

基于动态价格与行为意识因素下的宁夏布鲁氏菌病最优控制策略研究

秦波, 李明涛*, 柴玉珍, 裴鑫

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年3月23日; 录用日期: 2026年4月18日; 发布日期: 2026年4月24日

摘要

布鲁氏菌病是一种典型的人畜共患传染病, 对畜牧业生产和公共卫生安全均造成严重影响。本文引入羊肉市场动态价格与养殖户养殖意愿因素, 构建了一个耦合经济行为与疾病传播机制的绵羊-布病动力学模型。理论证明了在引入五类控制措施下的控制模型, 关于两类最优控制问题最优控制解的存在性, 并给出关于农户收益最大化问题控制解的显示格式, 以及布病控制时间最小化控制解只能是bang-bang控制。利用宁夏地区2012~2024年的统计数据对模型参数进行估计, 并通过数值模拟分析不同控制策略的作用效果。研究表明: 在无控制情形下布鲁氏菌病将持续传播; 实施最优控制策略能够显著降低感染羊数量与人间病例增长速度, 并在长期内提高养殖系统整体收益。在收益最大化情形下, 扑杀感染羊群与政府经济干预措施在最优控制策略中发挥重要作用, 而减少人畜接触措施未被采用。在有限资源条件下, 减少人与感染羊群接触在缩短疾病控制时间方面表现出最显著效果, 但资源受限将导致控制时间延长并增加累计感染人数。

关键词

布鲁氏菌病, 动态价格, 养殖意愿, 最优控制

Research on Optimal Control Strategies for Brucellosis in Ningxia Based on Dynamic Pricing and Awareness Factors

Bo Qin, Mingtao Li*, Yuzhen Chai, Xin Pei

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: March 23, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 24, 2026

*通讯作者。

文章引用: 秦波, 李明涛, 柴玉珍, 裴鑫. 基于动态价格与行为意识因素下的宁夏布鲁氏菌病最优控制策略研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 622-638. DOI: 10.12677/aam.2026.154188

Abstract

Brucellosis is a typical zoonotic disease that has a serious impact on both livestock production and public health. This paper incorporates the dynamic market price of mutton and farmers' willingness to rear sheep to construct a sheep-brucellosis dynamic model that couples economic behaviour with disease transmission mechanisms. Theoretical analysis verifies the existence of optimal control solutions for two types of optimal control problems under five categories of control measures, provides an explicit form for the control solution regarding the farmer's profit maximisation problem, and demonstrates that the control solution for minimising the duration of brucellosis control can only be a bang-bang control. Model parameters were estimated using statistical data from the Ningxia region for the period 2012~2024, and numerical simulations were conducted to analyse the effectiveness of different control strategies. The results indicate that, in the absence of control measures, brucellosis will continue to spread; implementing optimal control strategies can significantly reduce the number of infected sheep and the rate of increase in human cases, whilst improving the overall profitability of the livestock system in the long term. Under the profit-maximisation scenario, the culling of infected flocks and government economic intervention measures play a crucial role in the optimal control strategy, whereas measures to reduce human-animal contact were not adopted. Under conditions of limited resources, reducing human contact with infected sheep flocks demonstrated the most significant effect in shortening the duration of disease control; however, resource constraints would lead to prolonged control periods and an increase in the cumulative number of infections.

Keywords

Brucellosis, Dynamic Pricing, Willingness to Farm, Optimal Control

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

布鲁氏菌病(以下简称“布病”)是由布鲁氏菌属细菌引起的人畜共患传染病[1],也是全球畜牧生产系统中危害严重的动物疫病之一。该病对牛、羊等家畜的生产性能和繁殖能力产生显著影响,主要表现为流产、不孕不育及产奶量下降等。我国一项覆盖四省的实证研究表明,2020年单只感染布病的羊平均直接经济损失达4557元,各省年损失介于1.8亿元至20.4亿元之间,其中73%~81%由养殖户承担[2]。国际研究亦指出,布病造成的经济损失约占养殖户畜牧业收入的4.4%[3]。因此,布病不仅是公共卫生问题,也是制约畜牧业可持续发展的重要经济问题,从流行病学与经济学相结合的视角开展研究具有重要意义。

针对布病防控,已有大量研究从最优控制角度展开。Bai等[4]表明混合控制策略优于单一控制;Msuya等[5]指出疫苗接种在不同风险区域均具有重要作用;Chu等[6]强调调整羊群繁殖周期对控制季节性传播的关键意义;Song和Song[7]发现结合疫苗接种与扑杀策略可在成本约束下取得更优效果。然而,上述研究多基于流行病学动力学框架,较少考虑经济因素及养殖户行为决策。事实上,布病传播不仅受生物学因素影响,还与市场价格波动及养殖户行为密切相关。已有研究表明,价格变化会显著影响生产决策[8][9],而养殖行为中普遍存在非理性与心理因素[10][11],仅依赖价格信号难以准确刻画供给变化。因此,将市场机制与行为因素纳入布病模型具有重要研究价值。随着研究的深入,防控目标逐渐由“最小

化感染规模”拓展为兼顾经济收益与控制效率的多目标优化问题。相关研究已探讨收益最大化控制策略[12]-[14]，以及在有限资源约束下的时间最优控制问题[15][16]。然而，结合市场价格、养殖意愿与资源约束的综合研究仍较为有限。

基于上述研究背景，本文以宁夏地区羊群养殖系统为研究对象，引入羊肉市场动态价格与养殖户养殖意愿，构建羊-布病动力学模型，并研究两类最优控制问题：一是以养殖户收益最大化为目标的最优控制；二是在有限资源约束下最短时间控制疾病传播的最优控制。本文的工作安排如下：在文章的第2节中阐述模型的构建过程。并给出了基本再生数 R_0 。第3节中提出最优控制模型，利用庞特里亚金极值原理给出两类最优控制问题的理论解。在第4节中，选取宁夏2012~2024年的三类实际数据进行参数估计。随后在第5节给出最优控制策略的模拟。最后，在第6节中对文章的主要工作以及内容进行了总结。

2. 模型建立

2.1. 羊群养殖模型

首先考虑在无传染病情况下的绵羊养殖系统。模型包含三个主要状态变量：羊群存栏量 $N(t)$ 、羊肉市场价格 $p(t)$ 以及养殖户的养殖意愿 $M(t)$ 。三者之间存在相互作用关系：养殖户的养殖意愿通过影响其生产决策直接作用于羊群存栏规模；羊群存栏量则决定市场中的羊肉供给水平，从而影响市场价格；而市场价格的变化又会反过来影响养殖户的养殖意愿。由此形成“价格-意愿-存栏量”的闭环机制。上述价格-意愿-存栏量系统的建模如下：

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \mu + \sigma(M - M_0)N - \alpha N, \\ \frac{dp}{dt} = \phi(D - bep - \alpha N), \\ \frac{dM}{dt} = \varepsilon(p - p_0) - \theta(M - M_0). \end{cases} \quad (1)$$

其中参数的定义如表1所示：

Table 1. Explanation of parameters in System (1)

表 1. 系统(1)中的参数解释

参数/变量	描述	参数	描述
μ	羊群补充率	D	最大需求量
θ	养殖意愿自然衰减率	b	价格系数
α	销售率	M_0	标准养殖意愿
ϕ	比例常数	e	每只绵羊的平均重量
ε	养殖意愿对价格的敏感性	p_0	市场交易羊肉价格
		σ	养殖意愿对羊群规模的影响系数

2.2. 羊群-布病模型

在模型(1)的基础上进一步考虑布鲁氏菌病的传播。此时，原有的绵羊存栏总量被划分为两个子群体：易感羊群 $S(t)$ 和感染羊群 $I(t)$ 。当易感羊个体与感染羊个体或环境中的布鲁氏菌接触时，可能以一定概

率感染布鲁氏菌病，其传播过程可由相应的传染病动力学方程描述。此外，感染羊个体会通过排泄物向环境中释放布鲁氏菌，从而导致环境中病原体浓度增加；与此同时，环境中的布鲁氏菌也会以一定速率发生自然死亡。因此，环境中布鲁氏菌数量的动态变化同时受到病原体释放和自然衰减两个过程的共同影响。

由于羊肉市场价格主要由市场供需关系决定，因此在引入疾病因素后，价格动态方程的基本结构保持不变。然而，疾病的出现会对养殖户的生产决策产生重要影响。一般而言，养殖户以收益最大化为主要目标，当养殖系统中感染个体比例上升时，养殖户往往会降低养殖规模以规避潜在风险，从而导致养殖意愿下降。为刻画这一行为机制，模型中需要引入感染羊数量对养殖意愿的负向影响项。此外，布鲁氏菌病属于典型的人畜共患病，其传播具有“家畜传播人类，而人类不再传播给牲畜，且人群之间不发生传播”的特点。易感人群主要通过接触感染绵羊或环境中的布鲁氏菌而感染，其对应的感染率分别记为 β_h, β_w 。设常数 b_h 表示人口出生率， d_h 表示自然死亡率， r 表示感染人群的康复率。

综合上述假设，可以得到引入布鲁氏菌病后的绵羊-布病动力学模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu + \sigma(M - M_0)S - \alpha S - \beta_1 SI - \beta_2 SW, \\ \frac{dI}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SW - dI, \\ \frac{dW}{dt} = \eta I - \delta W, \\ \frac{dp}{dt} = \phi(D - bep - \alpha S), \\ \frac{dM}{dt} = \varepsilon(p - p_0) - \theta(M - M_0) - \gamma I, \\ \frac{dS_h}{dt} = b_h - \beta_h S_h I - \beta_w S_h W - d_h S_h + r I_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = \beta_h S_h I + \beta_w S_h W - d_h I_h - r I_h. \end{cases} \quad (2)$$

给出系统(2)的无病平衡点 $E_0(S_0, 0, 0, p_0, M_0)$

$$S_0 = \frac{-[be\alpha\theta - \sigma\varepsilon(D - bep_0)] + \sqrt{\Delta}}{2\alpha\sigma\varepsilon}$$

其中 $\Delta = [be\alpha\theta - \sigma\varepsilon(D - bep_0)]^2 + 4be\theta\sigma\alpha\varepsilon\mu$ 。

进一步讨论基本再生数[17]，利用下一代矩阵法[18]可求得，考虑如下的辅助系统

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SW - dI, \\ \frac{dW}{dt} = \eta I - \delta W. \end{cases} \quad (3)$$

得到

$$F = \begin{bmatrix} \beta_1 S_0 & \beta_2 S_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{\eta}{d\delta} & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}$$

计算出系统的基本再生数为：

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{(\beta_2\eta + \beta_1\delta)S_0}{d\delta} \quad (4)$$

3. 最优控制策略

在上一节中，我们建立了描述羊群养殖以及布病传播之间相互作用关系的动力学模型。该模型刻画了疾病在养殖系统中的传播机制及其对经济系统的潜在影响。然而，在实际生产过程中，政府和养殖户通常会采取一系列干预措施以控制疾病传播并减少经济损失。因此，有必要在上述模型的基础上进一步引入控制变量，以刻画不同防控策略对疾病传播及养殖系统动态行为的影响。为此，本文在模型中引入控制变量以描述实际防控措施的实施强度。具体而言，考虑以下五类控制措施：

(1) 降低羊群之间的接触率；(2) 扑杀感染羊群；(3) 环境消毒；(4) 政府经济干预措施；(5) 减少人畜接触。

将以上五种控制措施 $u_i(t) (i=1,2,3,4,5)$ 体现到模型中，具体表现形式可以为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu + \sigma(M - M_0)S - \alpha S - (1 - u_1)\beta_1 SI - \beta_2 SW, \\ \frac{dI}{dt} = (1 - u_1)\beta_1 SI + \beta_2 SW - (d + mu_2)I, \\ \frac{dW}{dt} = \eta I - (\delta + ku_3)W, \\ \frac{dp}{dt} = \phi(D - bep - \alpha S), \\ \frac{dM}{dt} = \varepsilon(p - p_0) - \theta(M - M_0) - (1 - u_4)\gamma I, \\ \frac{dS_h}{dt} = b_h - (1 - u_5)\beta_h S_h I - \beta_w S_h W - d_h S_h + rI_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = (1 - u_5)\beta_h S_h I + \beta_w S_h W - d_h I_h - rI_h. \end{cases} \quad (5)$$

此时有系统(5)的控制再生数为

$$R_c(u) = \frac{[\beta_2\eta + \beta_1(1 - u_1)(\delta + ku_3)]S_1}{(d + mu_2)(\delta + ku_3)} \quad (6)$$

3.1. 固定终端时间下终端状态优化控制

考虑如下最优控制问题。设终端时刻为 T_1 ，寻找一组最优控制策略，使养殖户在整个养殖周期内获得最大经济收益。基于上述目标，构建如下目标泛函：

$$J_2(u) = \int_0^{T_1} e\alpha p S - B(S + I) - \frac{1}{2}B_1 u_1^2 - \frac{1}{2}B_2 u_2^2 - \frac{1}{2}B_3 u_3^2 - \frac{1}{2}B_4 u_4^2 - \frac{1}{2}B_5 u_5^2 dt. \quad (7)$$

其中， B 表示在养殖过程中易感羊群和感染羊群的单位时间养殖成本， $B_i (i=1,2,3,4,5)$ 表示各控制措施对应的实施成本。控制变量 $u_i(t)$ 表示第 i 类控制措施的实施强度，所有控制变量均属于如下容许控制集：

$$U = \{u(t) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq u_i(t) \leq 1, i \in \mathbb{N}_4\}. \quad (8)$$

为了求解上述最大化目标泛函的最优控制问题，可以将其转化为最大化相应的哈密顿函数。根据庞特里亚金最大值原理，构造系统的哈密顿函数如下：

$$\begin{aligned}
H_1(x, \lambda, u) = & e\alpha pS - B(S+I) - \frac{1}{2}B_1u_1^2 - \frac{1}{2}B_2u_2^2 - \frac{1}{2}B_3u_3^2 - \frac{1}{2}B_4u_4^2 - \frac{1}{2}B_5u_5^2 \\
& + \lambda_1(t)\{\mu + \sigma(M - M_0)S - \alpha S - (1-u_1)\beta_1SI - \beta_2SW\} \\
& + \lambda_2(t)\{(1-u_1)\beta_1SI + \beta_2SW - (d + mu_2)I\} \\
& + \lambda_3(t)\{\eta I - (\delta + ku_3)W\} \\
& + \lambda_4(t)\{\phi(D - bep - \alpha S)\} \\
& + \lambda_5(t)\{\varepsilon(p - p_0) - \theta(M - M_0) - (1-u_4)\gamma I\} \\
& + \lambda_6(t)\{b_h - (1-u_5)\beta_hS_hI - \beta_wS_hW - d_hS_h + rI_h\} \\
& + \lambda_7(t)\{(1-u_5)\beta_hS_hI + \beta_wS_hW - d_hI_h - rI_h\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \lambda_7(t))^T$ 作为伴随变量。

最优控制解的结构形式:

定理 3: 使目标函数最小化的最优控制解 $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*)$ 为如下形式

$$\begin{cases}
u_1^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta_1S(t)I(t)}{B_1} \right\} \right\}, \\
u_2^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{B_2}\lambda_2(t)mI(t) \right\} \right\}, \\
u_3^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{B_3}\lambda_3(t)kW(t) \right\} \right\}, \\
u_4^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{B_4}\lambda_5(t)\gamma I(t) \right\} \right\}, \\
u_5^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{B_5}(\lambda_6(t) - \lambda_7(t))\beta_hS_h(t)I(t) \right\} \right\}.
\end{cases}$$

证明:

应用庞特里亚金极大值原理可以得到与系统(5)相应的伴随系统与横截条件:

$$\begin{cases}
\lambda_1'(t) = -ep\alpha + B - (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))[(1-u_1(t))\beta_1I(t) + \beta_2W(t)] + \lambda_4(t)\alpha\phi \\
\quad - \lambda_1(t)[\sigma(M(t) - M_0) - \alpha], \\
\lambda_2'(t) = B - (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))[(1-u_1(t))\beta_1S(t)] + \lambda_2(t)(d + mu_2(t)) - \lambda_3\eta \\
\quad + \lambda_5\gamma(1-u_4(t)) - (\lambda_7(t) - \lambda_6(t))(1-u_5(t))\beta_hS_h(t), \\
\lambda_3'(t) = -(\lambda_2(t) - \lambda_1(t))\beta_2S(t) + \lambda_3(t)(\delta + ku_3(t)) - (\lambda_7(t) - \lambda_6(t))\beta_wS_h(t), \\
\lambda_4'(t) = -e\alpha S(t) + \lambda_4(t)be\phi - \lambda_5(t)\varepsilon, \\
\lambda_5'(t) = -\lambda_1(t)\sigma S(t) + \lambda_5\theta, \\
\lambda_6'(t) = -(\lambda_7(t) - \lambda_6(t))[(1-u_5(t))\beta_hI(t) + \beta_wW(t)] + \lambda_6(t)d_h, \\
\lambda_7'(t) = -(\lambda_6(t) - \lambda_7(t))r + \lambda_7(t)d_h.
\end{cases} \tag{10}$$

具有横截性条件

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = \lambda_6(T) = \lambda_7(T) = 0. \tag{11}$$

最大化目标函数即是寻找控制 u 最大化哈密顿函数(9), 而哈密顿函数有极值解, 即其对控制 u 的导数为零, 计算得开关函数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial u_1} &= -B_1 u_1 + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \beta_1 S(t) I(t) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= -B_2 u_2 - \lambda_2(t) m I(t) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial u_3} &= -B_3 u_3 - \lambda_3(t) k W(t) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial u_4} &= -B_4 u_4 + \lambda_5(t) \gamma I(t) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial u_5} &= -B_5 u_5 + (\lambda_6(t) - \lambda_7(t)) \beta_h S_h(t) I(t) = 0.\end{aligned}$$

于是限制在控制集中可得最优控制应为如下结构

$$\begin{cases} u_1^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \beta_1 S(t) I(t)}{B_1} \right\} \right\}, \\ u_2^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{B_2} \lambda_2(t) m I(t) \right\} \right\}, \\ u_3^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{B_3} \lambda_3(t) k W(t) \right\} \right\}, \\ u_4^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{B_4} \lambda_5(t) \gamma I(t) \right\} \right\}, \\ u_5^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{B_5} (\lambda_6(t) - \lambda_7(t)) \beta_h S_h(t) I(t) \right\} \right\}.\end{cases}$$

3.2. 有限资源下时间最短优化控制

在上一节中, 我们讨论了以养殖户收益最大化为目标的最优控制问题。然而, 从养殖户个体决策的角度来看, 其主要关注的是经济收益, 而不一定关注疾病是否能够被完全消除, 或是否能够在最短时间内控制疫情。此外, 在实际生产过程中, 养殖户可用于疾病防控的资源通常是有限的。因此, 在有限资源约束下, 如何通过合理的控制策略在尽可能短的时间内控制布鲁氏菌病的传播, 成为一个具有重要现实意义的问题。基于上述考虑, 本文进一步研究有限资源约束下的时间最优控制问题。具体而言, 改变原有的优化目标, 在控制成本不超过给定资源上限的条件下, 寻求一组最优控制策略, 使布病在最短时间内得到有效控制。

在实际情形中, 当感染人数下降到 1 以下时, 可以认为疫情已经得到有效控制。设 T_2 为感染人数首次下降到 1 以下的时间, 即疾病的根除时间。同时设 Z_{\max} 表示可用于实施控制措施的最大资源总量, 则资源约束可以表示为:

$$Z(T) = \int_0^T \sum_{i=1}^5 B_i u_i(t) dt \leq Z_{\max} \quad (12)$$

其中, B_i 表示第 i 类控制措施对应的控制成本(见第 3.1 节)。

综上, 可以将该问题归结为如下的时间最优控制问题:

$$\text{最小化目标函数: } J_1(u) = \int_0^T 1 dt, \text{ 条件服从于 } \begin{cases} x(t, u) \in X \\ I_h(T) < 1 \\ Z(T) \leq Z_{\max} \\ u(t) \in U, t \in [0, T] \end{cases}.$$

为了解决本节中提出的旨在最大化目标泛函的时间最优控制问题, 它等价于最小化如下的哈密顿算子。

$$\begin{aligned} H_2(x, \lambda, u) = & 1 + \lambda_1(t) \{ \mu + \sigma(M - M_0)S - \alpha S - (1 - u_1)\beta_1 SI - \beta_2 SW \} \\ & + \lambda_2(t) \{ (1 - u_1)\beta_1 SI + \beta_2 SW - (d + mu_2)I \} \\ & + \lambda_3(t) \{ \eta I - (\delta + ku_3)W \} \\ & + \lambda_4(t) \{ \phi(D - bep - \alpha S) \} \\ & + \lambda_5(t) \{ \varepsilon(p - p_0) - \theta(M - M_0) - (1 - u_4)\gamma I \} \\ & + \lambda_6(t) \{ b_h - (1 - u_5)\beta_h S_h I - \beta_w S_h W - d_h S_h + r I_h \} \\ & + \lambda_7(t) \{ (1 - u_5)\beta_h S_h I + \beta_w S_h W - d_h I_h - r I_h \}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \lambda_7(t))^T$ 作为伴随变量。

定理 5: 时间最优控制解的结构形式是一个 bang-bang 控制。

证明:

根据 Pontryagin 极值原理, 对应原系统的伴随系统如下

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = \lambda_4(t)\alpha\phi - \lambda_1(t)[\sigma(M(t) - M_0) - \alpha] - (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))[(1 - u_1(t))\beta_1 I(t) + \beta_2 W(t)], \\ \lambda_2'(t) = -(\lambda_2(t) - \lambda_1(t))[(1 - u_1(t))\beta_1 S(t)] + \lambda_2(t)(d + mu_2(t)) - \lambda_3\eta + \lambda_5\gamma(1 - u_4(t)) \\ \quad - (\lambda_7(t) - \lambda_6(t))(1 - u_5(t))\beta_h S_h(t), \\ \lambda_3'(t) = \lambda_3(t)(\delta + ku_3(t)) - (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))\beta_2 S(t) - (\lambda_7(t) - \lambda_6(t))\beta_w S_h(t), \\ \lambda_4'(t) = \lambda_4(t)bep\phi - \lambda_5(t)\varepsilon, \\ \lambda_5'(t) = \lambda_5\theta - \lambda_1(t)\sigma S(t), \\ \lambda_6'(t) = \lambda_6(t)d_h - (\lambda_7(t) - \lambda_6(t))[(1 - u_5(t))\beta_h I(t) + \beta_w W(t)], \\ \lambda_7'(t) = \lambda_7(t)d_h - (\lambda_6(t) - \lambda_7(t))r. \end{cases} \quad (14)$$

具有横截性条件

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = \lambda_6(T) = 0, \lambda_7(T) \text{ 任意}. \quad (15)$$

由于哈密顿函数关于控制项是线性函数, 求导得开关函数:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial u_1} = (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta_1 S(t)I(t), \\ \varphi_2(t) &= \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\lambda_2(t)mI(t), \\ \varphi_3(t) &= \frac{\partial H}{\partial u_3} = -\lambda_3(t)kW(t), \\ \varphi_4(t) &= \frac{\partial H}{\partial u_4} = \lambda_5(t)\gamma I(t), \\ \varphi_5(t) &= \frac{\partial H}{\partial u_5} = (\lambda_6(t) - \lambda_7(t))\beta_h S_h(t)I(t). \end{aligned}$$

不妨令 $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t))^T$ ，则有其导数：

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_1'(t) - \lambda_2'(t))\beta_1 S(t)I(t) + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta_1 S'(t)I(t) + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta_1 S(t)I'(t) \\ -m(\lambda_2'(t)I(t) + \lambda_2(t)I'(t)) \\ -k(\lambda_3'(t)W(t) + \lambda_3(t)W'(t)) \\ \gamma(\lambda_5'(t)I(t) + \lambda_5(t)I'(t)) \\ (\lambda_6'(t) - \lambda_7'(t))\beta_h S_h(t)I(t) + (\lambda_6(t) - \lambda_7(t))\beta_h S_h'(t)I(t) + (\lambda_6(t) - \lambda_7(t))\beta_h S_h(t)I'(t) \end{pmatrix}$$

利用反证法来证明不可能存在连续的奇异弧区间：现假设存在一个奇异弧区间 \mathcal{I} ，那么一定有开关函数及其导数都等于 0，并且根据数量符号的正性可得，对任意的 $t \in \mathcal{I}$ ，有

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t) = \lambda_5(t) = 0, \quad \lambda_7(T) = \lambda_6(T).$$

沿此最优解计算哈密顿量得

$$H(x, \lambda, u) = 1 + \lambda_6(t) \{b_h - d_h(S_h + I_h)\} \equiv 0. \tag{16}$$

则可计算得，在区间上 $\lambda_6(t) = -\frac{1}{b_h - d_h(S_h + I_h)} \neq 0$ ，但这与前文的横截性条件(15)相矛盾。因此，该控制应是一个 bang-bang 形式的最优控制，即分段控制。证毕。

4. 数值模拟

为验证所建立模型的合理性，本文选取宁夏回族自治区 2012~2024 年的羊群存栏量、羊肉市场价格以及人间布鲁氏菌病累计病例数(见表 2)进行参数估计。在此基础上，对布鲁氏菌病在养殖系统中的传播动态进行数值模拟，并进一步分析在不同控制情景下养殖户收益最大化和疾病控制时间最短的最优控制策略。

Table 2. Actual data on sheep stock numbers, market prices for mutton, and human brucellosis cases in the Ningxia region between 2012 and 2024

表 2. 2012~2024 年间宁夏地区羊群养殖量，羊肉市场价格，以及人间布病病例实际数据

年份	羊存栏量(万头)	羊肉市场价格(元)	人间布病新增病例数	人间布病累计病例数
2012	506.40	30.8902	449	449
2013	570.10	30.7548	883	1332
2014	611.95	23.4212	2063	3395
2015	587.78	17.4106	2888	6283
2016	580.73	19.3416	2160	8443
2017	506.59	25.1344	1696	10,139
2018	534.28	26.7118	1581	11,720
2019	568.46	29.3402	2199	13,919
2020	596.11	34.7762	2934	16,853
2021	677.10	31.9846	4976	21,829
2022	710.55	30.3710	6174	28,003
2023	720.50	26.7674	4509	32,512
2024	692.12	27.0236	2538	35,050

注：数据来源宁夏统计局 <https://tj.nx.gov.cn/>。

4.1. 参数估计

初始条件取自表 2 中 2012 年的统计数据。初始易感绵羊数量为 $S(0) = 5064000$ ，初始羊肉市场价格为 $p(0) = 30.8902$ ，宁夏回族自治区常住人口数为 $S_h(0) = 6591280$ ，初始人间布鲁氏菌病病例数为 $I_h(0) = 449$ 。对于模型中的其他变量，我们假设 2012 年感染绵羊数量为 $I(0) = 50000$ ，环境中布鲁氏菌数量为 $W(0) = 100000$ 。此外，表示养殖户养殖意愿的变量 M 为一个概念性变量，其初始值设为 $M(0) = 1350$ 。

本文利用 MATLAB 与 DEDiscover (DEDiscover 允许用户调整参数，设置初始条件，指定模拟开始和结束时间，并控制输出步长)对模型参数进行估计。首先，将模型方程及已知参数输入 DEDiscover，对其余未知参数进行初步估计。在此基础上，将初步估计得到的参数导入 MATLAB，并采用最小二乘法优化目标函数，进一步估计剩余参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_h, \beta_w$ 。最小化目标函数定义如下：

$$\sum_t \rho_1 [S(t) - S_a(t)]^2 + \rho_2 [p(t) - p_a(t)]^2 + \rho_3 [L(t) - L_a(t)]^2. \quad (17)$$

其中， $S(t)$ 和 $p(t)$ 分别表示模型得到的易感绵羊数量和羊肉市场价格的理论解， $S_a(t)$ 和 $p_a(t)$ 为表 2 中对应的实际观测数据； $L(t)$ 表示人间布鲁氏菌病累计病例数的理论解，而 $L_a(t)$ 为表 2 中对应的实际统计数据，其具体形式为： $\frac{dL}{dt} = \beta_h S_h I + \beta_w S_w W$ 。由于易感绵羊数量、市场价格以及人间累计感染病例数在数量级上存在显著差异，因此在目标函数中引入权重参数 ρ_1, ρ_2, ρ_3 以平衡不同变量之间的尺度差异，从而保证三个变量均能够获得较好的拟合效果。最终通过最小二乘法得到模型参数估计结果，其拟合效果如图 1 所示，所有参数取值列于表 3。

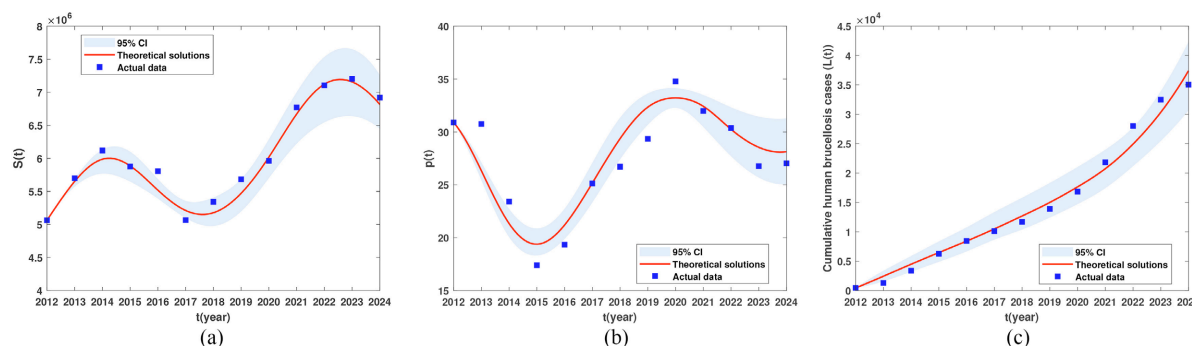


Figure 1. Results of the data fitting for the Ningxia region. (a) Fitting results for susceptible sheep flocks; (b) Fitting results for sheep meat market prices; (c) Fitting results for cumulative human brucellosis cases

图 1. 宁夏地区实际数据拟合结果。(a) 易感羊群拟合结果；(b) 羊肉市场价格拟合结果；(c) 人间布病累计病例拟合结果

Table 3. Parameter values in the model and their sources

表 3. 模型中的参数值及其来源

参数	数值	来源	参数	数值	来源
μ	2.442×10^6	[19]	D	2.74×10^6	[12]
α	0.4508	[19]	d	0.3	[12]
η	5.4833	假设	b	559.1024	[12]
δ	0.3671	假设	e	45.18	[19]
σ	5.2391×10^{-4}	模拟	p_0	24.8828	[19]

续表

ε	58.9887	模拟	M_0	1350	假设
θ	0.9874	模拟	b_h	36679	[12]
γ	3.89×10^{-4}	模拟	d_h	5.19×10^{-3}	[12]
m	0.585	假设	r	0.4	[12]
k	0.165	假设	ϕ	9.6867×10^{-6}	模拟
β_1	3.3814×10^{-8}	模拟	β_h	3.0003×10^{-9}	模拟
β_2	5.2003×10^{-9}	模拟	β_w	6.8033×10^{-10}	模拟

4.2. 敏感性分析

为刻画模型参数对基本再生数的影响程度, 采用拉丁超立方采样(Latin Hypercube Sampling, LHS)结合偏秩相关系数(Partial Rank Correlation Coefficient, PRCC)方法对参数进行全局敏感性分析。该方法能够在多参数同时变化的情况下, 有效评估单个参数对输出指标的独立影响。

具体而言, 在各参数标称值附近($\pm 10\%$ 范围内)进行 LHS 抽样(样本量为 1000), 并计算每组参数对应的基本再生数。随后利用 Spearman 型 PRCC 分析参数与输出之间的单调相关性, 从而获得各参数对应的敏感性指标。结果见表 4。

Table 4. Sensitivity of R_0 to parameter values in the model

表 4. 模型中的参数值对 R_0 的灵敏度

参数	灵敏度指标	参数	灵敏度指标
D	0.9349	b	-0.5454
d	-0.9264	μ	0.3941
α	-0.9225	θ	0.0773
δ	-0.8639	ε	-0.0718
η	0.8603	M_0	0.0703
β_2	0.8601	γ	0.0266
β_1	0.5689	σ	-0.0252
p_0	-0.5459	ϕ	-0.0122

根据表 4 的 PRCC 结果, 各参数对基本再生数 R_0 的影响可以分为三类:

(i) 强正相关参数: $D, \eta, \beta_2, \beta_1$; 其中需求参数 D 对 R_0 的影响最为显著, 呈强正相关, 说明市场需求通过影响系统的稳态易感规模, 从而在疾病传播过程中起主导作用。此外, 传播相关参数同样表现出较强的正相关性, 表明直接传播与环境传播途径均在疾病扩散中发挥重要作用, 是重点控制对象。

(ii) 强负相关参数: $d, \alpha, \delta, p_0, b$; 与个体移除和损失相关的参数(如 d, α, δ)均与 R_0 呈显著负相关, 说明提高淘汰率、死亡率或降低易感个体输入能够有效抑制疾病传播。同时, 部分经济调控参数(p_0, b)也表现出一定的负向影响, 这反映出其通过调节稳态易感规模间接作用于 R_0 。表明经济因素与流行病传播过程之间存在显著耦合作用, 在制定控制策略时, 应综合考虑传播抑制与群体调控的协同作用。

(iii) 弱相关参数: $\mu, \theta, \varepsilon, M_0, \gamma, \sigma, \phi$; 虽然这些参数对 R_0 的敏感性较低, 表示在疾病控制方面的作用较小, 但是从考虑最大收益情况时仍具有现实意义。

从上面的讨论来看, 提出的五种控制措施都是合理的。

5. 最优控制策略模拟

在第三节中, 本文从理论上构建了两类最优控制问题, 分别为养殖户收益最大化控制问题以及有限资源条件下的时间最优控制问题。上一节结合宁夏地区布病相关统计数据及已有研究, 对模型中的主要参数进行了估计与设定。需要指出的是, 目标函数中涉及的各类控制成本在现有文献中缺乏明确记载, 因此本文结合实际防控措施及相关经济资料, 对各控制成本参数进行合理假设。

控制 u_1 表示降低羊群接触率, 其成本参考社会化服务单价, 按每只羊 1~3 元/年估算, 取 $B_1 = 8 \times 10^6$; 控制 u_2 表示对感染牲畜实施扑杀, 根据现行扑杀补贴标准约 500 元/只, 取 $B_2 = 3.5 \times 10^7$; 控制 u_3 表示环境消毒, 其成本参考宁夏地区消毒物资采购规模, 按每只羊 0.2~1 元/年估算, 取 $B_3 = 3 \times 10^6$; 控制 u_4 表示政府经济干预措施, 其成本参考部分地区综合防控资金中非扑杀部分的比例, 按每只羊每年 0.5~2 元估算, 取 $B_4 = 5 \times 10^6$; 控制 u_5 表示减少人畜接触, 其成本参考疫病监测及防控经费, 按每只羊 0.1~0.5 元/年估算, 取 $B_5 = 2 \times 10^6$ 。根据《全国农产品成本收益汇编》[19]中散养肉羊生产成本数据, 一只散养肉羊从入栏到出栏平均需要 183 天, 总成本约为 1378 元, 折算日均成本约为 7.5 元, 因此取单位养殖成本参数 $B = 2.74 \times 10^3$ 。

在上述参数设定的基础上, 本节进一步对两类最优控制问题进行数值模拟, 以分析不同控制策略对系统动力学行为的影响, 并分别求解养殖户收益最大化与疾病控制时间最短条件下的最优控制策略。

5.1. 控制收益最大化模拟

首先, 对养殖户收益最大化情形进行最优控制数值模拟。基于羊群 - 布病控制系统(2), 对宁夏地区未来十年内绵羊养殖规模与布病传播情况进行模拟, 并比较无控制情形与实施最优控制策略时系统各状态变量的变化, 从而评估不同干预措施对养殖收益的影响。通过求解最优控制问题, 可得到五个控制变量 $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t)$ 随时间变化的最优控制轨迹, 如图 2 所示。结果表明, 前四类控制措施具有相似的变化趋势, 而控制 $u_5(t)$ 在整个模拟过程中始终为零。

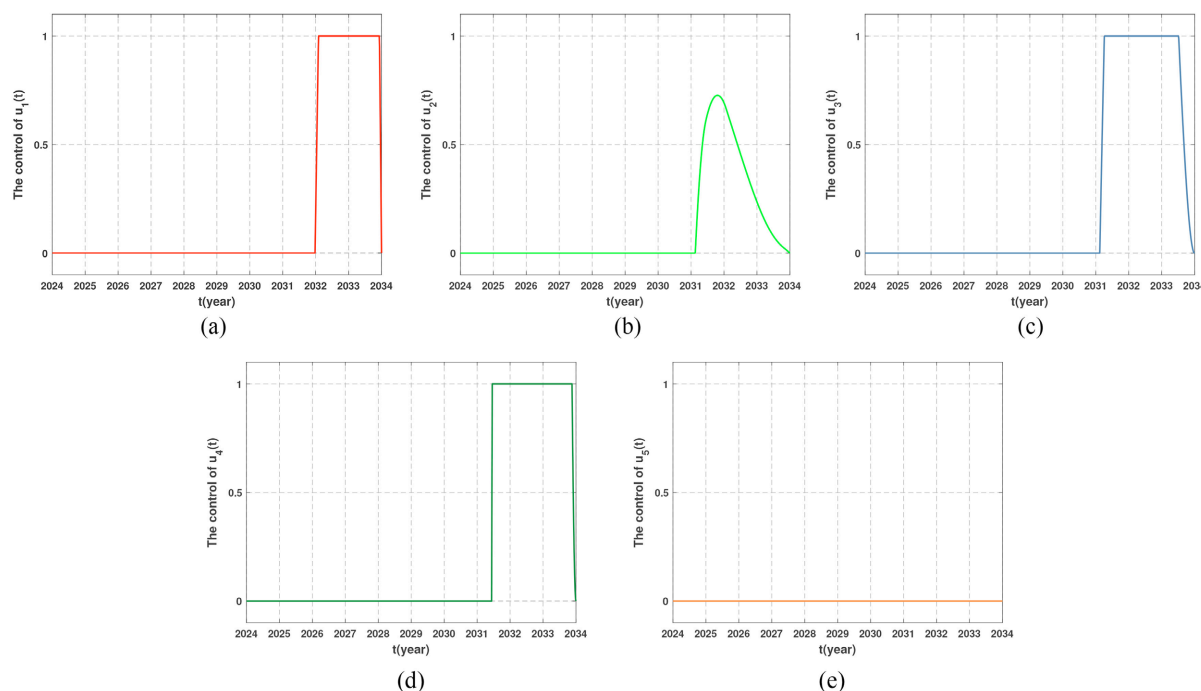


Figure 2. The optimal control solution for maximising farmers' profits
图 2. 养殖户收益最大化的最优控制解

具体而言, 控制措施 $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ 的启动时间均集中在 2031~2032 年之间, 表明这些措施在系统演化后期呈现一定的协同作用。在系统早期阶段, 各控制措施对目标函数(养殖户收益最大化)的贡献较小, 因此最优策略倾向于不实施控制; 而在后期阶段, 为实现长期收益最大化, 需要在较短时间内强化干预措施。从控制强度来看, 控制 $u_2(t)$ 的作用相对较弱, 而控制 $u_4(t)$ 的持续时间最长。结合其实际意义, $u_2(t)$ 表示对感染牲畜实施扑杀, 能够直接减少传染源, 对疾病传播具有显著抑制作用, 但该措施成本较高, 需要限制控制时间和强度。控制 $u_4(t)$ 通过影响养殖户的养殖意愿间接调节羊群规模, 这与最终收益直接相关, 因此其控制时间最长。相比之下, 控制 $u_5(t)$ 始终未被采用, 原因可能是该措施主要用于降低人畜接触风险, 而从养殖户收益最大化的角度出发, 该措施会增加成本而难以带来直接收益, 因此未进入最优控制策略。

在上述最优控制策略下, 对系统累计收益进行数值模拟, 并与无控制情形进行比较, 结果如图 3 所示。从累计收益的变化来看, 无论是否实施控制, 累计收益均随时间增加, 但在实施最优控制策略后, 后期收益略高于无控制情形。这表明所得到的最优控制策略不仅能够抑制疾病传播, 还能够在长期内提高养殖系统的整体经济收益。

总体而言, 数值模拟结果表明, 最优控制策略能够有效降低布病的传播规模。同时, 各控制措施并非在整个时间区间内持续实施, 而是根据系统状态在特定阶段发挥作用。这种阶段性控制策略能够在保证疾病防控效果的同时降低控制成本, 从而实现疾病控制与经济收益之间的平衡。

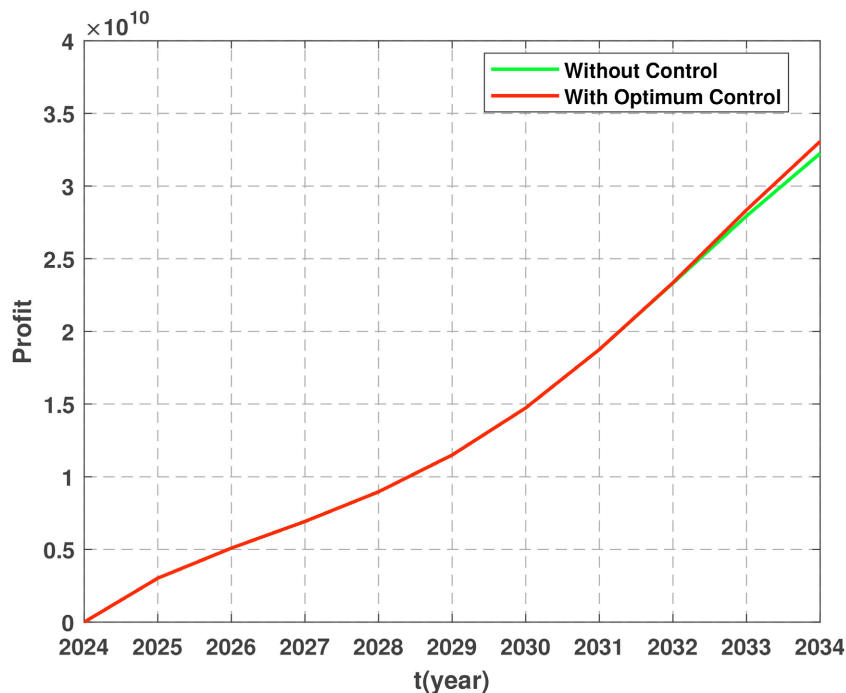


Figure 3. Final returns under optimal control versus no control

图 3. 最优控制与无控制的最终收益

5.2. 控制疾病流行时间最短化模拟

在 5.1 节中, 虽然在实施最优控制以实现养殖户收益最大化的情形下, 人间布病的传播最终能够得到控制, 但从数值结果来看, 其控制所需时间相对较长。考虑当多种控制措施同时实施时, 理论上可能获得更短的疾病控制时间。

在资源不受限制即不考虑控制成本的情况下,持续实施最大强度的控制措施即可在最短时间内消除疾病。然而,在实际防控过程中,资源通常是有限的,因此无法长期维持最大控制强度,这就需要在控制效果与资源消耗之间进行权衡。为此,需要通过最优控制策略,根据系统状态动态调整各类干预措施,从而在有限资源条件下尽可能缩短疾病的控制时间。根据本节开头给出的成本假设,若在整个时间区间内持续实施最大控制强度,则布病疫情大约可在4年左右被消除,如图4(a)所示,此时对应的总控制成本约为2.12亿元。这意味着当可用资源不低于2.12亿元时,即使继续增加投入,疾病的最短根除时间也不会进一步缩短,因此假设 $z_{\max} \leq 2.1$ 。

在此基础上,进一步限制可用资源总量,并逐步减少最大资源约束。当可用资源减少时,最优控制策略需要在不同控制措施之间进行权衡配置,从而导致疾病根除时间逐渐延长。当资源不足以支撑疾病完全消除时,系统将无法在有限时间内实现疫情根除。最终得到疾病根除时间随最大资源量变化的关系,如图4(b)所示。

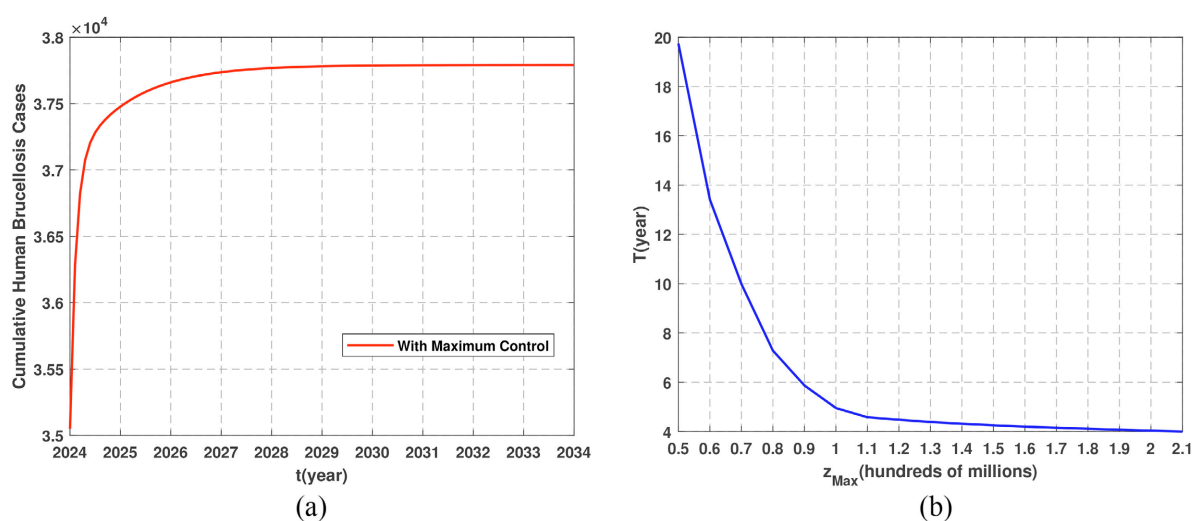


Figure 4. (a) The maximum number of human brucellosis cases under optimal control; (b) The relationship between the shortest time to eradication and the maximum available resources

图 4. (a) 最大控制下的人间布病病例数; (b) 最短根除时间与最大可用资源关系

当可用资源位于1.1亿元至2.1亿元之间时,随着最大资源约束逐渐减小,疾病的最优根除时间仅呈缓慢增长趋势。减少资金投入并不会显著延长根除时间。而当可用资源进一步降低至0.5亿元至1.1亿元之间时,疾病的根除时间明显延长,此时最优控制策略的作用更加显著,需要在五种控制措施之间综合权衡控制成本与控制效果。基于这一分析,本文选取最大资源约束为0.9亿元的情形进行模拟。在该资源约束下,除控制 $u_2(t)$ 外,其余控制措施在大部分时间区间内均保持开启状态。表明对感染牲畜的扑杀措施,尽管其在减少疾病传播方面具有较高效率,但由于经济成本较高,在有限资源条件下未被优先采用。相比之下,控制 $u_5(t)$ (减少人与感染羊群接触)在整个模拟期间均保持激活状态,说明该措施在控制成本较低的同时具有较高的控制效率。

进一步对比实施控制与不实施控制情况下的人间布鲁氏菌病累计病例数变化。见图5。结果表明,最优控制能够显著抑制疾病传播,在模拟末期每年新增病例数已降至1例以下,表明疫情已得到有效控制。此外,将该情形与图4(a)中持续实施最大控制策略的结果进行比较可以发现:虽然最优控制同样能够最终消除疾病,但其根除时间约为5.7年,明显长于最大控制策略。同时,在整个控制过程中累计病例数达到46,926例,相比最大控制策略增加约10,000例。成本约束显然限制了疾病的控制效果。

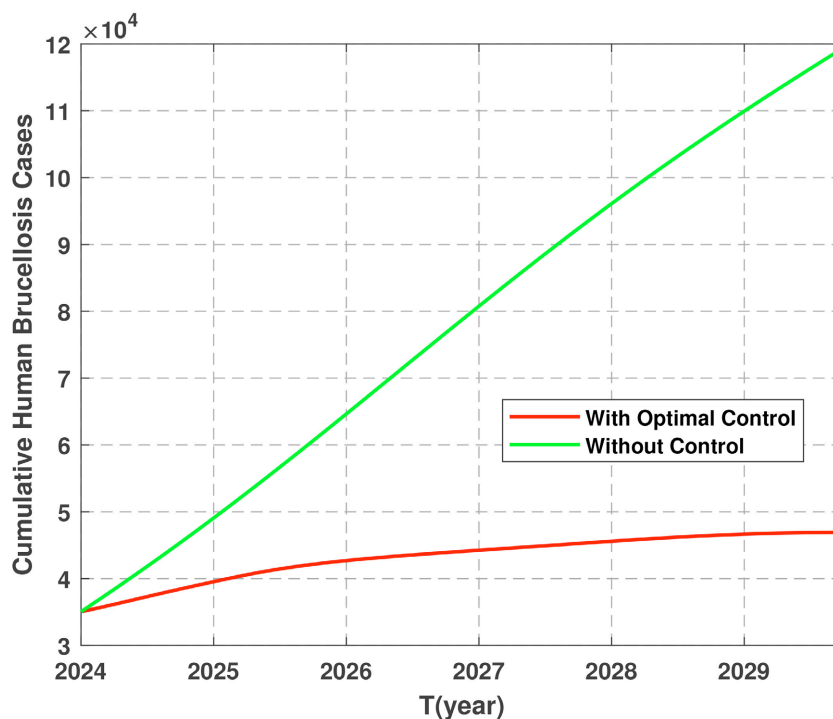


Figure 5. Comparison of cumulative cases of brucellosis with optimal controls and without control

图 5. 最优控制与不控制的人间布病累计数对比

综上所述，减少人与感染羊群之间的接触在缩短疾病控制时间方面表现出最为显著的效果，是该时间最优控制问题中最有效的干预措施之一。同时，数值结果表明，在资源受限条件下实施最优控制策略虽然能够显著降低整体控制成本，但相应地会导致疾病控制时间延长以及累计感染人数增加。这表明疾病防控过程中存在控制成本与控制效果之间的权衡关系。因此，在实际防控过程中，应根据资源条件与疫情发展情况，合理选择并组合不同控制措施，以实现疾病控制效果与经济成本之间的平衡。

6. 结论

本文针对布鲁氏菌病在羊群养殖系统中的传播问题，考虑市场价格波动和养殖户行为决策对养殖规模的影响，构建了一个耦合经济因素与疾病传播机制的羊-布病动力学模型。通过引入羊肉市场动态价格与养殖户养殖意愿变量，刻画了“价格-意愿-存栏量”之间的相互作用关系，并在此基础上进一步考虑布鲁氏菌病在羊群、环境以及人群之间的传播过程。随后在模型中引入多种防控措施，建立了收益最大化最优控制问题与有限资源约束下的时间最优控制问题，证明了两种问题最优控制解的存在性，并给出了控制解的显式结构。最后结合宁夏地区实际数据进行了参数估计与数值模拟分析。主要应用模拟结论如下：

(1) 在固定终端时间条件下，以养殖户收益最大化为目标的最优控制结果表明，多种控制措施在不同阶段发挥协同作用。其中，对感染羊群实施扑杀以及政府经济干预措施在最优控制策略中占据较重要地位，能够在控制疾病传播的同时提高系统整体经济收益。相比之下，减少人与感染羊群接触的措施由于难以直接提高养殖收益，在收益最大化目标下未被采用。

(2) 在有限资源约束条件下，以最短时间消除疾病为目标的时间最优控制问题表明，当资源充足时，持续实施最大控制强度能够在约 4 年内消除布鲁氏菌病。然而，当资源受到限制时，需要在不同控制措

施之间进行合理配置，从而在控制成本与控制效果之间取得平衡。数值结果显示，减少人与感染羊群接触在缩短疾病控制时间方面具有最显著效果，是该情形下最为有效的干预措施之一。

(3) 进一步分析发现，疾病根除时间与可用资源之间存在明显的非线性关系。当可用资源位于一定区间内时，减少部分控制投入并不会显著延长疾病根除时间；但当资源进一步降低时，疾病控制时间将迅速增加，甚至可能无法在有限时间内实现疫情消除。

基金项目

本文受到山西省基础研究计划自然科学研究面上项目(批准号：202303021221024)的资助。

参考文献

- [1] Corbel, M.J. (1997) Brucellosis: An Overview. *Emerging Infectious Diseases*, **3**, 213-221. <https://doi.org/10.3201/eid0302.970219>
- [2] 高晟斌, 韦欣捷, 刘爱玲, 孙利凯, 王幼明. 羊布鲁氏菌病直接经济损失与防控成本效益分析方法构建及实证研究[J]. *中国动物检疫*, 2022, 39(7): 1-6.
- [3] Mendes, Â.J.F., Haydon, D.T., de Glanville, W.A., Bodenham, R.F., Lukambagire, A.S., Johnson, P.C.D., *et al.* (2025) Livestock Production Losses Attributable to Brucellosis in Northern and Central Tanzania: Application of an Epidemiological-Economic Modelling Framework. *PLOS Neglected Tropical Diseases*, **19**, e0012814. <https://doi.org/10.1371/journal.pntd.0012814>
- [4] Bai, S., Cao, B., Kang, T. and Wang, Q. (2025) A Two-Stage Sheep-Environment Coupled Brucellosis Transmission Dynamic Model: Stability Analysis and Optimal Control. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **30**, 1207-1231. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2024126>
- [5] Msuya, R., Mirau, S., Nyerere, N. and Mbalawata, I. (2025) The Role of Temporary Displacement of Domestic Animals in Brucellosis Control. *Results in Control and Optimization*, **21**, Article 100627. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2025.100627>
- [6] Chu, H., Rong, X., Yang, L. and Fan, M. (2025) Dynamical Analysis and Optimal Control Strategy of Seasonal Brucellosis. *Mathematics and Computers in Simulation*, **234**, 299-324. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2025.03.003>
- [7] Song, C. and Song, Z. (2025) Global Dynamics and Optimal Control Strategies for the Brucellosis Model with Environmental Saturation Infection: An Assessment of Severely Affected Provinces in China. *Mathematics and Computers in Simulation*, **236**, 379-410. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2025.04.008>
- [8] Mansal, F., Nguyen-Huu, T., Auger, P. and Balde, M. (2014) A Mathematical Model of a Fishery with Variable Market Price: Sustainable Fishery/Over-Exploitation. *Acta Biotheoretica*, **62**, 305-323. <https://doi.org/10.1007/s10441-014-9227-7>
- [9] Wang, L., Li, M., Pei, X. and Zhang, J. (2022) Optimal Breeding Strategy for Livestock with a Dynamic Price. *Mathematics*, **10**, Article 1732. <https://doi.org/10.3390/math10101732>
- [10] Hutchins, J. and Hueth, B.M. (2018) Supply Response in Dairy Farming: Evidence from Monthly Cow-Level Data. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, **47**, 38-56.
- [11] Li, W.Y. and Xiao, X.Y. (2017) Study on The Influencing Factors of Decision-Making Behaviors in Hog Breeding Industry with Price Volatility by The Prospect Theory. *Research of Agricultural Modernization*, **38**, 484-492.
- [12] Wang, L., Li, M., Pei, X., Zhang, J., Sun, G. and Jin, Z. (2023) Cost Assessment of Optimal Control Strategy for Brucellosis Dynamic Model Based on Economic Factors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **124**, Article 107310. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107310>
- [13] 陈雅, 李明涛, 裴鑫, 柴玉珍. 基于动态价格下的家畜养殖模型及其分析[J]. *应用数学进展*, 2022, 11(7): 4480-4495.
- [14] Du, S., Li, M., Chai, Y., Pei, X. and Zhang, J. (2025) Optimising Breeding Strategies for Sheep Populations in Response to Dynamic Price: A Case Study in Xinjiang. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2025**, Article ID: 88. <https://doi.org/10.1186/s13662-025-03947-3>
- [15] Bolzoni, L., Bonacini, E., Della Marca, R. and Groppi, M. (2019) Optimal Control of Epidemic Size and Duration with Limited Resources. *Mathematical Biosciences*, **315**, Article 108232. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2019.108232>
- [16] Lv, W., Jiang, N. and Yu, C. (2023) Time-Optimal Control Strategies for Tungiasis Diseases with Limited Resources. *Applied Mathematical Modelling*, **117**, 27-41. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.12.016>
- [17] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for

Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48.
[https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6)

- [18] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. and Roberts, M.G. (2009) The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *Journal of The Royal Society Interface*, **7**, 873-885.
<https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0386>
- [19] 国家发展和改革委员会价格司, 国家发展和改革委员会价格成本和认证中心. 全国农产品成本收益资料汇编 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2024.