

# 基于碰撞振动系统的液体晃动非线性动力学分析

贾霜蓝, 闫玉龙\*

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月22日

## 摘要

液体晃动广泛存在于大型充液航天器、带储罐的重型车辆和船舶等运载工具中, 随着航天事业的快速发展, 现代航天器通常需要携带大量的液体燃料, 而液体晃动会影响航天器的姿态稳定性和控制精度, 因此研究充液储罐在不同激励下的动力学行为对实现航天器的稳定控制至关重要。在航天器的姿态变化过程中, 由于惯性力和重力的作用, 会导致液体燃料发生剧烈晃动, 并伴随着对罐壁的碰撞作用。因此本文依据经典的双侧约束碰撞振动系统建立液体晃动等效力学模型, 利用庞加莱映射理论对外激励幅值和频率进行研究, 研究表明在不同的参数影响下, 系统出现丰富的动力学行为。随着参数的变化, 系统呈现出周期运动和混沌运动的交替出现, 在一定参数条件下, 系统还表现出擦边分岔、倍周期分岔等非线性现象。该研究为后续航天器液体晃动的非线性动力学分析提供了基础。

## 关键词

液体晃动, 碰撞振动, 庞加莱映射, 混沌

# Nonlinear Dynamic Analysis of Liquid Sloshing Based on an Impact Vibration System

Shuanglan Jia, Yulong Yan\*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 22, 2026

\*通讯作者。

## Abstract

Liquid sloshing is widely present in vehicles such as large liquid-filled spacecraft, heavy vehicles with tanks, and ships. With the rapid advancement of the aerospace industry, modern spacecraft often needs to carry a large amount of liquid fuel, and liquid sloshing can affect the attitude stability and control precision of the spacecraft. Therefore, studying the dynamic behavior of liquid-filled tanks under different excitations is crucial for achieving stable control of spacecraft. During the attitude adjustment process of a spacecraft, the inertial and gravitational forces can cause the liquid fuel to slosh violently, accompanied by impacts against the tank walls. Consequently, this paper establishes an equivalent mechanical model for liquid sloshing based on the classical vibro-impact system with bilateral constraints. Using Poincaré map theory, the amplitude and frequency of the external excitation are investigated. The research indicates that under the influence of different parameters, the system exhibits rich dynamic behaviors. As parameters vary, the system demonstrates an alternation between periodic and chaotic motions. Under certain parameter conditions, the system also presents nonlinear phenomena such as grazing bifurcation and period-doubling bifurcation. This study provides a foundation for subsequent nonlinear dynamic analysis of liquid sloshing in spacecraft.

## Keywords

Liquid Sloshing, Vibro-Impact, Poincaré Map, Chaos

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

现代航天器通常需要大量液体燃料来完成复杂的飞行任务, 在航天器姿态机动、交会对接等过程中由于外部激励的作用, 会导致液体燃料发生剧烈晃动。液体推进剂的晃动影响着航天器的运动稳定性和姿态轨道系统的可靠性, 是航天器动力学中一个备受关注的问题[1]。液体晃动会对储罐壁面产生冲击动压力, 由于恢复力和惯性的存在, 晃动冲击作用会重复发生, 这种碰撞振动现象呈现出的复杂分岔和混沌运动会使系统的动力学行为变得非常复杂。因此, 对基于碰撞振动模型描述的液体晃动问题进行深入研究具有重要意义。

Ibrahim [2]综述了作用于刚性壁面和液体容器的破碎波和液体晃动冲击作用, 讨论了液体碰撞过程的相关物理过程。Pilipchuk 等[3]采用高次幂函数模拟液体晃动对储罐壁的冲击效应, 并运用锯齿时间变换技术解析地研究了弹性支撑结构与液体冲击之间的强非线性模态相互作用, 获得了强非线性周期运动的基本特性。张琳等[4]通过实验研究充液双层结构在碰撞过程的动力响应特性, 研究结果显示了液体在碰撞过程对顶板的缓冲保护作用。Gendelman 等[5]使用速度相关的恢复系数来取代水力冲击的高功率势函数和耗散函数, 并推导出相关恢复系数的公式。Fan 等[6]研究了具有脉冲激励和双向间隙约束的铰链运输系统在冲击振动过程中的动力学特性, 发现了系统由稳定的周期运动进入混沌的三条路径。

Shaw 和 Homes [7]首次用解析方法研究了单侧约束振子, 分析了系统周期运动的局部分岔和混沌运动。Xu 等[8]通过构造不连续映射, 研究了两自由度振动冲击系统的擦边分岔动力学控制问题。李冠强等[9]以单自由度双边碰撞 Duffing 振子的对称系统以及非对称系统为研究对象, 求得系统的周期解并分析

了稳定性, 概括了随着参数变化, 通向混沌的路径。李沛民等[10]对双侧非对称约束的单自由度非对称碰撞振动系统进行了探讨, 分析了系统周期运动的分岔行为以及在参数平面下的转迁规律。邓浩洲等[11]研究了一类分段光滑不连续一维映像的动力学, 得到求解这类不连续映射在任意参数下边界碰撞分岔临界控制参数的一般方法。

本文在基于两自由度双侧约束碰撞模型的基础上研究航天器液体燃料的刚-液耦合晃动效应。第二章依据液体晃动的经典等效力学模型建立系统的动力学方程, 并依据前人的研究结果确定了系统参数。第三章针对碰撞振动系统介绍了庞加莱映射的构造方法, 为后续对分析系统的动力学行为做好铺垫。第四章在上一章的理论基础上, 利用相图、分岔图、庞加莱截面投影图等研究外激励幅值和频率等分岔参数对系统的动力学行为进行分析, 对系统的分岔、混沌等非线性行为进行了研究。

## 2. 模型描述

### 2.1. 模型介绍

图 1 给出液体晃动的两种经典等效力学模型, 液体的每一阶晃动模态都对应了一种单摆或弹簧质量模型, 其中第一阶晃动质量占主要地位, 靠近储箱底部的液体不参与晃动, 这部分液体通常等效为相对储罐静止的质量块。

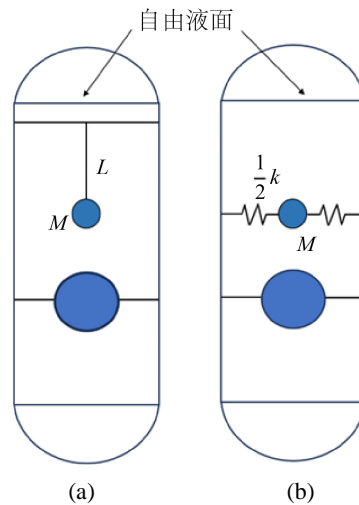


Figure 1. Equivalent mechanical model for liquid sloshing: (a) Pendulum model; (b) Spring-mass model

图 1. 液体晃动的等效力学模型: (a) 单摆模型; (b) 弹簧-质量模型

本文依据双侧约束碰撞振动模型建立了如图 2 所示的液体晃动弹簧质量等效力学模型。考虑两自由度双侧约束碰撞振动系统, 储罐内的晃动液体用一组弹簧质量模型等效代替, 静止质量使用一个质量块等效代替, 不妨设晃动液体质量为  $m$ , 储罐和非晃动液体质量之和为  $M$ , 即静止质量为  $M$ 。晃动质量  $m$  通过线性刚度  $k_1$  与储罐壁相连。储罐受到水平的简谐激励  $F$ , 频率为  $\Omega$ , 幅值为  $\mu MG$ 。储罐通过系数为  $\bar{k}, \bar{c}$  的刚度和阻尼与结构壁相连。静止质量和晃动质量的绝对位移分别为  $u(t)$  和  $v(t)$ 。

根据 Abramson [12] 的文献记录了圆柱形储罐中非对称晃动模态的各阶模态质量之比, 显示了静止质量  $m_0$  以及前三阶晃动模态质量与液体总质量的比值与充液深度和底面半径比值  $\frac{h}{r}$  之间的关系。当充液比

$\frac{h}{r}$  达到一定深度时, 第一阶晃动质量占主要部分, 因此在本文中选取第一阶晃动质量来近似描述晃动液体是合理的。

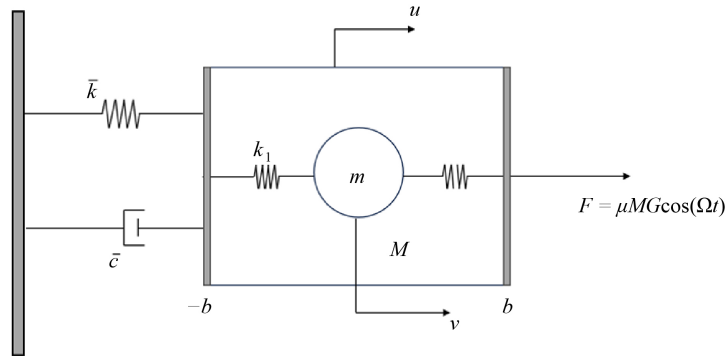


Figure 2. Two-degree-of-freedom vibro-impact system  
图 2. 两自由度碰撞振动系统

### 2.2. 运动方程

图 2 所示模型的晃动碰撞动力学方程可表示为:

$$\begin{cases} m\ddot{v} + k_1(v-u) - \sum m(\dot{v}(t_j^+) - \dot{v}(t_j^-))\delta(t-t_j) = 0 \\ M\ddot{u} + \bar{k}u + \bar{c}\dot{u} + k_1(u-v) + \sum M(\dot{u}(t_j^+) - \dot{u}(t_j^-))\delta(t-t_j) = \mu MG \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $t_j^+, t_j^-, t_j$  分别表示碰撞发生后, 碰撞发生前, 碰撞发生时的时刻。  $\delta(t)$  是狄拉克函数, 它对应碰撞瞬间过程中施加给系统的无限大的力。

定义静止质量  $M$  与晃动质量  $m$  的相对位移为:

$$w(t) = u(t) - v(t) \quad (2)$$

则当  $|w(t_j)| = b$  时碰撞发生。

通过经典的恢复系数模型来描述碰撞, 即恢复系数  $\kappa$  依赖于碰撞速度:

$$w(t_j^+) = -\kappa(\dot{w}(t_j^-))w(t_j^-) \quad (3)$$

碰撞过程中的动量守恒关系式如下:

$$M\dot{u}(t_j^-) + m\dot{v}(t_j^-) = M\dot{u}(t_j^+) + m\dot{v}(t_j^+) \quad (4)$$

结合(2)~(4)三式, 可得每次碰撞中传递给静止质量  $M$  的动量总量为:

$$\Delta P_1 = M(\dot{u}(t_j^+) - \dot{u}(t_j^-)) = -\frac{Mm}{M+m}(\kappa+1)\dot{w}(t_j^-) \quad (5)$$

则系统(1)可改写为:

$$\begin{cases} M\ddot{u} + \bar{k}u + \bar{c}\dot{u} + k_1(u-v) + \sum \frac{Mm}{M+m}(\kappa+1)\dot{w}\delta(t-t_j) = \mu MG \cos(\Omega t) \\ m\ddot{v} + k_1(v-u) - \sum \frac{Mm}{M+m}(\kappa+1)\dot{w}\delta(t-t_j) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

结合如下变量变换:

$$w(t) = u(t) - v(t), X(t) = u(t) + \varepsilon v(t) \tag{7}$$

其中  $\varepsilon = \frac{m}{M}$  是晃动质量和静止质量的质量比,  $X(t)$  与系统质心位移成正比。

则系统(6)可改写为如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{w} + \dot{w} \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \xi \right) + w \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \omega_1^2 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \omega_2^2 \right) + \dot{X} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \xi \right) \\ + X \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \omega_1^2 \right) + \sum (\kappa+1) \dot{w} \delta(t-t_j) = \mu G \cos(\Omega t) \\ \ddot{X} + \dot{w} \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \xi \right) + w \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \omega_1^2 \right) + \dot{X} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \xi \right) + X \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \omega_1^2 \right) = \mu G \cos(\Omega t) \end{cases} \tag{8}$$

其中

$$\xi = \frac{\bar{c}}{M}, \omega_1 = \sqrt{\frac{\bar{k}}{M}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$$

定义系统(8)的无量纲参数:

$$\begin{aligned} \omega_R^2 &= \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \omega_2^2, \beta = \frac{\omega_R}{\omega_1}, \Omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\sigma)}}, \\ \mu &= \frac{\varepsilon \omega_1^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\sigma)}, \gamma = \frac{\xi}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\sigma)}}{\omega_1} \end{aligned} \tag{9}$$

这里  $\beta$ 、 $\gamma$  分别是系统的固有频率比和无量纲阻尼系数。进一步的分析主要集中在 1:1 共振上, 因此引入无量纲失谐参数  $\sigma$ , 来描述外激励频率  $\Omega$  与固有频率  $\omega_1$  之间的接近程度。并考虑时间的归一化  $\tau = \Omega t$ , 可得到系统(8)的无量纲运动方程:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \varepsilon^2 \gamma \dot{w} + \varepsilon(1-\varepsilon\sigma)w + \varepsilon\gamma \dot{X} + (1-\varepsilon\sigma)X = \varepsilon G \cos(\tau) \\ \ddot{w} + \varepsilon^2 \gamma \dot{w} + (\varepsilon + \beta^2)(1-\varepsilon\sigma)w + \varepsilon\gamma \dot{X} + (1-\varepsilon\sigma)X + \sum (\kappa+1) \dot{w} \delta(t-t_j) = \varepsilon G \cos(\tau) \end{cases} \tag{10}$$

系统(10)的运动方程可改写为分段模型形式:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \varepsilon^2 \gamma \dot{w} + \varepsilon(1-\varepsilon\sigma)w + \varepsilon\gamma \dot{X} + (1-\varepsilon\sigma)X = \varepsilon G \cos(\tau) \\ \ddot{w} + \varepsilon^2 \gamma \dot{w} + (\varepsilon + \beta^2)(1-\varepsilon\sigma)w + \varepsilon\gamma \dot{X} + (1-\varepsilon\sigma)X = \varepsilon G \cos(\tau), \quad w < b \\ \dot{w}_+ = -\kappa \dot{w}_-, \quad w = \pm b \end{cases} \tag{11}$$

### 3. 庞加莱映射

振子的状态向量表示为  $\mathbf{x} = (x_1, v_1, x_2, v_2, \varphi)^T \in \mathbb{R}^4 \times S$ , 其中  $\varphi \in [0, 2\pi)$  表示外激励的相位。引入相对坐标  $w = x_2 - x_1, z = \dot{w} = v_2 - v_1$ , 分别表示晃动质量对静止质量的相对位移和相对速度。则在相对坐标系下系统的运动方程可以表示为:

$$\frac{d}{dt}(x_1, v_1, w, z, \varphi) = (v_1, a_1, z, a_2 - a_1, \Omega)$$

其中  $a_1 = \dot{v}_1, a_2 = \dot{v}_2$ 。

由于刚性约束的存在, 系统轨线与刚性约束面之间的接触不连续, 因此系统的向量场在该处的雅各比矩阵不存在, 这时对该类非光滑动力系统稳定性分析时, 就需要避开不连续点处向量场的雅各比

矩阵的计算。又因为系统的状态变量  $\mathbf{x}$  是非线性的, 所以只能借助数值方法对系统进行动力学分析。本文采用庞加莱映射方法, 对由刚性约束引起的非光滑动力学问题, 根据其空间的特殊性来构造庞加莱映射。

定义碰撞面为:

$$\Sigma = \{(x_1, v_1, x_2, v_2, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid x_2 - x_1 = \pm b\} = \{(x_1, v_1, w, z, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid w = \pm b\}$$

构造庞加莱映射:

$$P: \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-$$

其中  $\Sigma^- = \{(x_1, v_{1-}, y_-, z_-, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid w = \pm b\}$ , 表示碰撞之前瞬间的碰撞面。同理, 定义  $\Sigma^+ = \{(x_1, v_{1+}, y_+, z_+, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid w = \pm b\}$  表示碰撞后瞬间的碰撞面。该映射由两个子映射组成, 一为碰撞阶段的映射, 另一为非碰撞阶段的映射。

为描述构造的庞加莱映射  $P$ , 设相空间轨线  $\Gamma$  与碰撞面  $\Sigma^-$  在相位  $\varphi = \varphi_1$  处的  $O$  点相交, 在  $O'$  处离开碰撞面  $\Sigma^+$ , 定义相位面  $\Pi^\varphi = \{(x_1, v_1, w, z, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid \varphi = \varphi_1\}$ 。

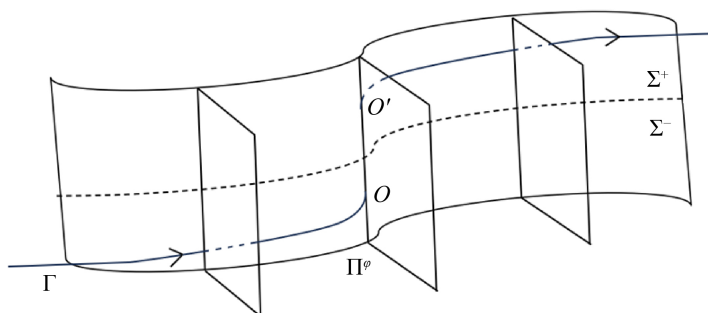


Figure 3. Crossing of trajectories in phase space  
图 3. 轨线在相空间的穿越情况

根据轨线与碰撞面的接触情况(图 3), 定义四种映射:

- (I)  $\Pi^\varphi \rightarrow \Sigma^-$ : 表示定相位面  $\Pi^\varphi$  到碰撞面  $\Sigma^-$  中碰撞点  $O$  的局部映射  $P_1$ ;
  - (II)  $\Sigma^- \rightarrow \Sigma^+$ : 表示碰撞面  $\Sigma^-$  中  $O$  点到碰撞面  $\Sigma^+$  中  $O'$  点的局部映射  $P_2$ ;
  - (III)  $\Sigma^+ \rightarrow \Pi^\varphi$ : 表示碰撞面  $\Sigma^+$  中  $O'$  点沿系统流演化, 返回到定相位面  $\Pi^\varphi$  的局部映射  $P_3$ ;
  - (IV)  $\Pi^\varphi \rightarrow \Pi^\varphi$ : 表示从定相位面  $\Pi^\varphi$  出发, 不经碰撞直接到达下一个相同定相位面  $\Pi^\varphi$  的局部映射  $P_4$ 。
- 这四类映射构成了碰撞振动系统的庞加莱映射:

$$P = P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4。$$

给出局部映射雅各比矩阵定理[13]:

定理 1: 考虑  $n$  维系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

对具有刚性约束的  $n$  维非线性动力学系统, 其向量场为

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \left( \mathbf{f}(\mathbf{z})^\top, \omega \right)^\top, \quad \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^n \times S^1,$$

切换面方程为  $h(\mathbf{z}) = 0$ , 根据向量场  $\mathbf{F}(\mathbf{z})$  的连续性, 在满足系统的流与切换面横截相交的条件下, 通过几何关系可得到局部映射  $P_L$  在点  $O$  处的雅各比矩阵  $DP_L$  为:

$$DP_L = I - \frac{F(z)Dh(z)}{Dh(z) \cdot F(z)}$$

其中  $I$  为  $n+1$  阶单位矩阵,  $Dh(z)$  表示梯度,  $F(z)Dh(z)$  为二阶张量,  $Dh(z) \cdot F(z)$  为向量内积。

给出以上四类映射的雅各比矩阵:

(1) 对于映射  $P_1$ , 由两部分组成, 即  $P_1 = P_1^2 P_1^1$ , 其中  $P_1^1$  表示由绝对坐标系的相位面  $\Pi^\varphi$  到相对坐标系相位面  $\Pi^\varphi$  下的映射,

$$P_1^1 : \Pi^\varphi \rightarrow \Pi^\varphi, (x_1, v_{1-}, x_2, v_{2-}) \rightarrow (x_1, v_{1-}, w, z_-)$$

可得

$$DP_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_1^2$  表示从相对坐标系的相位面  $\Pi^\varphi$  到相对坐标系的碰撞面  $\Sigma^-$  的映射,

$$P_1^2 : \Pi^\varphi \rightarrow \Sigma^-, (x_1, v_{1-}, w, z_-) \rightarrow (x_1, v_{1-}, z_-, \varphi)$$

此时对应的切换面为  $H_1(z) = w - b = 0$ 。根据定理 1, 可得:

$$DP_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_{1-}}{z_-} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{1-}}{z_-} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{2-} - a_{1-}}{z_-} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\Omega}{z_-} & 0 \end{pmatrix}$$

因此映射  $P_1$  对应的雅各比矩阵为:

$$DP_1 = DP_1^2 DP_1^1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v_{1-}}{z_-} & 0 & -\frac{v_{1-}}{z_-} & 0 \\ \frac{a_{1-}}{z_-} & 1 & -\frac{a_{1-}}{z_-} & 0 \\ \frac{a_{2-} - a_{1-}}{z_-} & 0 & -\frac{a_{2-} - a_{1-}}{z_-} & 1 \\ \frac{\Omega}{z_-} & 0 & -\frac{\Omega}{z_-} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 对于映射  $P_2 : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+, (x_1, v_{1-}, z_-, \varphi) \rightarrow (x_1, v_{1+}, z_+, \varphi)$

根据运动前后的速度以及动量之间的关系满足:

$$\begin{aligned} v_{2+} - v_{1+} &= -\kappa(v_{2-} - v_{1-}) \\ Mv_{1+} + mv_{2+} &= Mv_{1-} + mv_{2-} \end{aligned}$$

可得

$$DP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\varepsilon(1+\kappa)}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 对于映射  $P_3: \Sigma^+ \rightarrow \Pi^\varphi, (x_1, v_{1+}, z_+, \varphi) \rightarrow (x_1, v_{1+}, x_2, v_{2+})$

对于映射  $P_3$  由两部分组成, 即  $P_3 = P_3^2 P_3^1$ , 其中  $P_3^1$  表示由相对坐标系的碰撞面  $\Sigma^+$  到相对坐标系相位面  $\Pi^\varphi$  下的映射,

$$P_3^1: \Sigma^+ \rightarrow \Pi^\varphi, (x_1, v_{1+}, z_+, \varphi) \rightarrow (x_1, v_{1+}, w, z_+)$$

此时相位面为  $H_2(z) = \varphi - \varphi_1 = 0$ , 通过局部映射定理可得:

$$DP_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v_{1+}}{\Omega} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_{1+}}{\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{z}{\Omega} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{2+} - a_{1+}}{\Omega} \end{pmatrix}$$

$P_3^2$  表示相对坐标系下的相位面  $\Pi^\varphi$  到绝对坐标系下的相位面  $\Pi^\varphi$  的映射,

$$P_3^2: \Sigma^+ \rightarrow \Pi^\varphi, (x_1, v_{1+}, w, z_+) \rightarrow (x_1, v_{1+}, x_2, v_{2+})$$

可得

$$DP_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$DP_3 = DP_3^2 DP_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v_{1+}}{\Omega} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_{1+}}{\Omega} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{v_{2+}}{\Omega} - \frac{z_+}{\Omega} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{a_{2+}}{\Omega} \end{pmatrix}$$

(4) 对于映射  $P_4: \Sigma^+ \rightarrow \Pi^\varphi, (x_1, v_{1+}, x_2, v_{2+}) \rightarrow (x_1, v_{1-}, x_2, v_{2-})$

由于系统(1)的流在  $y \in (-b, b)$  内是光滑的, 所以映射  $P_4$  在该区域是光滑的同胚映射, 其雅各比矩阵  $DP_4$  可根据多元函数的求导法则得到, 并通过数值方法得到其数值解。

由复合映射求导的链式法则, 庞加莱映射  $P$  的雅各比矩阵可写为:

$$DP = DP_1 \circ DP_2 \circ DP_3 \circ DP_4$$

### 4. 数值仿真

在液体晃动问题中, 外激励幅值对应于航天器姿态机动或交会对接过程中受到的扰动力大小。当激励幅值较小时, 液体晃动幅度有限, 不易与罐壁发生碰撞; 随着幅值增大, 液体晃动加剧, 逐渐产生对罐壁的间歇性冲击。在一定外激励频率下, 对于不同的激励幅值, 系统的动力学特性存在显著的区别。

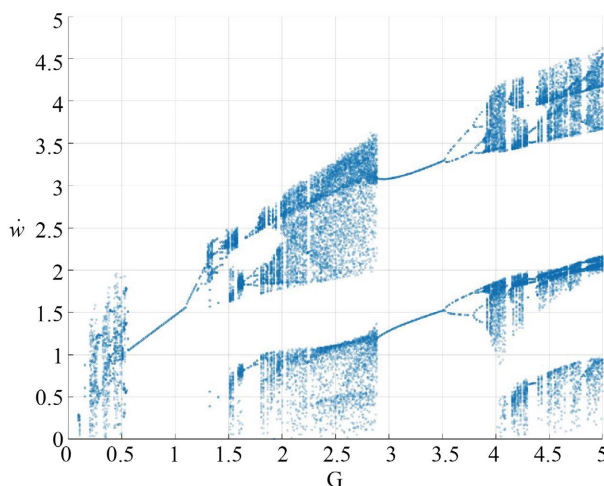
为验证后续理论仿真的正确性, 选取文献[14]中的数据进行仿真计算。设圆柱形储罐高 3 m, 外半径  $r$  为 0.6 m, 储罐壁厚 0.008 m, 储罐材质为铁罐, 密度为  $7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。储罐内总液体 600 kg, 液体密度为  $0.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 储罐长度为  $2b = 1.2 \text{ m}$ 。则由以上数据可计算出充液深度  $h$ , 进一步可计算出  $\frac{h}{r}$ 。文献[14]给出系统一阶固有频率随液体总质量的变换关系, 由此可计算出系统固有的刚度。

本文采用如表 1 所示参数, 在此使用 MATLAB 软件进行数值仿真。

**Table 1.** Parameters of the two-degree-of-freedom collision vibration system for liquid sloshing  
**表 1.** 液体晃动两自由度碰撞振动系统参数

参数	单位	取值
质量比 $\varepsilon$	/	0.221
静止质量 $M$	kg	1113.523
阻尼 $\bar{c}$	N·m/s	110.734
刚度 $\bar{k}$	N/m	3528.108
刚度 $k_1$	N/m	69.977
外激励幅值 $\mu$	N	0.751
恢复系数 $\kappa$	/	0.56

图 4 为以外激励幅值  $G$  为分岔参数, 以  $w = 0.6$  为庞加莱截面系统(11)碰撞速度的全局分岔图。当  $G$  较小时, 液体晃动幅度有限, 不易与罐壁发生碰撞; 随着  $G$  增大, 液体晃动加剧, 逐渐产生对罐壁的间歇性冲击, 系统进入非光滑动力学范畴, 系统通过倍周期分岔进入复杂周期轨道, 也观察到混沌区域的突然出现与消失, 表现出复杂的周期运动与混沌运动交替出现的现象。



**Figure 4.** Global bifurcation diagram for parameter  $G$   
**图 4.** 关于  $G$  的全局分岔图

图 5 展示了系统最大李雅普诺夫指数随外激励幅值  $G$  的变化情况。最大李雅普诺夫指数是衡量系统对初值敏感程度的重要指标, 其正负直接反映了系统的运动性质: 当最大李雅普诺夫指数大于零时, 系统呈现混沌运动; 当最大李雅普诺夫指数小于零时, 系统为周期运动; 当最大李雅普诺夫指数等于零时, 系统处于周期倍化或准周期运动临界状态。

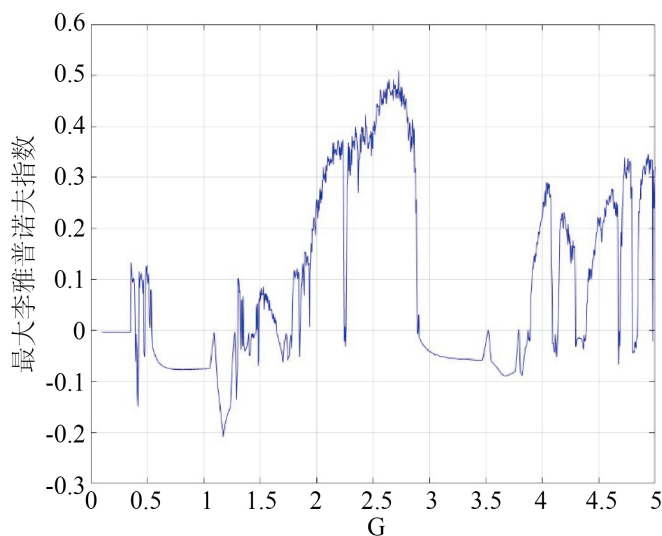
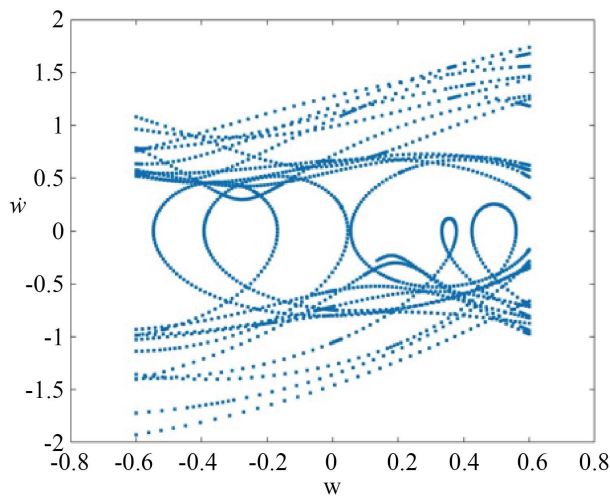


Figure 5. Lyapunov exponent diagram diagram for parameter  $G$   
图 5. 关于  $G$  的最大李雅普诺夫指数图

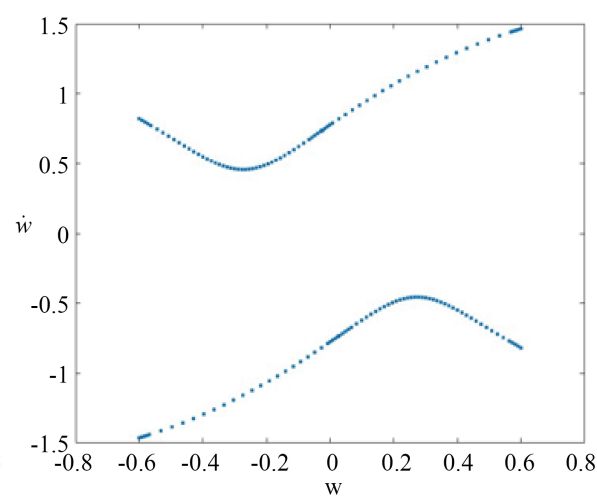
当外激励幅值取不同值时的庞加莱截面上的相图如图 6 所示。当  $G=0.5$  时, 液体晃动不规则, 系统呈现混沌运动(见图 6(a)), 此时液面波形杂乱, 不可预测; 随着  $G$  的增加, 液体晃动趋于稳定; 当  $G=1$  时出现周期 1 的运动(见图 6(b)), 此时液面呈现稳定的单峰波动, 然后晃动再次失去规律性, 碰撞行为变得混沌, 在  $G=2.5$  时出现混沌(见图 6(c)), 随后又变成周期运动。在  $G \in [2.9, 3.9]$  内, 系统经历了完整的倍周期分岔序列, 在  $G \in [2.9, 3.5]$  区间, 系统呈现周期 1 运动, 当  $G$  增加到 3.5, 系统发生倍周期分岔, 进入周期 2 运动(见图 6(d)), 此时液体在两个激励周期内完成一次完整运动模式, 交替与罐壁碰撞, 液面呈现“大小波”交替; 随着  $G$  继续增加到 3.8, 系统再次出现倍周期分岔, 由周期 2 跃迁到周期 4 (见图 6(e)), 此时液面运动模式更复杂, 但仍在 4 个周期后重复; 当  $G$  超过 3.9 时, 系统最终进入混沌运动(见图 6(f))。依据图 5, 在  $G=3.5$ ,  $G=3.8$  的参数情况下, 系统的最大李雅普诺夫指数为 0, 说明系统确实处于周期倍化状态。当  $G \in [3.9, 5.0]$  区间时, 系统仍表现为周期运动和混沌运动交替出现, 但以混沌运动为主。

当  $G=1.295$ ,  $G=1.313$  时, 系统轨道刚好与左右两侧碰撞面相切而未穿越, 系统出现擦边分岔(见图 6(g)、图 6(h))。参照图 6, 在  $G=1.295$  参数下擦边分岔出现前, 李雅普诺夫指数小于 0, 而在擦边分岔点之后, 李雅普诺夫指数大于 0, 这种李雅普诺夫指数从负到正的跳跃, 是擦边分岔的典型特征。在此状态对应液体晃动刚好触及罐壁但尚未形成显著冲击的临界情形, 是系统从规则碰撞向复杂动力学行为过渡的关键点。

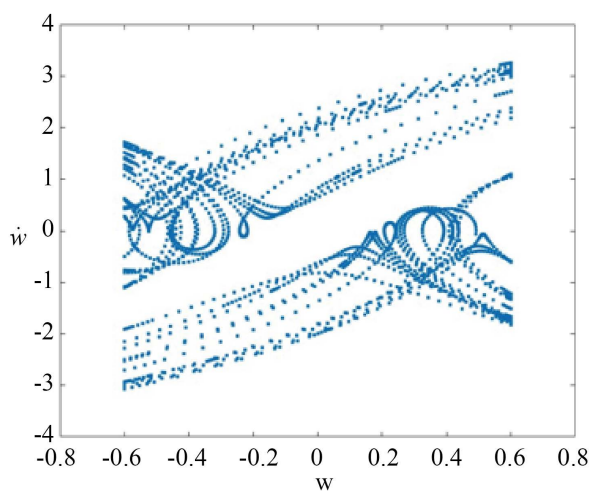
整体来看, 随着外激励幅值的变化, 液体晃动与罐壁之间的碰撞行为在混沌与周期运动之间多次切换, 伴随着倍周期分岔和擦边分岔等非线性现象。这种复杂的动力学行为反映了液体大幅晃动过程中冲击载荷的多样性, 对航天器燃料储罐的结构疲劳和姿态控制精度具有重要影响。



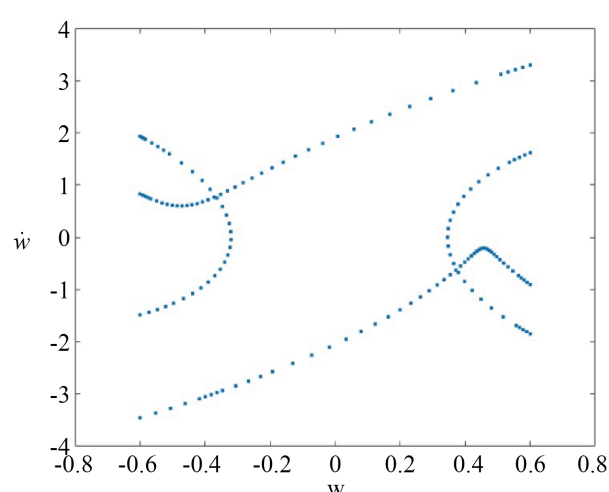
(a)  $G=0.5$



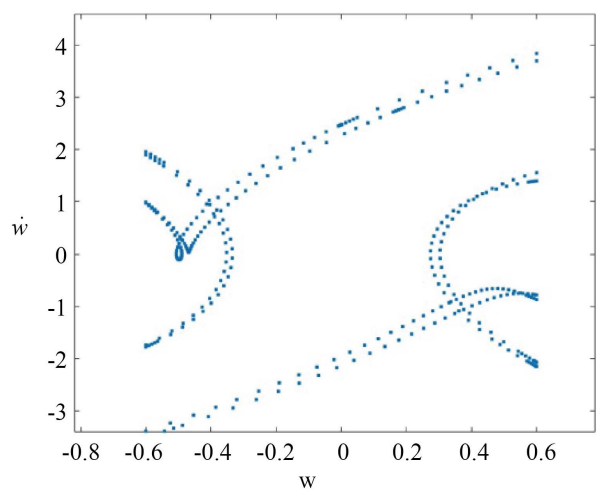
(b)  $G=1$



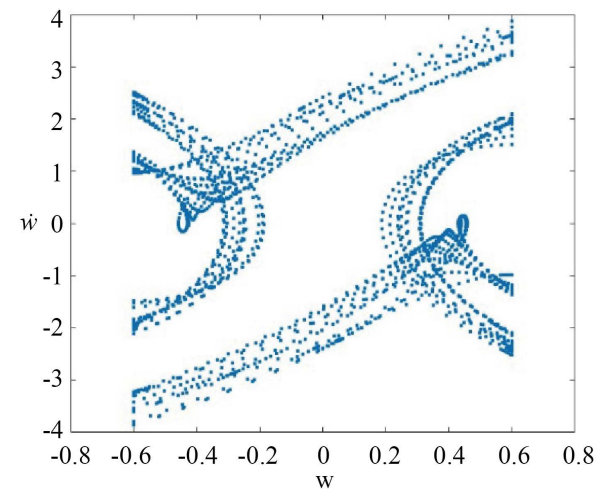
(c)  $G=2.5$



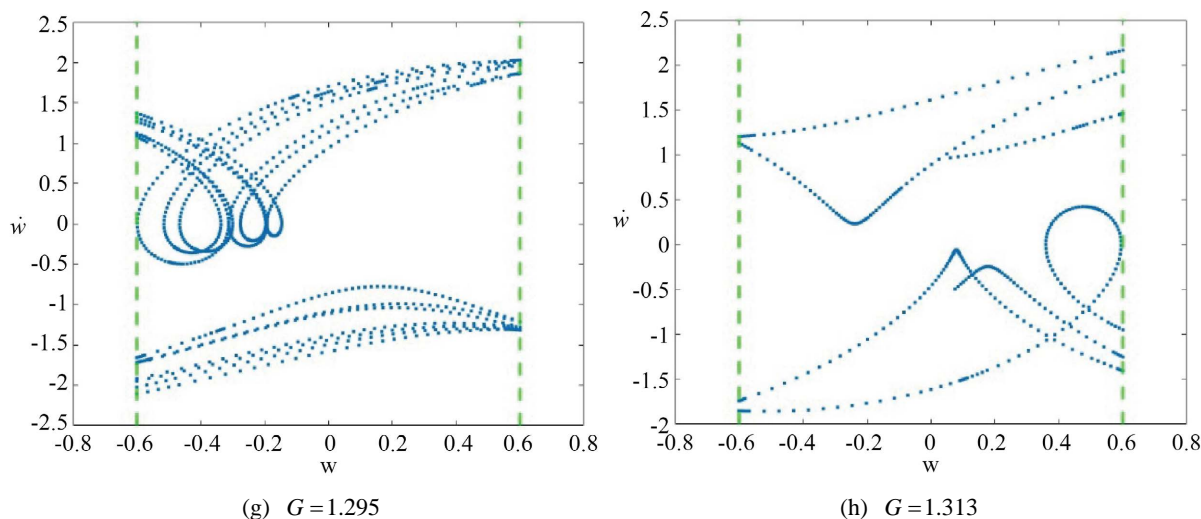
(d)  $G=3.6$



(e)  $G=3.8$

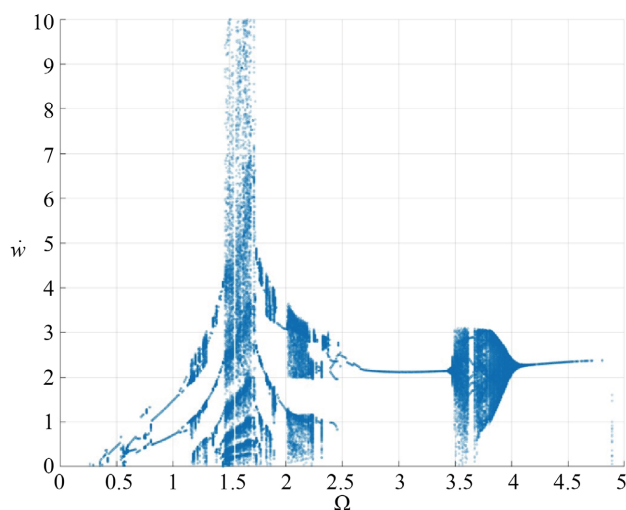


(f)  $G=4.0$



**Figure 6.** Phase diagram on the Poincaré section  
**图 6.** 庞加莱截面上的相图

图 7 表示的是液体晃动两自由度碰撞振动系统中，外激励频率  $\Omega$  对系统动力学行为的影响。当  $\Omega$  取值较小时，液体晃动幅度较小，不能对壁面产生碰撞。随着  $\Omega$  接近共振区，碰撞行为逐渐出现并增强，系统进入非线性动力学活跃区域，在远离共振的频率区间，系统主要表现为稳定的周期运动，表明液体晃动与罐壁的碰撞具有规律性，冲击载荷周期重复。当  $\Omega$  进入共振区附近时，系统表现出混沌运动，表明液体晃动剧烈且不规则，碰撞行为复杂，冲击载荷具有随机性。在整个  $\Omega$  参数区间内，系统在周期运动、混沌运动、准周期运动之间多次切换，体现了液体晃动系统对激励频率变化的敏感性。



**Figure 7.** Global bifurcation diagram for parameter  $\Omega$   
**图 7.** 关于  $\Omega$  的全局分岔图

图 8 展示了系统最大李雅普诺夫指数随外激励频率  $\Omega$  的变化。该指数是判别系统运动性质的重要依据。随着  $\Omega$  的增大，系统在周期与混沌之间多次交替：在共振区附近指数显著为正，出现混沌运动；在远离共振的区间指数稳定为负，表现为稳定的周期运动。该图验证了液体晃动系统对激励频率变化的敏感性。

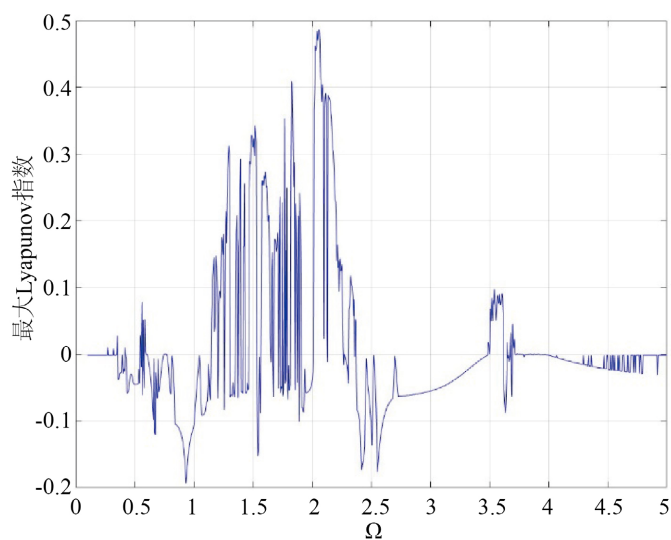
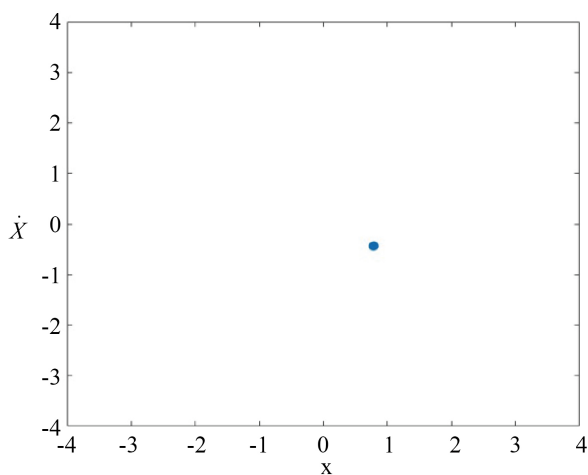
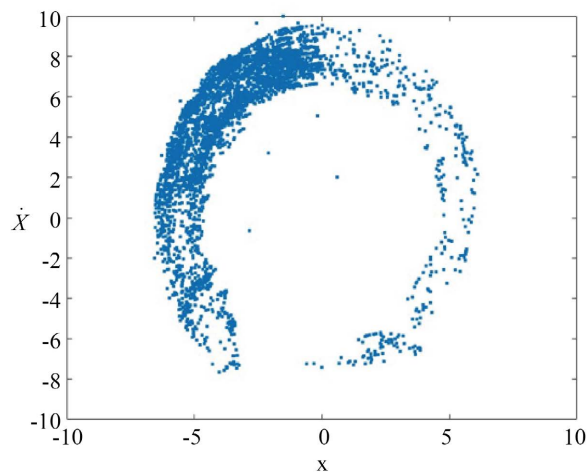


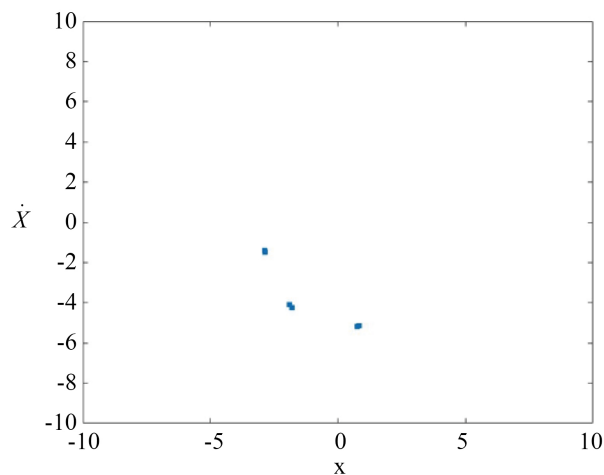
Figure 8. Lyapunov exponent diagram for parameter  $\Omega$   
图 8. 关于  $\Omega$  的最大李雅普诺夫指数图



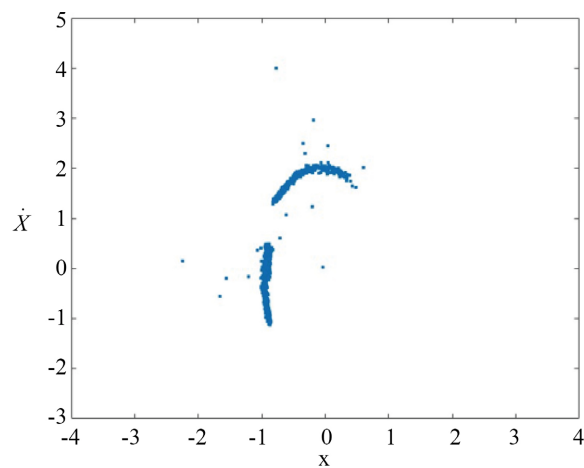
(a)  $\Omega = 0.5$



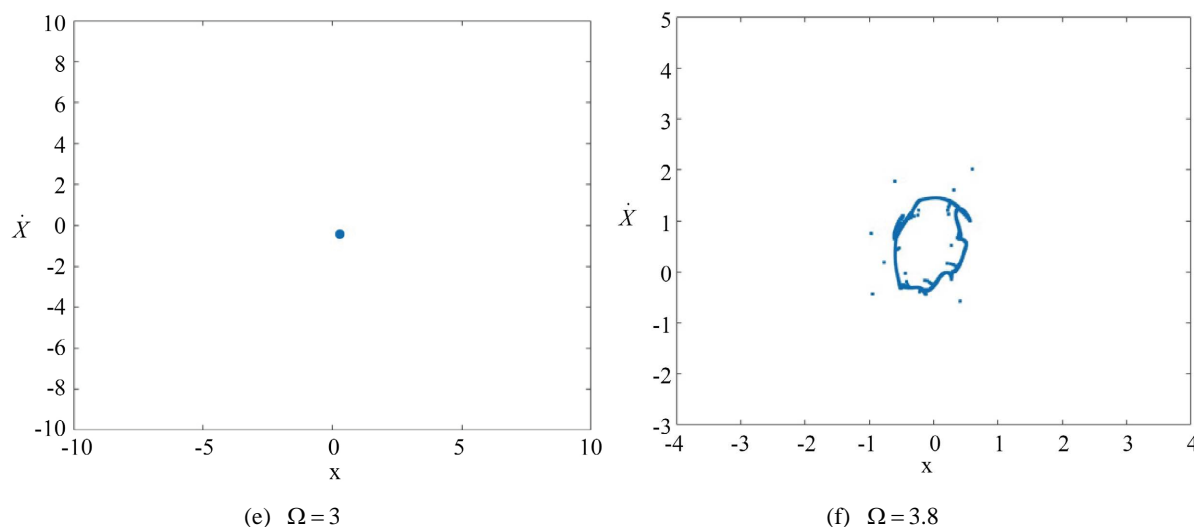
(b)  $\Omega = 1.5$



(c)  $\Omega = 1.8$



(d)  $\Omega = 2.2$



**Figure 9.** Projection diagram of the Poincaré section  
**图 9.** 庞加莱截面投影图

当外激励频率取不同值时的系统在庞加莱截面上的投影如图 9 所示。随着  $\Omega$  的增加, 系统一开始表现为周期现象, 当  $\Omega = 0.5$  时出现周期 1 运动(如图 9(a)); 当  $\Omega = 1.5$  时, 激励频率接近共振频率, 与罐壁的碰撞变得不规则, 系统进入混沌状态(如图 9(b)); 然后系统又出现周期运动,  $\Omega = 1.8$  时出现周期 3 运动(如图 9(c)), 随后  $\Omega = 2.2$  时出现混沌运动(如图 9(d)); 之后系统在  $\Omega \in (2.5, 3.4)$  时, 激励频率远离共振区, 液体晃动区域稳定, 始终保持周期 1 的规律性运动(如图 9(e))。当  $\Omega = 3.8$ , 系统产生吸引不变环(如图 9(f)), 表明系统进入准周期运动状态, 液体与罐壁的碰撞呈现调制现象,  $\Omega$  继续增加, 系统由环面倍化进入混沌运动, 当  $\Omega > 4$  时, 系统仍然保持周期 1 运动。

以上结果表明, 外激励频率的变化能诱发液体晃动从无碰撞到周期碰撞、再到混沌碰撞, 甚至出现准周期运动等复杂动力学行为。特别是当激励频率接近液体晃动固有频率时, 系统表现出最强烈的非线性响应。

## 5. 总结

本文考虑航天器在运行过程中, 液体燃料晃动对储罐壁产生的碰撞效应。文章基于液体晃动的弹簧-质量等效力学模型, 建立两自由度双侧碰撞振动系统来模拟液体与储罐壁之间的相互作用, 并利用庞加莱映射对外激励幅值和频率这两个关键参数进行动力学分析。通过理论分析和仿真计算发现, 系统在不同的参数条件下展现出丰富的非线性行为。随着外激励幅值和频率的变化, 液体与罐壁的碰撞呈现周期运动与混沌运动交替存在的复杂动力学行为。该研究揭示了液体晃动过程中冲击载荷的复杂性, 这对于理解航天器燃料刚-液耦合的动力学响应特性和姿态控制精度具有重要的理论参考价值。

## 参考文献

- [1] 李青, 王天舒, 马兴瑞. 充液航天器液体晃动和液固耦合动力学的研究与应用[J]. 力学进展, 2012, 42(4): 472-481.
- [2] Ibrahim, R.A. (2020) Assessment of Breaking Waves and Liquid Sloshing Impact. *Nonlinear Dynamics*, **100**, 1837-1925. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05605-7>
- [3] Pilipchuk, V.N. and Ibrahim, R.A. (1997) The Dynamics of a Non-Linear System Simulating Liquid Sloshing Impact in Moving Structures. *Journal of Sound and Vibration*, **205**, 593-615. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1034>

- [4] 张琳, 张涛, 刘土光, 等. 撞击载荷下充液双层结构响应特性的试验研究[J]. 爆炸与冲击, 2020, 40(3): 76-84.
- [5] Farid, M. and Gendelman, O.V. (2017) Response Regimes in Equivalent Mechanical Model of Strongly Nonlinear Liquid Sloshing. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **94**, 146-159. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.006>
- [6] Fan, C., Guo, C., Xu, F. and Wang, T. (2024) Research on Impact Vibration Response of Hinged Fluid-Conveying Pipe with Bilateral Gap Constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **162**, Article ID: 104726. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104726>
- [7] Shaw, S.W. and Holmes, P.J. (1983) A Periodically Forced Impact Oscillator with Large Dissipation. *Journal of Applied Mechanics*, **50**, 849-857. <https://doi.org/10.1115/1.3167156>
- [8] Xu, H., Yin, S., Wen, G., Zhang, S. and Lv, Z. (2017) Discrete-In-Time Feedback Control of Near-Grazing Dynamics in the Two-Degree-Of-Freedom Vibro-Impact System with a Clearance. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 1127-1137. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3103-8>
- [9] 李冠强, 谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性, 尖点分岔与混沌[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 1-7.
- [10] 李沛民, 李道权, 惠张. 一类单自由度双侧含约束的碰撞振动系统动力学研究[J]. 动力系统与控制, 2025, 14(1): 1-10.
- [11] 邓浩洲, 王力可, 朱兆瑞, 等. 一类分段光滑不连续映像中的边界碰撞分岔和余维分岔[J]. 物理学报, 2026, 75(1): 184-194.
- [12] Abramson, H.F. (1966) The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, with Applications to Space Vehicle Technology. NASA SR-106.
- [13] 陆启韶, 金俐. 具有刚性约束的非线性动力系统的局部映射方法[J]. 固体力学学报, 2005, 26(2): 132-138.
- [14] 吴文军. 带多充液贮箱及机动柔性附件航天器耦合动力学研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 2015.