Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 680-693
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154193

Hans汉斯

具有抑制因子的食物链恒化器模型的正解研究

成新宇

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2026年3月23日；录用日期：2026年4月18日；发布日期：2026年4月24日

摘　要

本文研究了非均匀恒化器中具有抑制因子的食物链模型，其中捕食者以生长在恒化器中的单个食饵为食，总体捕食者对可育捕食者存在抑制作用。首先，运用线性化特征值理论，得出系统平凡解和半平凡解的稳定性；然后，运用分歧理论等研究了模型的正稳态解分支，局部分歧解的稳定性以及将局部分歧延拓为全局分歧。

关键词

恒化器，抑制因子，捕食食饵模型

Positive Solution Study of the Food Chain Chemostat Model with Inhibitors

Xinyu Cheng

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: March 23, 2026; accepted: April 18, 2026; published: April 24, 2026

Abstract

In this paper, a predator-prey model with inhibitors in an unstirred chemostat is studied, in which the predator feeds on a single prey growing in the chemostat, and the overall predator has an inhibitory effect on reproducing predators. Firstly, the linearization eigenvalue theory is used to

文章引用: 成新宇. 具有抑制因子的食物链恒化器模型的正解研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 680-693.
DOI: 10.12677/aam.2026.154193

obtain the stability of the trivial and semi-trivial solutions of the system. Then, using bifurcation theory and other methods, the branches of the model's positive steady-state solutions, the stability of local bifurcation solutions, and the continuation of local bifurcations to global bifurcations were studied.

Keywords

Chemostat, Inhibitor, Predator-Prey Model

1. 引言

恒化器模型是学者青睐的研究课题之一。Waltman 和 Smith 最早研究恒化器模型，最初假设恒化器是均匀搅拌的，发现均匀恒化器模型[1]中“竞争排斥原理”成立。为了更好解释微生物共存的现象，研究者将食物链引入到均匀恒化器模型[2]中，研究表明“竞争排斥原理”不成立。进一步，为了更好地描述自然界的生物现象，抑制剂[3]，周期性输入输出[4]，时滞[5]等被引入到均匀恒化器模型中。

随后，为刻画自然环境的非均匀性，去掉了均匀搅拌的假设，建立了非均匀的恒化器模型[6] [7]。So 和 Waltman 最先把扩散引入恒化器模型，在文献[8]中通过应用分歧定理，最终得出了模型局部分歧解的存在性，并通过数值模拟验证和补充了理论部分。此后，更多的学者开始重视带有扩散的恒化器的研究。Nie 等在文献[7]中研究了恒化器中动态分配毒素产生的竞争模型，得到了单种群模型正稳态解的存在性和唯一性，两物种系统正平衡态的存在性，并建立了两物种系统非负平衡态的结构和稳定性。Shi 等在文献[9]中研究了扩散对两个物种竞争同一种养分的非均匀恒化器模型动力学行为的影响。

近年来，捕食－食饵反应扩散模型的研究得到了广泛关注。Li 等在文献[10]中考虑了具有 Crowley-Martin 功能反应的食物链模型，结果表明当捕食者的最大生长率属于一定范围时，该模型只有一个唯一的线性稳定共存解。Nie 等[11]研究了一种扩散性捕食－食饵恒化器系统，该系统的动力学行为是根据扩散速率建立的，结果表明，对于较大的扩散速率，所有物种都会被冲走；对于中等扩散速率，捕食者灭绝，食饵存活；对于较小的扩散速率，所有物种共存。在此基础之上，本文考虑总体捕食者对可育捕食者的抑制作用，讨论以下非均匀恒化器模型的反应扩散系统

$$
\begin{cases}
\mathcal{S}_t = d\mathcal{S}_{xx} - a\mathcal{U}\dfrac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2}, & 0<x<1, t>0,\\
\mathcal{U}_t = d\mathcal{U}_{xx} + a\mathcal{U}\dfrac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2} - b\mathcal{W}\dfrac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}, & 0<x<1, t>0,\\
\mathcal{V}_t = d\mathcal{V}_{xx} + b\mathcal{V}\dfrac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - (m+\alpha)\mathcal{V}, & 0<x<1, t>0,\\
\mathcal{W}_t = d\mathcal{W}_{xx} + b\mathcal{V}\dfrac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - m\mathcal{W}, & 0<x<1, t>0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

边界条件为

$$\begin{cases}\mathcal{S}_x(0,t)=-S^0,\mathcal{S}_x(1,t)+\gamma\mathcal{S}(1,t)=0, & t>0,\\ \mathcal{U}_x(0,t)=\mathcal{U}_x(1,t)+\gamma\mathcal{U}(1,t)=0, & t>0,\\ \mathcal{V}_x(0,t)=\mathcal{V}_x(1,t)+\gamma\mathcal{V}(1,t)=0, & t>0,\\ \mathcal{W}_x(0,t)=\mathcal{W}_x(1,t)+\gamma\mathcal{W}(1,t)=0, & t>0,\end{cases} \tag{2}$$

初始条件为

$$\begin{cases}\mathcal{S}(x,0)=\mathcal{S}_0(x)\ge 0,\mathcal{U}(x,0)=\mathcal{U}_0(x)\ge 0, & 0<x<1,\\ \mathcal{V}(x,0)=\mathcal{V}_0(x)\ge 0,\ne 0,\mathcal{W}(x,0)=\mathcal{W}_0(x)\ge 0,\ne 0, & 0<x<1,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\mathcal{S}(x,t)$ 表示营养液的浓度，$\mathcal{U}(x,t)$ 表示食饵的浓度，$\mathcal{W}(x,t)$ 和 $\mathcal{V}(x,t)$ 分别表示一类捕食者的总浓度和这类捕食者中可育捕食者的浓度，$S^0>0$ 表示营养液的初始输入浓度，$\frac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2}$ 和 $\frac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}$ 为 Holling-III反应函数，k_1,k_2 为正常数，a 和 b 分别表示食饵和捕食者的最大生长率，l 表示总体捕食者 $\mathcal{W}(x,t)$ 对可育捕食者 $\mathcal{V}(x,t)$ 起抑制作用的因子，m 表示捕食者的死亡率，α 表示捕食者繁殖力的衰减率，d 表示营养液、食饵及捕食者的扩散系数，γ 为正常数。$\mathcal{S}_0(x)$，$\mathcal{U}_0(x)$，$\mathcal{V}_0(x)$，$\mathcal{W}_0(x)$ 是[0, 1]上的非负连续函数，而且总体捕食者初始浓度 $\mathcal{W}_0(x)$ 总会大于等于可育捕食者初始浓度 $\mathcal{V}_0(x)$，所以系统的生物可行域为

$$\mathbf{X}=\left\{(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,\mathcal{V}_0,\mathcal{W}_0)\in\mathbf{C}\left([0,1],\mathbb{R}_+^4\right):\mathcal{W}_0(x)\ge\mathcal{V}_0(x)\right\},$$

这里 $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$。

为了研究系统(1)~(3)的共存解，考虑以下与系统(1)~(3)相对应的稳态系统

$$\begin{cases}d\mathcal{S}_{xx}-a\mathcal{U}\frac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2}=0, & 0<x<1,\\ d\mathcal{U}_{xx}+a\mathcal{U}\frac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2}-b\mathcal{W}\frac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}=0, & 0<x<1,\\ d\mathcal{V}_{xx}+b\mathcal{V}\frac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\frac{l}{l+\mathcal{W}}-(m+\alpha)\mathcal{V}=0, & 0<x<1,\\ d\mathcal{W}_{xx}+b\mathcal{V}\frac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\frac{l}{l+\mathcal{W}}-m\mathcal{W}=0, & 0<x<1,\end{cases} \tag{4}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\mathcal{S}_x(0)=-S^0,\mathcal{S}_x(1)+\gamma\mathcal{S}(1)=0,\\ \mathcal{U}_x(0)=\mathcal{U}_x(1)+\gamma\mathcal{U}(1)=0,\\ \mathcal{V}_x(0)=\mathcal{V}_x(1)+\gamma\mathcal{V}(1)=0,\\ \mathcal{W}_x(0)=\mathcal{W}_x(1)+\gamma\mathcal{W}(1)=0.\end{cases} \tag{5}$$

本文结构如下：在第 2 节中，给出一些初步的结论，引理 2.2 和引理 2.3 给出系统(4)~(5)平凡解和半平凡解的稳定性。在第 3 节中，以捕食者的死亡率 m 为分歧参数，研究了系统(4)~(5)分歧解的结构和稳定性，给出了定理 3.1~定理 3.3。

2. 预备知识

首先，考虑没有捕食者的单物种系统，则系统(4)~(5)可以简化为：

$$\begin{cases} d\mathcal{S}_{xx} - a\mathcal{U}\dfrac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2} = 0, & 0<x<1, \\ d\mathcal{U}_{xx} + a\mathcal{U}\dfrac{\mathcal{S}^2}{k_1+\mathcal{S}^2} = 0, & 0<x<1, \\ \mathcal{S}_x(0) = -S^0, \mathcal{S}_x(1)+\gamma\mathcal{S}(1)=0, \\ \mathcal{U}_x(0) = \mathcal{U}_x(1)+\gamma\mathcal{U}(1)=0. \end{cases} \tag{6}$$

根据文献[12]中引理 3.2 以及文献[13]中引理 2.1 和引理 2.2 可以得到如下结果。

引理 2.1 若 $a \le \lambda_0$，则 $(z(x),0)$ 是单物种系统(6)的唯一非负解，其中 $z(x)=S^0\left(\dfrac{1+\gamma}{\gamma}-x\right)$；若 $a>\lambda_0$，则系统(6)存在唯一正解，记为 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$，其中 λ_0 是 $\begin{cases} d\phi_{xx}+a\lambda\dfrac{z^2}{k_1+z^2}\phi=0, & 0<x<1 \\ \phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0 \end{cases}$ 的主特征值。

根据引理 2.1 知系统(4)~(5)的非负稳态解只有三种情况：(i) 平凡解 $E_0=(z(x),0,0,0)$；(ii) 半平凡解 $E_1=(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)$；(iii) 正解 $E_2=(\mathcal{S}_*,\mathcal{U}_*,\mathcal{V}_*,\mathcal{W}_*)$。

引理 2.2 若 $\hat{\mu}<0$，则 E_0 是局部稳定的；若 $\hat{\mu}>0$，则 E_0 是不稳定的，其中 $\hat{\mu}$ 是 $\begin{cases} \mu\varphi = d\varphi_{xx}+a\dfrac{z^2}{k_1+z^2}\varphi, & 0<x<1 \\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0 \end{cases}$ 的主特征值。

证明：考虑系统(4)在 $E_0=(z(x),0,0,0)$ 处的线性化特征值问题

$$\eta\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \hat{F}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $\hat{F}=\begin{pmatrix} d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} & -a\dfrac{z^2}{k_1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+a\dfrac{z^2}{k_1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(m+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-m \end{pmatrix}$。

且满足 $(\psi_i)_x(0)=(\psi_i)_x(1)+\gamma(\psi_i)(1)=0, i=1,2,3,4$。

易知(7)的特征值是由

$$\hat{F}_1=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \hat{F}_2=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{z^2}{k_1+z^2}, \hat{F}_3=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(m+\alpha), \hat{F}_4=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-m$$

算子的特征值组成。设 η_1，η_2，η_3，η_4 分别是 $\hat{F}_1$，$\hat{F}_2$，$\hat{F}_3$，$\hat{F}_4$ 的主特征值。由文献[14]命题 2.1 可得 $\eta_1<0$，从而 $\hat{F}_3$ 的主特征值 $\eta_3=\eta_1-(m+\alpha)<0$，$\hat{F}_4$ 的主特征值 $\eta_4=\eta_1-m<0$。显然 $\hat{F}_2$ 的主特征值 $\eta_2=\hat{\mu}$，所以当 $\hat{\mu}<0$ 时，E_0 是局部稳定的；当 $\hat{\mu}>0$ 时，E_0 是不稳定的。

引理 2.3 若 $\tilde{\mu} < m+\alpha$，则 E_1 是局部稳定的；若 $\tilde{\mu} > m+\alpha$，则 E_1 是不稳定的，其中 $\tilde{\mu}$ 是 $\begin{cases} \mu\varphi = d\varphi_{xx} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varphi, & 0<x<1 \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0 \end{cases}$ 的主特征值。

证明： 考虑系统(4)在 $E_1 = (\mathcal{S}_0, \mathcal{U}_0, 0, 0)$ 处的线性化特征值问题

$$\eta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \tilde{F} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $\tilde{F} = \begin{pmatrix} d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & -a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2} & 0 & 0 \\ a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2} & 0 & -b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} \\ 0 & 0 & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - (m+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m \end{pmatrix}$。

且满足 $(\psi_i)_x(0) = (\psi_i)_x(1) + \gamma(\psi_i)(1) = 0, i = 1,2,3,4$。

易知(8)的特征值是由算子 $\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & -a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2} \\ a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2} \end{pmatrix}$，
$\tilde{F}_2 = d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - (m+\alpha)$，$\tilde{F}_3 = d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m$ 的特征值组成。

首先考虑 $\tilde{F}_1$ 的特征值问题

$$\begin{cases} \eta\psi_1 = d(\psi_1)_{xx} - a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\psi_1 - a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi_2, & 0<x<1, \\ \eta\psi_2 = d(\psi_2)_{xx} + a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\psi_1 + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi_2, & 0<x<1, \\ (\psi_1)_x(0) = (\psi_1)_x(1) + \gamma(\psi_1)(1) = 0, \\ (\psi_2)_x(0) = (\psi_2)_x(1) + \gamma(\psi_2)(1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

把(9)的第一个和第二个方程相加得到

$$\begin{cases} d(\psi_1+\psi_2)_{xx} = \eta(\psi_1+\psi_2), & 0<x<1, \\ (\psi_1+\psi_2)_x(0) = (\psi_1+\psi_2)_x(1) + \gamma(\psi_1+\psi_2)(1) = 0. \end{cases}$$

此时有两种情况：(i) 若 $\psi_1+\psi_2 \equiv 0$，则 $\psi_2 = -\psi_1$，于是(9)可化简为

$$\begin{cases} d(\psi_2)_{xx} - a\mathcal{U}_0 \dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\psi_2 + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi_2 = \eta\psi_2, \quad 0<x<1, \\ (\psi_2)_x(0) = (\psi_2)_x(1) + \gamma(\psi_2)(1) = 0, \end{cases}$$

由于$\psi_2 \neq 0$，故η是$\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right)$的特征值。另一方面，由于$d(\mathcal{U}_0)_{xx} + a\mathcal{U}_0\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2} = 0$，所以$\eta_1\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right) = 0$。由特征值关于势函数的单调性知

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i\left(d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} + a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right) \\ &\le \eta_1\left(d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} + a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right) \\ &< \eta_1\left(d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

(ii) 若$\psi_1+\psi_2 \neq 0$，则η为$d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$的特征值，故均小于 0。

显然$\tilde{F}_3$的特征值为$\eta_i\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m\right) < 0$，故只需考虑$\tilde{F}_2$的特征值

$\eta_i(\tilde{F}_2) = \eta_i\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - (m+\alpha)\right)$。不妨设$\tilde{F}_2$的特征值为$\bar{\mu}$，则$\bar{\mu} = \tilde{\mu} - (m+\alpha)$，因此当$\tilde{\mu} < m+\alpha$时，$E_1$是局部稳定的；当$\tilde{\mu} > m+\alpha$时，$E_1$是不稳定的。

引理 2.4 设$(\mathcal{S}(x), \mathcal{U}(x), \mathcal{V}(x), \mathcal{W}(x))$是系统(4)~(5)的非负解，而且在区间[0, 1]上$\mathcal{U}(x) \not\equiv 0$，$\mathcal{V}(x) \not\equiv 0$，$\mathcal{W}(x) \not\equiv 0$，那么

(i) 在区间[0, 1]上，$0 < \mathcal{S}(x) < z(x)$，$0 < \mathcal{U}(x) < \mathcal{U}_0 < z(x)$，且$0 < \mathcal{V}(x) < \mathcal{W}(x) < z(x)$；

(ii) $0 < m < m_0$ （m_0为常数)。

证明：(i) 与文献[11]引理 2.6 的方法类似，下面只给出(ii)的证明。根据系统(4)~(5)有

$$\begin{cases} d\mathcal{V}_{xx} + b\mathcal{V}\dfrac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - \alpha\mathcal{V} = m\mathcal{V}, 0<x<1, \\ \mathcal{V}_x(0) = \mathcal{V}_x(1) + \gamma\mathcal{V}(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

记$\hat{\lambda}$为(10)的主特征值。引入$m_0 = \hat{\lambda}\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - \alpha\right)$，因此有

$m = \hat{\lambda}\left(d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - \alpha\right)$，故

$$m = \hat{\lambda}\left(d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathcal{U}^2}{k_2+\mathcal{U}^2}\frac{l}{l+\mathcal{W}} - \alpha\right) < \hat{\lambda}\left(d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - \alpha\right) = m_0。$$

3. 全局分歧

死亡率m作为分歧参数构造从半平凡分支$\{(m; \mathcal{S}_0, \mathcal{U}_0, 0, 0) : m \in (0, m_0)\}$产生的正解分支。

$$\text{定义}\quad \begin{aligned} &\mathbf{Y}_0=\left\{\psi\in\mathbf{W}^{2,p}(0,1):\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0\right\},\\ &\mathbf{Y}_1=\mathbf{Y}_0\times\mathbf{Y}_0\times\mathbf{Y}_0\times\mathbf{Y}_0,\\ &\mathbf{Y}_1^+=\left\{(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathbf{Y}_1:\mathcal{S}>0,\mathcal{U}>0,\mathcal{V}>0,\mathcal{W}>0,x\in[0,1]\right\},\\ &\mathbf{Y}_2=\mathbf{L}^p(0,1)\times\mathbf{L}^p(0,1)\times\mathbf{L}^p(0,1)\times\mathbf{L}^p(0,1). \end{aligned}\tag{11}$$

其中 $p>1$，则 $\mathbf{Y}_1$ 嵌入 $\left(C^1([0,1])\right)^4$，且 $\mathbf{Y}_1^+$ 是 $\mathbf{Y}_1$ 中的正锥。

考虑稳态系统(4)~(5)，令 $S=\mathcal{S}_0-\mathcal{S}$，$U=\mathcal{U}_0-\mathcal{U}$，$V=\mathcal{V}$，$W=\mathcal{W}$，那么

$$\begin{cases} -dS_{xx}=-a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S-a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U+F_0, & 0<x<1,\\ -dU_{xx}=a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U+b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}W+a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S+F_1, & 0<x<1,\\ -dV_{xx}=b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V-(m+\alpha)V+F_2, & 0<x<1,\\ -dW_{xx}=b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V-mW+F_3, & 0<x<1, \end{cases}\tag{12}$$

其中

$$F_0=a\left(\frac{(\mathcal{S}_0-S)^2}{k_1+(\mathcal{S}_0-S)^2}-\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\right)(\mathcal{U}_0-U)+a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S,$$

$$F_1=a\left(\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}-\frac{(\mathcal{S}_0-S)^2}{k_1+(\mathcal{S}_0-S)^2}\right)(\mathcal{U}_0-U)-a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S+bW\left(\frac{(\mathcal{U}_0-U)^2}{k_2+(\mathcal{U}_0-U)^2}-\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\right),$$

$$F_2=bV\left(\frac{(\mathcal{U}_0-U)^2}{k_2+(\mathcal{U}_0-U)^2}\frac{l}{l+W}-\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\right),$$

$$F_3=bV\left(\frac{(\mathcal{U}_0-U)^2}{k_2+(\mathcal{U}_0-U)^2}\frac{l}{l+W}-\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\right)$$

显然，$F=(F_0,F_1,F_2,F_3)$ 对 (S,U,V,W) 是连续可微的，$F(0,0,0,0)=0$，而且 F 的 Fréchet 导数 $D_{(S,U,V,W)}F\big|_{(0,0,0,0)}=0$。令 $\mathcal{G}=\left(-d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+M\right)$，其中 M 充分大，满足边界条件 $\mathbf{C}_B^1[0,1]=\left\{S\in\mathbf{C}^1[0,1]:S_x(0)=S_x(1)+\gamma S(1)=0\right\}$，那么(12)可以写成

$$S=\mathcal{G}\left(-a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S-a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U+MS\right)+\mathcal{G}F_0,$$

$$U=\mathcal{G}\left(a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U+b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}W+a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{\left(k_1+\mathcal{S}_0^2\right)^2}S+MU\right)+\mathcal{G}F_1,$$

$$V=\mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V-(m+\alpha)V+MV\right)+\mathcal{G}F_2,$$

$$W = \mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V - mW + MW\right) + \mathcal{G}F_3.$$

定义 $\mathcal{T}:\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1\to\mathbf{Y}_2$ 如下

$$\mathcal{T}(m;S,U,V,W)=\begin{pmatrix} \mathcal{G}\left(-a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}S - a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U + MS\right)+\mathcal{G}F_0 \\ \mathcal{G}\left(a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U + b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}W + a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}S + MU\right)+\mathcal{G}F_1 \\ \mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V - (m+\alpha)V + MV\right)+\mathcal{G}F_2 \\ \mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V - mW + MW\right)+\mathcal{G}F_3 \end{pmatrix},$$

则 $\mathcal{T}(m;S,U,V,W)$ 是 $\mathbf{Y}_2$ 上的可微紧算子。

令 $\mathcal{A}(m;S,U,V,W)=(m;S,U,V,W)-\mathcal{T}(m;S,U,V,W)$，那么 $\mathcal{A}:\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_2\to\mathbf{Y}_2$ 是 $\mathbf{C}^1$ 光滑的，并且 $\mathcal{A}(m;S,U,V,W)=0$ 的零点对应(4)~(5)的正解。令 $\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)=\mathbf{D}_{(S,U,V,W)}\mathcal{A}(m_*;0,0,0,0)$ 是 $\mathcal{A}(m_*;S,U,V,W)$ 在 $(0,0,0,0)$ 点对 (S,U,V,W) 的 Fréchet 导数。然后有

$$\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)(S,U,V,W)=\begin{pmatrix} S-\mathcal{G}\left(-a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}S - a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U + MS\right) \\ U-\mathcal{G}\left(a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}U + b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}W + a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}S + MU\right) \\ V-\mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V - (m+\alpha)V + MV\right) \\ W-\mathcal{G}\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}V - mW + MW\right) \end{pmatrix},$$

显然，$\mathbf{D}_{(S,U,V,W)}\mathcal{A}(m_*;0,0,0,0)$ 是 Fredholm 算子，并根据 $\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)(\phi,\psi,\varphi,\varrho)=0$，其中 $(\phi,\psi,\varphi,\varrho)\neq(0,0,0,0)$ 可以得到

$$\begin{cases} d\phi_{xx} - a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\phi - a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi = 0, & 0<x<1, \\ d\psi_{xx} - a\mathcal{U}_0\frac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\phi - a\frac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi - b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varrho = 0, & 0<x<1, \\ d\varphi_{xx} + b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varphi - (m_*+\alpha)\varphi = 0, & 0<x<1, \\ d\varrho_{xx} + b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varphi - m_*\varrho = 0, & 0<x<1, \\ \phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0, \psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0, \\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0, \varrho_x(0)=\varrho_x(1)+\gamma\varrho(1)=0. \end{cases} \tag{13}$$

如果 $\varphi \equiv \varrho \equiv 0$，则 (ϕ,ψ) 满足 $\mathbf{B}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，对应的边界为 $\phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0$，$\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0$，其中 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & -a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\\ -a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\end{pmatrix}$。

根据文献[15]中的引理 2.3 类似的方法，可得 $\mathbf{B}$ 在边界条件 $\phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0$，$\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0$ 下是可逆的。因此，$(\phi,\psi)=(0,0)$，矛盾。进而可得 $\varphi\neq 0$ 或 $\varrho\neq 0$。又通过(13)的第四个方程容易得到，当且仅当 $\varphi=0$ 时，$\varrho=0$。因此 $\varphi\neq 0$ 且 $\varrho\neq 0$。根据强极值原理可得，对于 $x\in[0,1]$ 有 $\varphi>0,\varrho>0$。由引理 1.3 有 $\tilde{\mu}=m_*+\alpha$。因此取 $(\varphi,\varrho)=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)$，其中 $\hat{\varphi}_1>0$ 为区间 $[0,1]$ 上的主特征函数

$$\begin{cases} d\hat{\varphi}_{xx}+b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\hat{\varphi}-(m_*+\alpha)\hat{\varphi}=0, & 0<x<1,\\ \hat{\varphi}_x(0)=\hat{\varphi}_x(1)+\gamma\hat{\varphi}(1)=0, \end{cases}$$

并且 $\hat{\varrho}_1=\left(-d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+m_*\right)^{-1}\left(b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\hat{\varphi}_1\right)>0, x\in[0,1]$。

已知 $\mathbf{B}$ 是可逆的，则可推断 $N\left(\tilde{A}(m_*;0,0,0,0)\right)=\mathrm{Span}\{(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)\}$，其中 (ϕ_1,ψ_1) 是 $\mathbf{B}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\hat{\varrho}_1\end{pmatrix}$ 的唯一解，其对应的边界为 $(\phi_1)_x(0)=(\phi_1)_x(1)+\gamma(\phi_1)(1)=0$，$(\psi_1)_x(0)=(\psi_1)_x(1)+\gamma(\psi_1)(1)=0$。下面证明 $\tilde{A}(m_*;0,0,0,0)$ 的值域。为此，假设 $(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathbf{R}\left(\tilde{A}(m_*;0,0,0,0)\right)$，那么存在 $(\phi,\psi,\varphi,\varrho)\in\mathbf{Y}_1$ 使得

$$\begin{cases} d\phi_{xx}-a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\phi-a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi=d\mathcal{S}_{xx}-M\mathcal{S}, & 0<x<1,\\ d\psi_{xx}-a\mathcal{U}_0\dfrac{2k_1\mathcal{S}_0}{(k_1+\mathcal{S}_0^2)^2}\phi-a\dfrac{\mathcal{S}_0^2}{k_1+\mathcal{S}_0^2}\psi-b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varrho=d\mathcal{U}_{xx}-M\mathcal{U}, & 0<x<1,\\ d\varphi_{xx}+b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varphi-(m_*+\alpha)\varphi=d\mathcal{V}_{xx}-M\mathcal{V}, & 0<x<1,\\ d\varrho_{xx}+b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\varphi-m_*\varrho=d\mathcal{W}_{xx}-M\mathcal{W}, & 0<x<1,\\ \phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0,\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0,\\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0,\varrho_x(0)=\varrho_x(1)+\gamma\varrho(1)=0. \end{cases} \tag{14}$$

已知 $\hat{\varphi}_1$ 满足

$$\begin{cases} d(\hat{\varphi}_1)_{xx}+b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\hat{\varphi}_1-(m_*+\alpha)\hat{\varphi}_1=0, 0<x<1,\\ (\hat{\varphi}_1)_x(0)=(\hat{\varphi}_1)_x(1)+\gamma\hat{\varphi}_1(0)=0, \end{cases} \tag{15}$$

让(14)的第三个方程乘以 $\hat{\varphi}_1$，(15)的第一个方程乘以 φ，在区间(0,1)上积分可得

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_1 \left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - m_* - \alpha + M \right) \mathcal{V}\mathrm{d}x = 0.$$

因此，$\mathbf{R}\left(\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)\right) = \left\{ (\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}) \in \mathbf{Y}_2 : \int_0^1 \hat{\varphi}_1 \left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - m_* - \alpha + M \right) \mathcal{V}\mathrm{d}x = 0 \right\}$,

并且 $\mathrm{codim}\mathbf{R}\left(\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)\right) = 1$。因此 $\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)$ 是指数为零的 Fredholm 算子，而且通过直接的计算有

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)^\top &= \mathbf{D}^2_{m(S,U,V,W)}\mathcal{A}(m_*;0,0,0,0)(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)^\top \\ &= (0,0,\mathcal{G}\hat{\varphi}_1,\mathcal{G}\hat{\varrho}_1) \notin \mathbf{R}\left(\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)\right),\end{aligned}$$

因此证得了横截面条件。

设 $\mathbf{Z} = \mathbf{R}\left(\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)\right) = \left\{ (\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}) \in \mathbf{Y}_2 : \int_0^1 \hat{\varphi}_1 \left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - m_* - \alpha + M \right) \mathcal{V}\mathrm{d}x = 0 \right\}$,

容易得到 $\mathbf{Z} \oplus \mathrm{Span}\left\{ (\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1) \right\} = \mathbf{Y}_1$，通过应用参考文献[16]简单特征值的分歧定理，得到存在 $\delta > 0$ 和 $\mathbf{C}^1$ 曲线 $(m(s);\iota(s),\kappa(s),\pi(s),\varpi(s)) : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}\times\mathbf{Z}$，使得：(i) $m(0) = m_*$，(ii) $\iota(0) = 0$，$\kappa(0) = 0$，$\pi(s) = 0$，$\varpi(s) = 0$，(iii) $(m(s);S(s),U(s),V(s),W(s)) = (m(s);s(\phi_1+\iota(s)),s(\psi_1+\kappa(s)),s(\hat{\varphi}_1+\pi(s)),s(\hat{\varrho}_1+\varpi(s)))$，满足 $\mathcal{A}(m(s);S(s),U(s),V(s),W(s)) = 0$，其中 $|s| < \delta$。

令 $\mathcal{S}(s) = \mathcal{S}_0 - S(s) = \mathcal{S}_0 - s(\phi_1+\iota(s))$，$\mathcal{U}(s) = \mathcal{U}_0 - U(s) = \mathcal{U}_0 - s(\psi_1+\kappa(s))$，$\mathcal{V}(s) = V(s) = s(\hat{\varphi}_1+\pi(s))$，$\mathcal{W}(s) = W(s) = s(\hat{\varrho}_1+\varpi(s))$，那么分支 $\Gamma = \left\{ (m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V},\mathcal{W}(s)) : 0 < s < \delta \right\}$ 是系统(4)~(5)的正解。系统(4)~(5)在 $(m_*;\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)$ 附近的非平凡非负解，要么在半平凡解分支 $\left\{ (m;\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0) : m \in (0,m_0) \right\}$ 上，要么在分支 Γ 上。因此有

定理 3.1 假设 $0 < m < m_0$，那么 $(m_*;\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)$ 是系统(4)~(5)的一个分歧点。令

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}\left(\tilde{\mathcal{A}}(m_*;0,0,0,0)\right) = \left\{ (\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}) \in \mathbf{Y}_2 : \int_0^1 \hat{\varphi}_1 \left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - m_* - \alpha + M \right) \mathcal{V}\mathrm{d}x = 0 \right\},$$

则 $\mathbf{Z} \oplus \mathrm{Span}\left\{ (\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1) \right\} = \mathbf{Y}_1$，而且存在 $\delta > 0$ 和 $\mathbf{C}^1$ 曲线 $(m(s);\iota(s),\kappa(s),\pi(s),\varpi(s)) : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}\times\mathbf{Z}$，使得：$m(0) = m_*$，$\iota(0) = 0$，$\kappa(0) = 0$，$\pi(s) = 0$，$\varpi(s) = 0$，$(m(s);\iota(s),\kappa(s),\pi(s),\varpi(s)) \in \mathbf{Z}$，并且分支 $\Gamma = \left\{ (m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V},\mathcal{W}(s)) : 0 < s < \delta \right\}$ 是系统(4)~(5)的正解，其中

$$\mathcal{S}(s) = \mathcal{S}_0 - s(\phi_1+\iota(s)), \mathcal{U}(s) = \mathcal{U}_0 - s(\psi_1+\kappa(s)), \mathcal{V}(s) = s(\hat{\varphi}_1+\pi(s)), \mathcal{W}(s) = s(\hat{\varrho}_1+\varpi(s)).$$

下面研究位于局部分歧分支 Γ 上正解的线性化稳定性。将系统(4)~(5)的正分歧解

$$\mathcal{S}(s) = \mathcal{S}_0 - s(\phi_1+\iota(s)), \mathcal{U}(s) = \mathcal{U}_0 - s(\psi_1+\kappa(s)), \mathcal{V}(s) = s(\hat{\varphi}_1+\pi(s)), \mathcal{W}(s) = s(\hat{\varrho}_1+\varpi(s)),$$

代入到(4)的第三个方程，并求 $s = 0$ 处的导数可得

$$d\dot{\pi}_{xx}(0) + b\dot{\pi}(0)\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - b\hat{\varphi}_1\frac{2k_2\mathcal{U}_0}{\left(k_2+\mathcal{U}_0^2\right)^2}\psi_1 - b\hat{\varphi}_1\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\frac{\hat{\varrho}_1}{l} - \dot{m}(0)\hat{\varphi}_1 - (m_*+\alpha)\dot{\pi}(0) = 0, \quad (16)$$

其中 $\dot{\pi}(0)$，$\dot{m}(0)$ 是 $\pi(s)$，$m(s)$ 在 $s = 0$ 处的导数，注意到

$$\begin{cases} d\left(\hat{\varphi}_1\right)_{xx} + b\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\hat{\varphi}_1 - \left(m_* + \alpha\right)\hat{\varphi}_1 = 0, 0 < x < 1, \\ \left(\hat{\varphi}_1\right)_x(0) = \left(\hat{\varphi}_1\right)_x(1) + \gamma\hat{\varphi}_1(0) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

把(16)两边乘以 $\hat{\varphi}_1$，(17)的第一个方程两边乘以 $\dot{\pi}(0)$，并分别在[0, 1]上积分可得

$$\dot{m}(0)\int_0^1 \left(\hat{\varphi}_1\right)^2 \mathrm{d}x = -\int_0^1 b\left(\frac{2k_2\mathcal{U}_0}{\left(k_2+\mathcal{U}_0^2\right)^2}\psi_1 + \frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\frac{\hat{\varrho}_1}{l}\right)\left(\hat{\varphi}_1\right)^2 \mathrm{d}x,$$

由于 $\dfrac{2k_2\mathcal{U}_0}{\left(k_2+\mathcal{U}_0^2\right)^2}\psi_1 + \dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}\dfrac{\hat{\varrho}_1}{l} > 0$，所以 $\dot{m}(0) < 0$，即存在 $\delta > 0$ 充分小，使得当 $0 < s < \delta$ 时，$\dot{m}(0) < 0$，于是正解分支 Γ 是向左的。

记 $\mathcal{L}\left(m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V}(s),\mathcal{W}(s)\right)$ 是系统(4)~(5)在 $\left(m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V},\mathcal{W}(s)\right)$ 处的线性化算子。根据[17]中的推论 1.13 可知，存在 $\mathbf{C}^1$ 的函数 $m \mapsto \left(\mathfrak{o}(s),\mathfrak{p}(s)\right) \in \mathbb{R}\times\mathbf{Y}_1$ 和 $s \mapsto \left(\mathfrak{h}(s),\mathfrak{n}(s)\right) \in \mathbb{R}\times\mathbf{Y}_1$ 分别定义在 m_* 和 0 的领域上，使得

$$\left(\mathfrak{o}(m_*),\mathfrak{p}(m_*)\right) = \left(0,\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right) = \left(\mathfrak{h}(0),\mathfrak{n}(0)\right),$$

且在这些领域上有

$$\mathcal{L}\left(m;\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0\right)\mathfrak{p}(m) = \mathfrak{o}(m)\mathfrak{p}(m), \left|m - m_*\right| \ll 1,$$

$$\mathcal{L}\left(m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V}(s),\mathcal{W}(s)\right)\mathfrak{n}(s) = \mathfrak{h}(s)\mathfrak{n}(s), 0 < s \ll 1.$$

根据[17]中的推论 1.16 可以得到 $\lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{s\dot{m}(s)\dot{\mathfrak{o}}(m_*)}{\mathfrak{h}(s)} = -1$，这里 $\dot{m}(s)$ 是 $m(s)$ 关于 s 的导数，$\dot{\mathfrak{o}}(m_*)$ 是 $\mathfrak{o}(m)$ 在 $m = m_*$ 处对 m 的导数，同时 $\mathfrak{o}(m)$ 是下面问题的简单特征值

$$\begin{cases} d\varphi_{xx} + b\varphi\dfrac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2} - (m+\alpha)\varphi = \mathfrak{o}(m)\varphi, 0 < x < 1, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0. \end{cases}$$

注意 $\mathfrak{o}(m) = \tilde{\mu} - m - \alpha$，根据文献[11]得 $\dot{\mathfrak{o}}(m_*) < 0$。根据前面分析有 $\dot{m}(0) < 0$，可得对于 $0 < s < \delta$ 有 $\mathfrak{h}(s) < 0$。所以系统(4)~(5)分歧分支 Γ 上的正解是局部渐近稳定的。因此有以下定理：

定理 3.2 系统(4)~(5)的正解分支 $\Gamma = \left\{\left(m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V}(s),\mathcal{W}(s)\right): 0 < s < \delta\right\}$ 是向左的，并且是渐近稳定的。

接下来通过应用 Fredholm 算子的全局分歧结果(见文献[16] [18])把局部分支 Γ 延伸到全局。显然，映射 $\mathbf{Y}_1$ 嵌入 $\mathbf{Y}_2$ 是紧的，$\mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{Y}_2$ 是 C^1 光滑的。根据文献[16]中的定理 3.3 可知，对于 $\forall\left(m;S,U,V,W\right) \in \mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1$，Fréchet 导数 $\mathbf{D}_{(S,U,V,W)}\mathcal{A}\left(m;S,U,V,W\right)$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，因此根据文献[16]中的定理 4.3 可以得到集合

$$\left\{\left(m;S,U,V,W\right) \in \mathbb{R}\times\mathbf{Y}_1 : \mathcal{A}\left(m;S,U,V,W\right) = 0, \left(S,U,V,W\right) \neq (0,0,0,0)\right\}$$

中的连通元 $\mathfrak{N}$ 发自点 $\left(m_*;0,0,0,0\right)$ 附近的 $\left\{\left(m;0,0,0,0\right): m \in \left(0,m_0\right)\right\}$。进而要么 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1$ 中非紧，要么包含点 $\left(\bar{m};0,0,0,0\right)$，其中 $\bar{m} \neq m_*$。

设 $\mathfrak{N}' = \left\{\left(m;\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\right): \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 - S, \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 - U, \mathcal{V} = V, \mathcal{W} = W, \left(m;\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\right) \in \mathfrak{N}\right\}$，那么 $\Gamma \subset \mathfrak{N}'$，也有 $\mathfrak{N}'\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+\right) \neq \varnothing$。令 $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}'\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+\right)$，$\mathfrak{N}^*$ 由分歧点 $\left(m_*;\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0\right)$ 附近的局部正解分支 Γ 组成。

令 $\mathfrak{N}^+$ 为 $\mathfrak{N}'\setminus\{(m(s);\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V}(s),\mathcal{W}(s)):-\delta<s<0\}$ 的连通元，则 $\mathfrak{N}^*\subset\mathfrak{N}^+$。根据文献[16]中定理 4.4 可知 $\mathfrak{N}^+$ 满足下列选择中的一条：(i) 它包含点 $(\bar{m};\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)$，其中 $\bar{m}\neq m_*$；(ii) 它不是紧的；(iii) 它包含点 $(m;\mathcal{S}_0+\mathcal{S},\mathcal{U}_0+\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})$，其中 $(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\neq 0,(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathbf{Z}$。

假设(iii)成立，对于 $\forall(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathfrak{N}^*$，可知在区间[0, 1]上有 $\mathcal{V}>0$，则 $\int_0^1\hat{\varphi}_1\left(b\frac{\mathcal{U}_0^2}{k_2+\mathcal{U}_0^2}-m_*-\alpha+M\right)\mathcal{V}\mathrm{d}x>0$，这与 $(\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathbf{Z}$ 矛盾，因此(iii)是不可能的。

假设(i)成立，则存在一组序列点 $\{(m_n;\mathcal{S}_n,\mathcal{U}_n,\mathcal{V}_n,\mathcal{W}_n)\}\subset\mathfrak{N}^+\cap(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+)$，其中在区间 $[0,1]$ 上有 $\mathcal{S}_n>0,\mathcal{U}_n>0,\mathcal{V}_n>0,\mathcal{W}_n>0$，且这组序列点列随着 $n\to\infty$ 收敛于 $(\bar{m},\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)$。根据 $\mathcal{V}_n$ 的方程可知

$$\begin{cases}d(\mathcal{V}_n)_{xx}+b\mathcal{V}_n\dfrac{(\mathcal{U}_n)^2}{k_2+(\mathcal{U}_n)^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}_n}-(m_n+\alpha)\mathcal{V}_n=0, & 0<x<1,\\(\mathcal{V}_n)_x(0)=(\mathcal{V}_n)_x(1)+\gamma(\mathcal{V}_n)(1)=0,\end{cases}$$

取极限 $n\to\infty$，可以得到 $\bar{m}$ 满足

$$\begin{cases}d\mathcal{V}_{xx}+b\mathcal{V}\dfrac{(\mathcal{U}_0)^2}{k_2+(\mathcal{U}_0)^2}-(\bar{m}+\alpha)\mathcal{V}=0, & 0<x<1,\\\mathcal{V}_x(0)=\mathcal{V}_x(1)+\gamma\mathcal{V}(1)=0,\end{cases}$$

因此可得 $\bar{m}=m_*$，矛盾。

接下来证明 $\mathfrak{N}^+-\{(m_*,\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)\}\subset\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+$。假设不然，则存在

$$(\tilde{m};\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}},\tilde{\mathcal{W}})\in\mathfrak{N}^+-\{(m_*,\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0)\}\subset\partial(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+)$$

是序列点 $\{(m_k;\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k)\}\subset\mathfrak{N}^+\cap(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+)$ 的极限，其中在区间[0, 1]上有 $\mathcal{S}_k>0,\mathcal{U}_k>0,\mathcal{V}_k>0,\mathcal{W}_k>0$。根据 $(\tilde{m};\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}},\tilde{\mathcal{W}})\in\partial(\mathbb{R}_+\times\mathbf{Y}_1^+)$ 可知，下面一种情况成立：(a) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{S}}\geq 0$，且对于某个点 $x_0\in[0,1]$ 有 $\tilde{\mathcal{S}}(x_0)=0$；(b) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{U}}\geq 0$，且对于某个点 $x_0\in[0,1]$ 有 $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)=0$；(c) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{V}}\geq 0$，且对于某个点 $x_0\in[0,1]$ 有 $\tilde{\mathcal{V}}(x_0)=0$；(d) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{W}}\geq 0$，且对于某个点 $x_0\in[0,1]$ 有 $\tilde{\mathcal{W}}(x_0)=0$；(e) $\tilde{d}=0$。

根据强极值原理，在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{S}}>0$，因此(a)不成立。如果在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{U}}=0$，则根据 $\tilde{\mathcal{V}}$ 和 $\tilde{\mathcal{W}}$ 的方程得出，在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{V}}=\tilde{\mathcal{W}}\equiv 0$。根据在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{W}}(x)\geq\tilde{\mathcal{V}}(x)$，进一步得到在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{W}}(x)\equiv 0$ 当且仅当 $\tilde{\mathcal{V}}(x)\equiv 0$，因此根据强极值原理，(b)，(c)和(d)意味着只有以下两种情况会发生：(i) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{U}}\equiv 0$，$\tilde{\mathcal{V}}\equiv 0$；(ii) 在区间[0, 1]上，$\tilde{\mathcal{U}}>0$，$\tilde{\mathcal{V}}\equiv 0$。

假设在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{U}}\equiv 0$，$\tilde{\mathcal{V}}\equiv 0$，那么在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{S}}=z$，$\tilde{\mathcal{W}}\equiv 0$，且在 $\mathbf{Y}_1$ 中取极限 $k\to\infty$ 有 $(m_k;\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k)\to(\tilde{m};z,0,0,0)$。又根据 $\mathcal{V}_k$ 的方程，取极限 $k\to\infty$ 有

$$\begin{cases}d\mathcal{V}_{xx}-(\tilde{m}+\alpha)\mathcal{V}=0, & 0<x<1,\\\mathcal{V}_x(0)=\mathcal{V}_x(1)+\gamma\mathcal{V}(1)=0,\end{cases}$$

进而可以得到 $\tilde{m}+\alpha<0$，矛盾。

假设在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{U}}>0$，$\tilde{\mathcal{V}}\equiv 0$，那么容易得到在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal{W}}\equiv 0$ 且 $(\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}})$ 满足

$$\begin{cases} d\tilde{\mathcal{S}}_{xx} - a\tilde{\mathcal{U}}\dfrac{\tilde{\mathcal{S}}^2}{k_1+\tilde{\mathcal{S}}^2} = 0, & 0<x<1, \\ d\tilde{\mathcal{U}}_{xx} + a\tilde{\mathcal{U}}\dfrac{\tilde{\mathcal{S}}^2}{k_1+\tilde{\mathcal{S}}^2} = 0, & 0<x<1, \\ \tilde{\mathcal{S}}_x(0) = -S^0, \tilde{\mathcal{S}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{S}}(1) = 0, \\ \tilde{\mathcal{U}}_x(0) = \tilde{\mathcal{U}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{U}}(1) = 0, \end{cases}$$

因此，$\left(\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}}\right)=\left(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0\right)$，也就是在 $\mathbf{Y}_1$ 中取极限 $k\to\infty$ 有 $\left(m_k;\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k\right)\to\left(\tilde{m};\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,0,0\right)$。根据 $\mathcal{V}_k$ 的方程，取极限 $k\to\infty$ 可推导出 $\tilde{m}=m_*$，矛盾。

假设 $\tilde{m}=0$，即存在 $m_k\to 0$ 和系统(4)~(5)的正解 $\left(\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k\right)$，其中 $m=m_k$，使得在 $\mathbf{Y}_1$ 中取极限 $k\to\infty$ 有 $\left(m_k;\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k\right)\to\left(0;\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}},\tilde{\mathcal{W}}\right)$，这里 $\left(m_k;\mathcal{S}_k,\mathcal{U}_k,\mathcal{V}_k,\mathcal{W}_k\right)$ 满足

$$\begin{cases} d\left(\mathcal{S}_k\right)_{xx} - a\mathcal{U}_k\dfrac{\left(\mathcal{S}_k\right)^2}{k_1+\left(\mathcal{S}_k\right)^2} = 0, & 0<x<1, \\ d\left(\mathcal{U}_k\right)_{xx} + a\mathcal{U}_k\dfrac{\left(\mathcal{S}_k\right)^2}{k_1+\left(\mathcal{S}_k\right)^2} - b\mathcal{W}_k\dfrac{\left(\mathcal{U}_k\right)^2}{k_2+\left(\mathcal{U}_k\right)^2} = 0, & 0<x<1, \\ d\left(\mathcal{V}_k\right)_{xx} + b\mathcal{V}_k\dfrac{\left(\mathcal{U}_k\right)^2}{k_2+\left(\mathcal{U}_k\right)^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}_k} - \left(m_k+\alpha\right)\mathcal{V}_k = 0, & 0<x<1, \\ d\left(\mathcal{W}_k\right)_{xx} + b\mathcal{V}_k\dfrac{\left(\mathcal{U}_k\right)^2}{k_2+\left(\mathcal{U}_k\right)^2}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}_k} - m_k\mathcal{W}_k = 0, & 0<x<1, \\ \left(\mathcal{S}_k\right)_x(0) = -S^0, \left(\mathcal{S}_k\right)_x(1)+\gamma\left(\mathcal{S}_k\right)(1) = 0, \left(\mathcal{U}_k\right)_x(0) = \left(\mathcal{U}_k\right)_x(1)+\gamma\left(\mathcal{U}_k\right)(1) = 0, \\ \left(\mathcal{V}_k\right)_x(0) = \left(\mathcal{V}_k\right)_x(1)+\gamma\left(\mathcal{V}_k\right)(1) = 0, \left(\mathcal{W}_k\right)_x(0) = \left(\mathcal{W}_k\right)_x(1)+\gamma\left(\mathcal{W}_k\right)(1) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

因为 $\dfrac{\left(\mathcal{S}_k\right)^2}{k_1+\left(\mathcal{S}_k\right)^2}$，$\dfrac{\left(\mathcal{U}_k\right)^2}{k_2+\left(\mathcal{U}_k\right)^2}$，$\mathcal{S}_k$，$\mathcal{U}_k$，$\mathcal{V}_k$，$\mathcal{W}_k$ 是一致有界的，所以有 $\left(\mathcal{S}_k\right)_{xx}$，$\left(\mathcal{U}_k\right)_{xx}$，$\left(\mathcal{V}_k\right)_{xx}$，$\left(\mathcal{W}_k\right)_{xx}$ 是一致有界的。因此取极限 $k\to\infty$ 可以得到 $\left(\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}},\tilde{\mathcal{W}}\right)$ 满足

$$\begin{cases} d\tilde{\mathcal{S}}_{xx} - a\tilde{\mathcal{U}}\dfrac{\tilde{\mathcal{S}}^2}{k_1+\tilde{\mathcal{S}}^2} = 0, & 0<x<1 \\ d\tilde{\mathcal{U}}_{xx} + a\tilde{\mathcal{U}}\dfrac{\tilde{\mathcal{S}}^2}{k_1+\tilde{\mathcal{S}}^2} - b\tilde{\mathcal{W}}\dfrac{\tilde{\mathcal{U}}^2}{k_2+\tilde{\mathcal{U}}^2} = 0, & 0<x<1 \\ d\tilde{\mathcal{V}}_{xx} + b\tilde{\mathcal{V}}\dfrac{\tilde{\mathcal{U}}^2}{k_2+\tilde{\mathcal{U}}^2}\dfrac{l}{l+\tilde{\mathcal{W}}} - \alpha\tilde{\mathcal{V}} = 0, & 0<x<1 \\ d\widetilde{\mathcal{W}}_{xx} + b\tilde{\mathcal{V}}\dfrac{\tilde{\mathcal{U}}^2}{k_2+\tilde{\mathcal{U}}^2}\dfrac{l}{l+\tilde{\mathcal{W}}} = 0, & 0<x<1 \\ \tilde{\mathcal{S}}_x(0) = -S^0, \tilde{\mathcal{S}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{S}}(1) = 0, \tilde{\mathcal{U}}_x(0) = \tilde{\mathcal{U}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{U}}(1) = 0, \\ \tilde{\mathcal{V}}_x(0) = \tilde{\mathcal{V}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{V}}(1) = 0, \tilde{\mathcal{W}}_x(0) = \tilde{\mathcal{W}}_x(1)+\gamma\tilde{\mathcal{W}}(1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

根据文献[11]可以证得系统(1)~(3)的一致持久性，因此(19)至少有一个正解，进而可以得出(19)解的估计与 m 无关。所以全局分支 Γ 与分支 $\hat{\Gamma}=\left\{\left(0,\mathcal{S},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\right):\mathcal{S}>0,\mathcal{U}>0,\mathcal{V}>0,\mathcal{W}>0\right\}$ 在某点 $\left(0,\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}},\tilde{\mathcal{W}}\right)$ 处相遇。因此有以下定理：

定理 3.3 假设 $0<m<m_0$，那么系统(4)~(5)的正解分支 $\Gamma=\left\{\left(m(s),\mathcal{S}(s),\mathcal{U}(s),\mathcal{V}(s),\mathcal{W}(s)\right):0<s<\delta\right\}$

能够在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y}_1^+$ 中沿 $m \to 0^+$ 延拓至无穷。

总而言之，$(m_*; \mathcal{S}_0, \mathcal{U}_0, 0, 0)$ 是稳态系统(4)~(5)的一个分歧点，它是捕食者是否能够长期存活，并与食饵稳定共存的生死阈值。当死亡率穿过 m_* 时，系统存在正解分支 Γ，这意味着出现了营养液，食饵，捕食者共存的稳定生态平衡。具体来说，当捕食者死亡小于 m_* 时，三者稳定共存态存在，否则当死亡率大于 m_* 时，共存态消失。而且只要死亡率小于 m_*，三者的稳定共存态都会持续存在，不会因为死亡率降低而突然消失。

基金项目

国家自然科学基金(No. 12201067)，长安大学中央高校基本科研业务费专项(Nos. 300102124201，300102124205)资金资助。

参考文献

[1] Dellal, M. and Bar, B. (2021) Global Analysis of a Model of Competition in the Chemostat with Internal Inhibitor. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **26**, 1129-1148. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2020156

[2] Butler, G.J., Hsu, S.B. and Waltman, P. (1983) Coexistence of Competing Predators in a Chemostat. *Journal of Mathematical Biology*, **17**, 133-151. https://doi.org/10.1007/bf00305755

[3] Hsu, S.B., Li, Y. and Waltman, P. (2000) Competition in the Presence of a Lethal External Inhibitor. *Mathematical Biosciences*, **167**, 177-199. https://doi.org/10.1016/s0025-5564(00)00030-4

[4] Butler, G.J., Hsu, S.B. and Waltman, P. (1985) A Mathematical Model of the Chemostat with Periodic Washout Rate. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **45**, 435-449. https://doi.org/10.1137/0145025

[5] Bush, A.W. and Cool, A.E. (1976) The Effect of Time Delay and Growth Rate Inhibition in the Bacterial Treatment of Wastewater. *Journal of Theoretical Biology*, **63**, 385-395. https://doi.org/10.1016/0022-5193(76)90041-2

[6] NIE, H. and WU, J. (2014) Multiple Coexistence Solutions to the Unstirred Chemostat Model with Plasmid and Toxin. *European Journal of Applied Mathematics*, **25**, 481-510. https://doi.org/10.1017/s0956792514000096

[7] Nie, H., Hsu, S. and Wu, J. (2017) A Competition Model with Dynamically Allocated Toxin Production in the Unstirred Chemostat. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **16**, 1373-1404. https://doi.org/10.3934/cpaa.2017066

[8] So, J.W.-. and Waltman, P. (1989) A Nonlinear Boundary Value Problem Arising from Competition in the Chemostat. *Applied Mathematics and Computation*, **32**, 169-183. https://doi.org/10.1016/0096-3003(89)90092-1

[9] Shi, J., Wu, Y. and Zou, X. (2020) Coexistence of Competing Species for Intermediate Dispersal Rates in a Reaction-Diffusion Chemostat Model. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1085-1112. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09763-0

[10] Li, H., Wu, J., Li, Y. and Liu, C. (2018) Positive Solutions to the Unstirred Chemostat Model with Crowley-Martin Functional Response. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **23**, 2951-2966. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017128

[11] Nie, H., Shi, Y. and Wu, J. (2022) The Effect of Diffusion on the Dynamics of a Predator-Prey Chemostat Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **82**, 821-848. https://doi.org/10.1137/21m1432090

[12] Wu, J.H. (2000) Global Bifurcation of Coexistence State for the Competition Model in the Chemostat. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **39**, 817-835. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(98)00250-8

[13] Nie, H. and Wu, J. (2006) A System of Reaction-Diffusion Equations in the Unstirred Chemostat with an Inhibitor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **16**, 989-1009. https://doi.org/10.1142/s0218127406015246

[14] Jones, D.A., Smith, H.L., Dung, L. and Ballyk, M. (1998) Effects of Random Motility on Microbial Growth and Competition in a Flow Reactor. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **59**, 573-596. https://doi.org/10.1137/s0036139997325345

[15] Jiang, D., Nie, H. and Wu, J. (2017) Crowding Effects on Coexistence Solutions in the Unstirred Chemostat. *Applicable Analysis*, **96**, 1016-1046. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1171319

[16] Shi, J. and Wang, X. (2009) On Global Bifurcation for Quasilinear Elliptic Systems on Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **246**, 2788-2812. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.09.009

[17] Crandall, M.G. and Rabinowitz, P.H. (1973) Bifurcation, Perturbation of Simple Eigenvalues, Itand Linearized Stability. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52**, 161-180. https://doi.org/10.1007/bf00282325

[18] Pang, D., Nie, H. and Wu, J. (2019) Single Phytoplankton Species Growth with Light and Crowding Effect in a Water Column. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **39**, 41-74. https://doi.org/10.3934/dcds.2019003