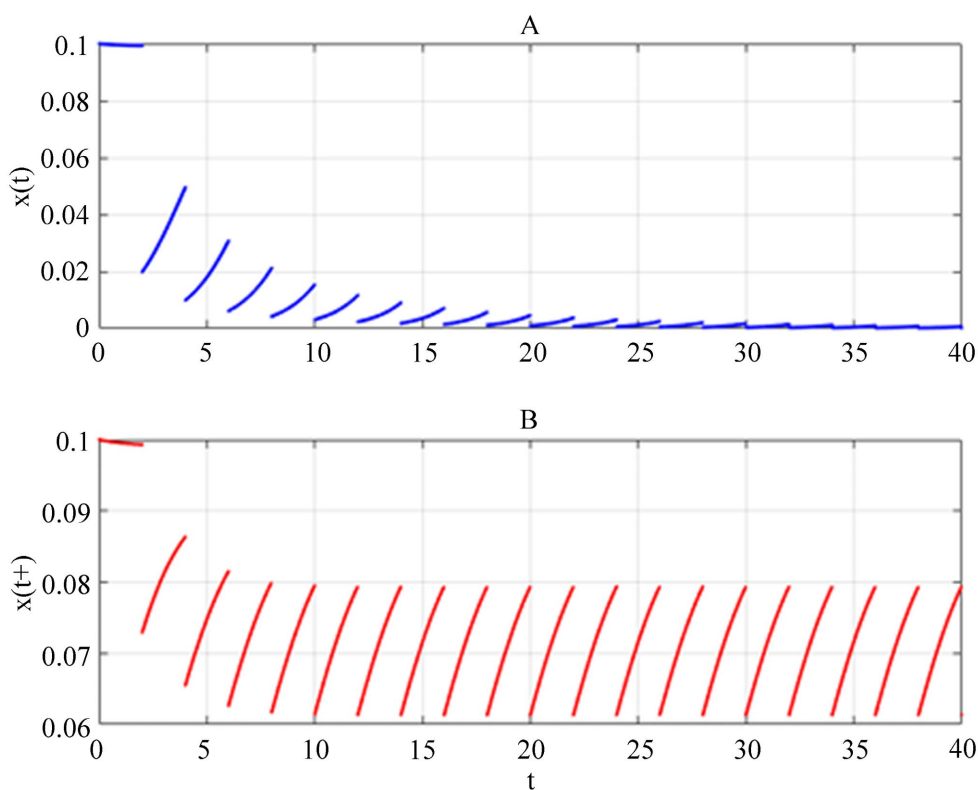


Figure 3. The effect of the resource limitation factor on the dynamical behavior of $x(t)$ in model (3). Specifically, $\theta_1 = 0$ in Panel A and $\theta_1 = 0.02$ in Panel B. The values of the remaining parameters are set as: $r = 0.8$, $s = 0.05$, $b = 2$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$, $a = 0.2$, $K = 0.1$, $p_1 = 0.8$, $T = 2$

图 3. 资源有限因子对模型(3)中 $x(t)$ 动力学行为的影响。其中图 A 中 $\theta_1 = 0$ ，图 B 中 $\theta_1 = 0.02$ ，其余参数取值： $r = 0.8$ ， $s = 0.05$ ， $b = 2$ ， $\alpha = 0.05$ ， $\beta = 0.1$ ， $a = 0.2$ ， $K = 0.1$ ， $p_1 = 0.8$ ， $T = 2$

图 4 展示了天敌种群 $y(t)$ 在不同资源约束条件下的时间序列，其中图 4(A) 对应不考虑资源约束的情形 ($\theta_2 = 0$)，图 4(B) 对应考虑资源约束的情形 ($\theta_2 = 0.02$)。模拟结果显示，无论是否考虑资源约束，天敌种群密度最终均趋于稳定，但在资源受限条件下，天敌种群的平衡密度略低于无资源约束情形，表明资

源限制对天敌种群的增长具有一定抑制作用，而天敌种群仍能维持稳定的种群动态，持续发挥对害虫的生物控制功能。综合数值模拟结果表明，综合害虫管理的核心目标是将害虫种群密度调控至经济损害阈值以下，而非彻底灭绝，这更符合生态规律与农业生产实际；资源投入有限性是调控种群动态的关键因素，防控策略设计必须将其纳入定量分析；即使在资源约束下，通过优化脉冲控制策略，仍可实现害虫与天敌种群的动态平衡，达成可持续治理，而本文构建的资源约束型脉冲害虫治理模型，可更真实地刻画实际防控中的种群演化规律，为 IPM 策略优化提供了理论依据。

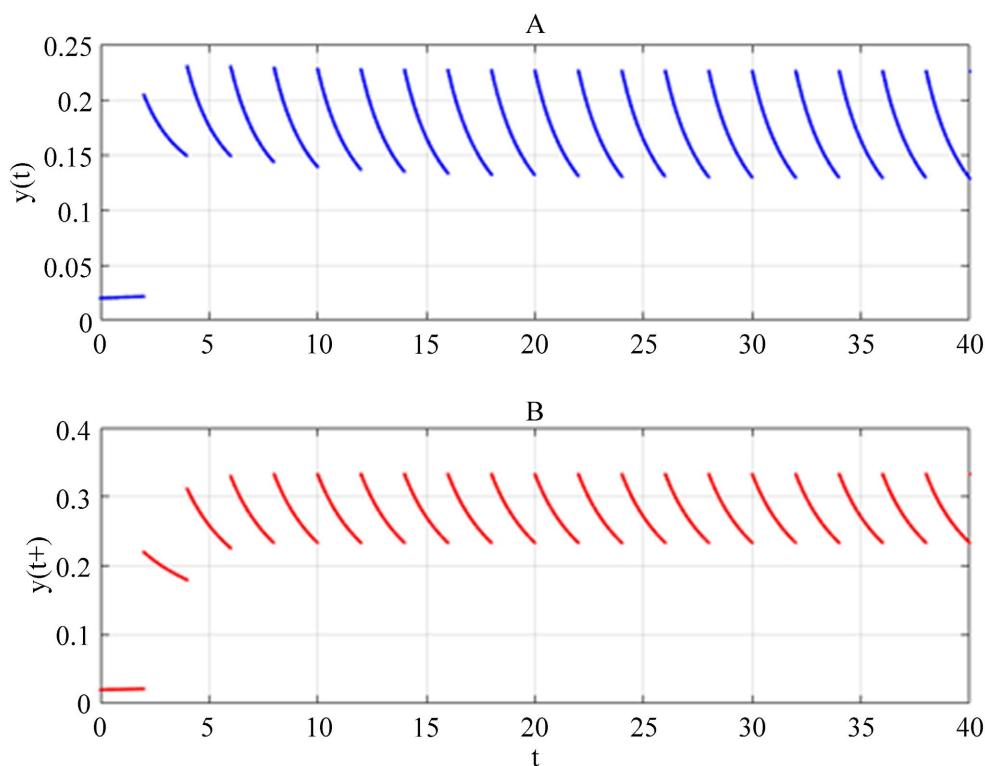


Figure 4. The effect of the resource limitation factor on the dynamical behavior of $y(t)$ in model (3). $\theta_2 = 0$ in Panel A and $\theta_2 = 0.02$ in Panel B, with all other parameters consistent with those in Figure 3
图 4. 资源有限因子对模型(3)中 $y(t)$ 动力学行为的影响。图 A 中 $\theta_2 = 0$ ，图 B 中 $\theta_2 = 0.02$ ，其余参数与图 3 参数一致

5. 总结及展望

农业病虫害严重威胁农业生产、生态环境与国民经济，化学防治的固有弊端推动综合害虫管理成为主流策略，而资源有限性是 IPM 实践的核心制约因素。基于此，本文引入 Holling-II 型功能性反应与 Leslie-Gower 捕食结构，结合具有饱和效应的非线性脉冲控制策略，构建了资源有限条件下的害虫 - 天敌脉冲微分系统。

研究通过简化模型得到天敌种群子系统，借助频闪映射、不动点理论证明害虫灭绝周期解的存在性，利用 Floquet 特征乘子理论与比较定理，分析周期解的局部渐近稳定性与全局吸引性，推导出害虫灭绝的阈值条件。同时，基于阈值条件，进一步分析了天敌投放周期、杀虫剂对天敌最大致死率、半饱和常数等关键参数的影响。此外，通过 PRCC 敏感性分析识别核心敏感参数，并结合数值模拟对比了资源约束与无约束下的种群动态差异。结果表明，资源约束下害虫种群趋于稳定正平衡态而非灭绝，天敌种群则

维持稳定并持续发挥控害作用，印证了 IPM 将害虫密度控制在经济损害阈值以下的核心理念。

本研究构建的模型未纳入害虫抗药性演化、气候波动、生境差异等实际农业生态中的关键影响因素，也未开展多区域、多害虫种类的耦合分析，对复杂农业生产场景的刻画仍有局限。未来将融入多类现实影响因子优化模型，结合田间试验完成实证验证，开展多区域、多害虫耦合研究，推动理论成果向实际防控技术转化。

参考文献

- [1] Angon, P.B., Mondal, S., Jahan, I., Datto, M., Antu, U.B., Ayshi, F.J., *et al.* (2023) Integrated Pest Management (IPM) in Agriculture and Its Role in Maintaining Ecological Balance and Biodiversity. *Advances in Agriculture*, **2023**, Article ID: 5546373. <https://doi.org/10.1155/2023/5546373>
- [2] Baker, B.P., Green, T.A. and Loker, A.J. (2020) Biological Control and Integrated Pest Management in Organic and Conventional Systems. *Biological Control*, **140**, Article 104095. <https://doi.org/10.1016/j.biocontrol.2019.104095>
- [3] Li, C. and Tang, S. (2018) Analyzing a Generalized Pest-Natural Enemy Model with Nonlinear Impulsive Control. *Open Mathematics*, **16**, 1390-1411. <https://doi.org/10.1515/math-2018-0114>
- [4] Kogan, M. (1998) Integrated Pest Management: Historical Perspectives and Contemporary Developments. *Annual Review of Entomology*, **43**, 243-270. <https://doi.org/10.1146/annurev.ento.43.1.243>
- [5] Kumari, V., Chauhan, S. and Dhar, J. (2020) Controlling Pest by Integrated Pest Management: A Dynamical Approach. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, **5**, 769-786. <https://doi.org/10.33889/ijmems.2020.5.4.061>
- [6] Li, J., Huang, Q. and Liu, B. (2019) A Pest Control Model with Birth Pulse and Residual and Delay Effects of Pesticides. *Advances in Difference Equations*, **2019**, Article ID:117. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-1978-7>
- [7] Deng, F., Tian, Y., Xiang, Z. and Xiang, C. (2025) Density-Dependent Integrated Pest Management Model with Instantaneous and Non-Instantaneous Impulsive Effects. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2025**, Article No. 154. <https://doi.org/10.1186/s13662-025-04015-6>
- [8] Kang, B., Liu, B. and Tao, F. (2018) An Integrated Pest Management Model with Dose-Response Effect of Pesticides. *Journal of Biological Systems*, **26**, 59-86. <https://doi.org/10.1142/s0218339018500043>
- [9] Liu, B., Jin, J. and Qi, H. (2025) Study on an Integrated Pest Management Switching Model with Pesticide Resistance Development and Limited Resources of Natural Enemies. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **71**, 1503-1528. <https://doi.org/10.1007/s12190-025-02540-x>
- [10] Wang, X., Tian, Y. and Tang, S. (2017) A Holling Type II Pest and Natural Enemy Model with Density Dependent IPM Strategy. *Mathematical Problems in Engineering*, **2017**, Article ID: 8683207. <https://doi.org/10.1155/2017/8683207>
- [11] 范茹, 李杰梅. 一类具有恐惧效应的时滞 Leslie-Gower 捕食系统 Hopf 分支[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2025, 41(5): 12-24.
- [12] 陈帅, 覃文杰. 基于资源有限的反捕食生态模型的分支分析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2024, 42(5): 172-175+180.
- [13] 吕宁. 双脉冲阶段结构的种群系统动力学特性[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(12): 100-110.
- [14] 吴宇航. 若干带 Allee 效应的食饵-捕食者模型多尺度研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2025.
- [15] 李畅通. 一类具有非线性脉冲的捕食与被捕食系统的定性分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(5): 568-580.