

带调谐的梳状指尖MEMS模型中周期解的存在性及稳定性研究

姬瑞瑶

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月10日

摘要

随着科技的发展, MEMS技术在军民应用中越来越广泛。其中, 梳齿驱动器是MEMS中最重要的一种器件。本文旨在介绍带调谐的梳状指尖MEMS模型的存在性及稳定性的研究方法。

关键词

周期解, 梳状指尖驱动器, 存在性, 稳定性

Study on the Existence and Stability of Periodic Solutions in a Comb-Drive Finger MEMS with Tuning Model

Ruiyao Ji

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

With the development of technology, MEMS technology is becoming increasingly widespread in military and civilian applications. Among them, comb drive is the most important device in MEMS. This article aims to introduce the research methods for the existence and stability of a comb-drive finger MEMS model with tuning.

Keywords

Periodic Solution, Comb-Drive Finger Model, Existence, Stability



1. 引言

微机械电子系统(Micro Electromechanical System, MEMS)是利用集成电路(IC: Integrated Circuit)制造技术和微加工技术(Micro-fabrication)把微结构、微传感器、微执行器、控制处理电路甚至接口、通信和电源等制造在一块或者多块芯片上的微型集成系统,已经广泛应用于传感器[1][2]、生物医学[3]-[6]、通信[7]-[9]、纳米技术[10]等社会和经济领域,对人们的生活产生了深远的影响[11]。

在 MEMS 谐振器中,梳齿式谐振器是最早被研究出来的,由于其能实现机械能和其他能量之间的转换,并且可以产生较大的振动幅值,所以广泛应用于各个领域,如汽车安全气囊[12]、小卫星[13]、磁头驱动器[14]等。在这些产品中, MEMS 研究领域受到普遍重视。另外,根据激励方式不同,梳齿式谐振器可以分为静电驱动式[15]-[17]、压电驱动式[18]、磁驱动式[19]等类型,静电驱动式就是在谐振器的驱动端施加静电力,利用梳齿指尖电荷的库仑力作为驱动力,使得梳齿结构相互吸引或排斥而运动起来,静电驱动式是 MEMS 中应用最广泛、最典型的驱动方式。在这种谐振器的运作中,器件可能表现为非线性振动,而研究器件振动的周期解的存在性和稳定性对于设备稳定且高效的运行至关重要。

本文所介绍的带调谐的梳状指尖 MEMS 模型正是上述静电式谐振器的一种。在[20]中已经给出两类静电式梳状谐振器研究,分别是具有线性刚度的梳状驱动器[21]和具有三次非线性刚度的梳状驱动器[22]。这两类驱动器的周期解的存在性和稳定性的研究[21]-[24]相较于带调谐的梳状指尖驱动器的存在性及稳定性的研究[25]更为完善。带调谐的梳状指尖 MEMS 模型与[20]中的两类模型的不同之处在于:带调谐的梳状指尖 MEMS 中除具有线性刚度系数和三次非线性刚度系数外,还具有可调线性刚度系数和可调非线性刚度系数,[20]中的两类模型仅分别具有线性刚度系数和非线性刚度系数。

2. 模型介绍

带调谐的梳状指尖 MEMS 模型具有非交叉指状电极,对此类模型在参数激励下的动力学行为、混沌的存在以及非线性对参数共振行为的影响已有相当多的研究[26]-[34]。此外,有一些带调谐的梳状指尖 MEMS 设备可以通过参数共振用作质量传感器和频率滤波器,并且对动力学进行数学分析的最常用方法是振动法和数值法。

关于本文所考虑的 MEMS 谐振器是由一个可移动的骨干组成,它连接到各种扰曲和一对非交叉的梳状驱动器上,每当施加电压信号时,它们就会驱动设备。因此,振荡器的运动是由骨干的位移来描述的,作用在它上面的力是由弯曲产生的弹性恢复力、来自非交叉梳状驱动器的静电力与主要来自空气动力的耗散效应(通常很小)。

注意这里的弹性恢复力是由位移的三次函数来描述的,它引入了线性和三次非线性机械刚度系数。此外,由于有些参数激励装置具备两组独立的梳状驱动器:一组使用直流输入电压用于调谐,另一组使用交流输入电压,组合静电驱动力也可以通过位移的三次函数精确描述。因此,我们得到一对线性和三次非线性静电刚度,每一对都与相应的一组梳状驱动器相关。事实上,刚度系数可正可负,这取决于梳状指尖电极的对齐方式和几何形状[27]-[29],这是一个可以产生不同功能配置的有趣且独特的特性。图 1 中我们给出所考虑设备的结构图。

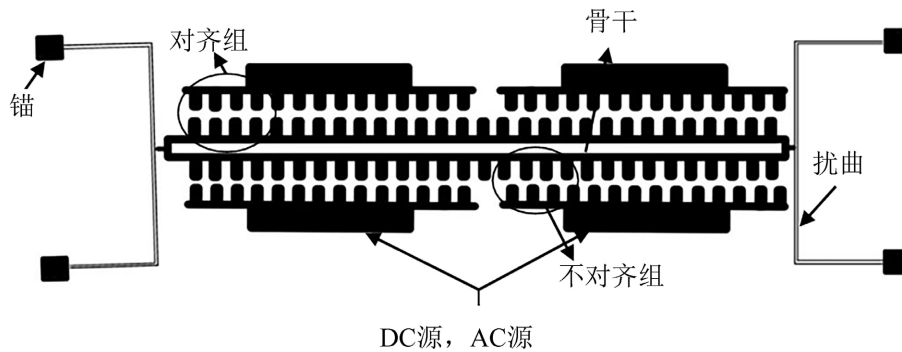


Figure 1. Comb-drive MEMS model with tuning
图 1. 带调谐的梳齿驱动 MEMS 模型

下面, 给出归一化的非线性 Mathieu 方程, 该方程对带调谐的梳状指尖 MEMS 谐振器的机械响应进行建模, 后面将忽略阻尼效应。令 x 表示穿梭质量块在归一化时间 t 内的归一化位移, 于是无阻尼模型为[25] [35]:

$$\ddot{x} + [\beta + \delta\gamma(1 + \cos(\Omega t))]x + [\zeta + \delta\eta(1 + \cos(\Omega t))]x^3 = 0(1)$$

这里

$$\beta = 1 + \frac{r_{10}V_0^2}{k_1}, \zeta = \frac{x_0^2(k_3 + r_{30}V_0^2)}{k_1}, \gamma = \frac{r_{1A}V_A^2}{k_1}, \eta = \frac{x_0^2 r_{3A}V_A^2}{k_1}$$

x_0 是穿梭质量块的长度, k_1 和 k_3 分别是线性和三次非线性刚度系数, r_{10} 和 r_{30} 分别是当提供幅值为 V_0 的直流输入电压时, 直流受激指状电极产生的线性和三次非线性静电系数, r_{1A} 和 r_{3A} 分别是当提供幅值为 V_A 、频率为 Ω 的平方根余弦交流输入电压($V(t) = V_{AC}\sqrt{1 + \cos(\Omega t)}$)时, 交流受激指状电极产生的线性和三次非线性静电系数。

3. 研究现状

近年来, 对于梳齿式谐振器模型的周期运动的研究越来越多。对[20]中的两类模型周期解的存在性和稳定性已较为完善, 尤其是对两类模型周期解的存在性研究, 均分别采用打靶法和全局延拓法对其进行了证明[23]-[27]。而对于带调谐的梳状指尖 MEMS 模型周期解的存在性与稳定性的研究, 仅在[25]中给出。

3.1. 带调谐的梳状指尖 MEMS 模型中周期解的存在性

对带调谐的梳状指尖 MEMS 模型中周期解的存在性的研究理论基础主要是奥尔特加原则[25], 奥尔特加原则被广泛应用在系统周期解的存在性研究中[23] [25] [36]。在[25]中给出了方程(1)的奇对称周期解存在性, 证明方法依赖于奥尔特加原则但又与之不同, [25]中将它称为对偶变分原则, 两种方法的不同主要体现在两个方面: 第一是使用条件上的不同, 在奥尔特加原则中指出在形如下式的变分方程:

$$\ddot{x} + xD(t, x) = 0(2)$$

中需要满足对任意 $t \in R$ 且 $x \neq 0$ 时有 $D(t, 0) < D(t, x)$ 才可进一步判断是否可以得到结论, 而这里使用的对偶对分原则不再满足上述不等式, 而是满足对任意 $t \in R$ 且 $x \neq 0$ 时有 $D(t, 0) > D(t, x)$; 第二是结论上的不同, 在奥尔特加原则中得到的解的零点数量是有上界的, 而在对偶变分原则中解的零点数量是有下界的, 不再有上界。对偶变分原则与 Ortega 原则的两处不同根源在于系统中 $D(t, x)$ 特征不同。在[25]中

得出结论采用了下面的定理，也即对偶变分原则的主要内容。

定理 3.1 令 $m > 0, N \geq 0$ 是两个整数，考虑方程(2)中的 $D(t, x)$ 满足：

$$(H1) \quad D(-t, x) \equiv D(t, x) \equiv D(-t, x)$$

$$(H2) \quad D(t, 0) < D(t, x), \forall t \in \mathbb{R}, \text{ 且 } x \neq 0, \nu_m^0 + 2 \leq \hat{\nu}_m < \infty$$

如果

$$\nu_m^0 + 1 \leq N \leq \hat{\nu}_m - 1,$$

则至少存在一个(2)的 mT -周期解 $x_{m,N}(t)$ 在 $\left(0, \frac{mT}{2}\right)$ 上恰有 N 个零点($\nu_m^0, \hat{\nu}_m$ 的具体含义见[25])。

带调谐的梳状指尖 MEMS 模型恰有方程(2)的形式，因此其周期解的存在性的证明即随该定理的完成而完成，下面对该定理的证明思路进行总结。该定理的证明分为 5 步完成，第一步中通过构造函数 $f_\nu(t) = \frac{x(t, \nu)}{\nu}$ 并且结合 C^1 收敛定理计算了当 $\nu \rightarrow 0^+$ 时解的零点数量；第二步中由 Sturm 比较定理得到 ν_m 的一个下界；第三步中通过构造集合 $\hat{\Omega}_{m,N}$ 结合变分原理得到 ν_m 的下确界；第四步中通过 ν_m 的下界得到解 $x(t, \hat{\omega}_{m,N})$ 在半周期内的零点数量；最后一步中指出上述系统的解 $x(t, \hat{\omega}_{m,N})$ 也是与其相关的狄利克雷问题的解，也即指出系统(2)的解和与其相关的狄利克雷问题的解之间的等价性。

3.2. 带调谐的梳状指尖 MEMS 模型中周期解的稳定性

对方程(1)中稳定性的研究基础来源于对 Sitnikov 系统中周期解稳定性的研究方法[37] [38]。在这两篇文章中对一类二阶拉格朗日方程的周期解的稳定性进行了研究：通过希尔方程稳定性相关理论，求出其相应的 T -庞加莱矩阵的迹在参数 $\delta = 0$ 时导数的表达式并判断其符号。[38]中分别给出了奇对称周期解和偶对称周期解的相应的 T -庞加莱矩阵的迹在参数 $\delta = 0$ 时导数的表达式，这为判断梳状指尖 MEMS 模型的周期解的稳定性奠定了重要基础。在[25]中仅根据此方法给出(1)的奇 $(2,1)$ -周期解的稳定性，并依此得出系统(1)存在双稳定区域的结论。在文章[25]的最后指出：有望通过[36]中的方法得到(1)的奇 $(2n,1)$ -周期解的稳定性，但目前尚未有研究得到此结果。

4. 总结

一方面，针对带调谐的梳状指尖 MEMS 模型周期解的存在性仅有采用对偶变分原则研究的过程，或许也可以通过延拓法对其进行证明；其次，由于[39]中给出的是奥尔特加原则是针对奇周期解的，故在[25]中给出的仅是奇周期解的存在性。在[36]中给出了偶周期解的奥尔特加原则，据此可以得到(1)的偶周期解的存在性。

另一方面，针对带调谐的梳状指尖 MEMS 模型周期解的稳定性仅有奇 $(2,1)$ -周期解的稳定性，奇 $(2n,1)$ -周期解的稳定性研究尚未展开。

参考文献

- [1] Yazdi, N., Mason, A., Najafi, K. and Wise, K.D. (2000) A Generic Interface Chip for Capacitive Sensors in Low-Power Multi-Parameter Microsystems. *Sensors and Actuators A: Physical*, **84**, 351-361. [https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(00\)00307-1](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(00)00307-1)
- [2] Adrega, T., Chu, V. and Conde, J.P. (2006) Electrostatically Actuated Resonance of Amorphous Silicon Microresonators in Water. *Applied Physics Letters*, **89**, Article 143109. <https://doi.org/10.1063/1.2358215>
- [3] Bashir, R. (2004) BioMEMS: State-of-the-Art in Detection, Opportunities and Prospects. *Advanced Drug Delivery Reviews*, **56**, 1565-1586. <https://doi.org/10.1016/j.addr.2004.03.002>
- [4] 赵晨茜, 张大伟, 王远瑞, 等. 基于微机电系统的智能传感器在全膝关节置换术中的应用及现状[J]. 骨科, 2024,

- 15(6): 563-567.
- [5] Judy, J.W. (2001) Microelectromechanical Systems (MEMS): Fabrication, Design and Applications. *Smart Materials and Structures*, **10**, 1115-1134. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/6/301>
- [6] Chircov, C. and Grumezescu, A.M. (2022) Microelectromechanical Systems (MEMS) for Biomedical Applications. *Micromachines*, **13**, Article No. 164. <https://doi.org/10.3390/mi13020164>
- [7] Wu, M.C., Solgaard, O. and Ford, J.E. (2006) Optical MEMS for Lightwave Communication. *Journal of Lightwave Technology*, **24**, 4433-4454. <https://doi.org/10.1109/jlt.2006.886405>
- [8] Schopp, J. and McNamara, S. (2024) Passive Communication for Low Power Distributed Sensors Using MEMS Optical Cavities. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **34**, Article ID: 035011. <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ad2910>
- [9] Hou, Y., Jiao, R. and Yu, H. (2021) MEMS Based Geophones and Seismometers. *Sensors and Actuators A: Physical*, **318**, Article ID: 112498. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112498>
- [10] Ekinici, K.L. and Roukes, M.L. (2005) Nanoelectromechanical Systems. *Review of Scientific Instruments*, **76**, Article ID: 061101. <https://doi.org/10.1063/1.1927327>
- [11] Nadim, M. (2000) An Introduction to Microelectromechanical System Engineering. Norwood, Artech House, 3-6.
- [12] Marek, J. (2011) Automotive MEMS Sensors-Trends and Application. *Proceeding of 2011 International Symposium on VLSI Technology, Systems and Applications*, Hsinchu, 1-2.
- [13] 李德胜. MEMS 技术及其应用[M]. 第 2 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003: 35-45.
- [14] Fan, L., Tai, Y. and Muller, R.S. (1989) Ic-Processed Electrostatic Micromotors. *Sensors and Actuators*, **20**, 41-47. [https://doi.org/10.1016/0250-6874\(89\)87100-8](https://doi.org/10.1016/0250-6874(89)87100-8)
- [15] 李佰洲, 韩建鑫, 黄仪, 等. 考虑边缘效应的静电驱动 MEMS 振子非线性振动定性研究[J]. 振动与冲击, 2025, 44(1): 10-19.
- [16] Jung, Y., Jo, E. and Kim, J. (2025) Electrostatically Driven Two-Axis Microelectromechanical Magnetometer with Eccentric Resonator and Electromagnetic Inductor. *Sensors and Actuators A: Physical*, **387**, Article ID: 116378. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2025.116378>
- [17] Lai, S.K., Yang, X., Wang, C. and Liu, W.J. (2019) An Analytical Study for Nonlinear Free and Forced Vibration of Electrostatically Actuated MEMS Resonators. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **19**, Article ID: 1950072. <https://doi.org/10.1142/s021945541950072x>
- [18] 张录. 压电驱动 RF MEMS 开关的设计及制备[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2024.
- [19] 董林玺, 焦继伟, 颜海霞, 等. 新型磁驱动增大检测电容的高精度 MEMS 惯性传感器研究[J]. 电子学报, 2010, 38(5): 1053-1057.
- [20] 赵蕊. 两类梳齿驱动器模型中周期解的存在性及稳定性研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 266-272.
- [21] Núñez, D., Larreal, O. and Murcia, L. (2021) Odd Periodic Oscillations in Comb-Drive Finger Actuators. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **61**, Article ID: 103347. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103347>
- [22] Larreal, O., Murcia, L. and Núñez, D. (2022) Odd Periodic Oscillations for COMB-Drive Fingers MEMS with Cubic Stiffness. *Journal of Mathematical Control Science and Applications*, **8**, 185-197.
- [23] Nuñez, D., Perdomo, O. and Rivera, A. (2019) On the Stability of Periodic Solutions with Defined Sign in MEMS via Lower and Upper Solutions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **46**, 195-218. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.010>
- [24] Gutierrez, A., Núñez, D. and Rivera, A. (2017) Effects of Voltage Change on the Dynamics in a Comb-Drive Finger of an Electrostatic Actuator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **95**, 224-232. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.008>
- [25] Núñez, D. and Murcia, L. (2023) On a Bi-Stability Regime and the Existence of Odd Subharmonics in a Comb-Drive MEMS Model with Cubic Stiffness. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **74**, Article ID: 103938. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103938>
- [26] DeMartini, B., Moehlis, J., Turner, K., Rhoads, J., Shaw, S. and Zhang, W. (2005) Modeling of Parametrically Excited Microelectromechanical Oscillator Dynamics with Application to Filtering. *Sensors*, **168**, 180-199.
- [27] DeMartini, B.E., Butterfield, H.E., Moehlis, J. and Turner, K.L. (2007) Chaos for a Microelectromechanical Oscillator Governed by the Nonlinear Mathieu Equation. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **16**, 1314-1323. <https://doi.org/10.1109/jmems.2007.906757>
- [28] Zhang, W., Baskaran, R. and Turner, K. (2003) Tuning the Dynamic Behavior of Parametric Resonance in a Micromechanical Oscillator. *Applied Physics Letters*, **82**, 130-132. <https://doi.org/10.1063/1.1534615>

-
- [29] Adams, S.G., Bertsch, F.M., Shaw, K.A. and MacDonald, N.C. (1998) Independent Tuning of Linear and Nonlinear Stiffness Coefficients [Actuators]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **7**, 172-180. <https://doi.org/10.1109/84.679344>
- [30] Rhoads, J.F., Shaw, S.W., Turner, K.L. and Baskaran, R. (2005) Tunable Microelectromechanical Filters That Exploit Parametric Resonance. *Journal of Vibration and Acoustics*, **127**, 423-430. <https://doi.org/10.1115/1.2013301>
- [31] Rhoads, J.F., Shaw, S.W., Turner, K.L., Moehlis, J., DeMartini, B.E. and Zhang, W. (2006) Generalized Parametric Resonance in Electrostatically Actuated Microelectromechanical Oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, **296**, 797-829. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.009>
- [32] Shaw, S.W., Turner, K.L., Rhoads, J.F. and Baskaran, R. (2005) Parametrically Excited MEMS-Based Filters. In: Rega, G. and Vestroni, F., Eds., *IUTAM Symposium on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*, Springer, 137-146. https://doi.org/10.1007/1-4020-3268-4_13
- [33] Wang, Y.C., Adams, S.G., Thorp, J.S., MacDonald, N., Hartwell, P. and Bertsch, F. (1998) Chaos in MEMS, Parameter Estimation and Its Potential Application. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **45**, 1013-1020.
- [34] Zhang, W., Baskaran, R. and Turner, K.L. (2002) Effect of Cubic Nonlinearity on Auto-Parametrically Amplified Resonant MEMS Mass Sensor. *Sensors and Actuators A: Physical*, **102**, 139-150. [https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(02\)00299-6](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(02)00299-6)
- [35] Gasull, A., Guillamon, A., Mañosa, V. and Mañosas, F. (1997) The Period Function for Hamiltonian Systems with Homogeneous Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **139**, 237-260. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3296>
- [36] Misquero, M. (2018) Resonance Tongues in the Linear Sitnikov Equation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **130**, 1-25. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9825-9>
- [37] Cen, X., Liu, C. and Zhang, M. (2021) A Proof for a Stability Conjecture on Symmetric Periodic Solutions of the Elliptic Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **20**, 941-952. <https://doi.org/10.1137/20m1349692>
- [38] Cen, X., Cheng, X., Huang, Z. and Zhang, M. (2020) On the Stability of Symmetric Periodic Orbits of the Elliptic Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**, 1271-1290. <https://doi.org/10.1137/19m1258384>
- [39] Ortega, R. (2016) Symmetric Periodic Solutions in the Sitnikov Problem. *Archiv der Mathematik*, **107**, 405-412. <https://doi.org/10.1007/s00013-016-0931-1>