Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 18-24
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155204

Hans汉斯

矩阵的特征值及特征向量的应用案例

李允超[1]，马阳玲[2*]，金振宇[2]

[1]苏州科技大学研究生院，江苏 苏州
[2]苏州科技大学数学科学学院，江苏 苏州

收稿日期：2026年4月9日；录用日期：2026年5月2日；发布日期：2026年5月12日

摘 要

矩阵的特征值及特征向量是线性代数中核心概念之一，它不仅可以解决数学中的问题，还可以解决数据降维、图像分析等领域的问题。本文通过四个实例，详细探讨了矩阵的特征值及特征向量在数学、数据降维、图像分析这三个领域中的具体应用，旨在结合本科生学位与研究生教育的要求，帮助学生理解矩阵特征值和特征向量的概念及求解过程，提高学生的学习兴趣及应用能力。

关键词

矩阵的特征值，矩阵的特征向量，应用实例

Application Cases of Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices

Yunchao Li[1], Yangling Ma[2*], Zhenyu Jin[2]

[1]Graduate School, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu
[2]School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: April 9, 2026; accepted: May 2, 2026; published: May 12, 2026

Abstract

Eigenvalues and eigenvectors of matrices are one of the core concepts in linear algebra. They can not only solve problems in mathematics but also address issues in fields such as dimensionality reduction and image analysis. Through four specific examples, this paper elaborates on the practical applications of eigenvalues and eigenvectors of matrices in three areas—mathematics, dimensionality reduction, and image analysis. Combining the requirements of undergraduate and graduate education, the purpose is to help students grasp the concepts and solve methods of matrix eigenvalues and eigenvectors,

[*]通讯作者。

文章引用: 李允超, 马阳玲, 金振宇. 矩阵的特征值及特征向量的应用案例[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 18-24.
DOI: 10.12677/aam.2026.155204

and to increase their learning interest and practical application skills.

Keywords

Eigenvalue of a Matrix, Eigenvector of a Matrix, Application Example

1. 引言

线性代数作为高等数学的核心分支之一，不仅是一门抽象的数学学科，更是连接数学理论与现实应用的“桥梁”，其教学内容贯穿思维培养、学科基础、工程实践、科学研究四大维度，对学生的学术成长和能力塑造具有不可替代的价值。矩阵的特征值与特征向量作为线性代数的核心概念，其本质是将复杂的线性变换“拆解”为沿特征向量方向的“缩放”操作(特征值即缩放系数)，这种特性使其在数据降维、物理建模、信号处理、图像分析等多个领域具有不可替代的实际应用。近年来，众多学者从不同角度对矩阵的特征值及特征向量的应用进行了深入研究，涉及数学、图像分析、数据降维、物理建模、信号处理等多个领域。

在数学领域，李俊等人[1]利用矩阵的特征值及特征向量进行矩阵对角化。蒋卓芸等人[2]利用矩阵的特征值及特征向量进行奇异值求解，并给出直观的推导过程。张文丽等人[3]利用矩阵特征值和特征向量对微分方程的求解进行了系统的讲解。在图像分析及数据降维领域，Shlens [4]提出主成分分析法(PCA)，该方法通过对数据的协方差矩阵进行特征值分解，选择特征值较大的特征向量所张成的子空间来投影原始数据，从而实现降维，保留数据的主要特征信息。相林等人[5]利用 PCA 算法对图像提取特征，得到蔬菜病害的特征库；并提取待检测的病害图片的特征，使用余弦相似度与病害特征库比较，检测出病害图像。张超群[6]采用基于矩阵特征及特征向量的主成分分析法，构建了一种基于特征参数的人脸识别算法。徐肖亮等人[7]针对 PCA 算法在计算特征值时计算量大的问题，提出一种改进算法，利用矩阵范数对协方差矩阵进行约简，在一定程度上降低了计算量。Belkin 等人[8]提出了拉普拉斯特征映射算法，该算法利用拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量来保留数据点间的局部邻域结构，通过计算拉普拉斯矩阵的最小特征值对应的特征向量来构成低维空间的坐标系，将高维数据点映射到低维空间。刘文博等人[9]依据核矩阵特征值构造核函数权重，将多个核函数进行组合加权，提出基于加权核主成分分析的维度约简算法达到数据降维的效果。吴温博等人[10]利用主成分分析法进行高光谱图像的降维。在物理建模领域，周泽文等人[11]以含有多种阻尼模型的机械系统为研究对象，提出了一种基于物理子空间的特征值降维求解方法，实现了模态频率及振型的高精高效的预测。王彦普等[12]研究以广义特征值问题为切入点，构建结构系统刚度矩阵与几何刚度矩阵。在信号处理领域，杨宇等[13]针对辛几何模态分解方法分析结果的不确定性，提出一种改进的辛几何模态分解方法。李赫等[14]基于矩阵特征值和特征向量提出了主分量分析方法解决了几个信号去噪的问题。

综上所述，矩阵的特征值及特征向量作为一种重要的工具，在数学、图像分析、数据降维、物理建模、信号处理等多个领域都具有广泛的应用价值。然而，在实际教学过程中，许多学生对矩阵的特征值与特征向量的应用理解不够深入，缺乏将理论知识与实际问题相结合的能力。因此，通过具体的案例来探讨矩阵的特征值及特征向量的应用，不仅可以帮助学生更好地对矩阵的特征值及特征向量进行求解，还可以提高学生对线性代数的学习兴趣和解决实际应用的能力。

2. 矩阵的特征值及特征向量在数学中的应用案例

本节主要通过矩阵的幂运算高效求解和线性微分方程组的求解与分析这两个例子来探讨矩阵的特征值及特征向量在数学中的应用。

2.1. 矩阵的幂运算高效求解

实例 1 计算方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 的 10 次幂 A^{10}。

具体解题步骤如下：

步骤 1 求特征值与特征向量。解特征方程 $|A-\lambda E|=0$，得特征值 $\lambda_1=1$ (对应的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$)，特征值 $\lambda_2=2$ (对应的特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$)。

步骤 2 构造对角化矩阵。$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 且 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。

步骤 3 计算 A^{10}。因为 $\Lambda^{10}=\begin{pmatrix}1^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1024\end{pmatrix}$，所以

$$A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1024\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1023\\ 0 & 1024\end{pmatrix}.$$

2.2. 线性微分方程组的求解与分析

实例 2 求解微分方程组 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2\\ \dot{x}_2=2x_2\end{cases}$ (对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，自变量为 t)。

具体解题步骤如下：

步骤 1 求特征值与特征向量。由实例 1 知特征值 $\lambda_1=1$ (对应的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$)，特征值 $\lambda_2=2$ (对应的特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$)。

步骤 2 写通解。$x(t)=c_1\mathrm{e}^{1\cdot t}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{2\cdot t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，即：$x_1(t)=c_1\mathrm{e}^{t}+c_2\mathrm{e}^{2t},x_2(t)=c_2\mathrm{e}^{2t}$。

步骤 3 稳定性分析：特征值 λ_1 和 λ_2 的实部均大于 0，因此当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\infty$，解不稳定。

3. 矩阵的特征值及特征向量在图像分析和数据降维中的应用案例

本节主要通过基于奇异值分解(SVD)的灰度图像压缩、基于协方差矩阵特征值分解的图像特征提取和数据降维这两个例子来探讨矩阵的特征值及特征向量在图像分析与数据降维中的应用。

3.1. 基于 SVD 的灰度图像压缩

灰度图像压缩原理假设用一个 $m\times n$ 的矩 A 表示一个灰度图像，其中 A_{ij} 代表图像中第 i 行第 j 列的灰度值(0~255)。SVD 可以将任意的矩阵分解成 3 个矩阵的乘积：

$$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}},$$

其中U是一个$m\times n$的正交矩阵，其列向量称为左奇异向量。Σ是一个$m\times n$的对角矩阵，对角线上的元素称为奇异值，通常按从大到小的顺序排列。奇异值衡量了对应奇异向量对原始矩阵的贡献程度。V是一个$n\times n$的正交矩阵，其行向量称为右奇异向量。

因为奇异值的衰减非常快，所以前k个最大的奇异值就包含了矩阵A的大部分信息。当计算机要储存灰度图像的时候，为了减少储存空间，可以利用 SVD 只保存前k个最大的奇异值及对应的奇异向量，近似矩阵A_k (替换原始的灰度图像矩阵)由U的前k列、Σ的前$k\times k$子矩阵和V^{T}的前k行相乘得到。当使用 SVD 压缩灰度图像时，得到的压缩率为$\left(1-\dfrac{m\cdot k+k+k\cdot n}{m\cdot n}\right)\times 100\%$。下面我们通过一个实际例子展示图像压缩效果。

实例 3 利用 SVD 对下面 4 × 4 的灰度图像进行压缩。

$$A=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 20 & 30 & 40 & 50\\ 30 & 40 & 50 & 60\\ 40 & 50 & 60 & 70\end{bmatrix}.$$

具体压缩步骤如下：

步骤 1 利用 SVD 对图像矩阵A进行分解，得到

$$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}},$$

其中，

$$U=\begin{bmatrix}-0.191 & -0.502 & 0.837 & 0.117\\ -0.352 & -0.574 & -0.487 & 0.511\\ -0.512 & -0.279 & -0.182 & -0.801\\ -0.759 & 0.528 & -0.221 & 0.222\end{bmatrix},\Sigma=\begin{bmatrix}174.64 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 14.06 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$V^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-0.267 & -0.429 & -0.591 & -0.753\\ 0.737 & 0.280 & -0.177 & -0.536\\ -0.471 & 0.801 & -0.304 & -0.162\\ 0.413 & -0.244 & -0.731 & 0.487\end{bmatrix}.$$

步骤 2 选择保留的奇异值数量k，奇异值的大小代表了对应奇异向量的重要性，Σ中第一个奇异值(174.64)远大于其他奇异值，它包含了矩阵的大部分信息，假设选择保留前k个奇异值来压缩图像：

- 当$k=1$时，保留第一个奇异值及对应的奇异向量；
- 当$k=2$时，保留前两个奇异值及对应的奇异向量；
- 当$k=4$时，保留所有奇异值(无压缩)。

步骤 3 用保留的奇异值重构图像：

- 情况 1 当$k=1$时，对图像进行高压缩率的压缩，此时取U的第一列U_1、Σ的第一个奇异值Σ_1和V^{T}的第一行V_1^{T}，得到重构的图像矩阵

$$A_1=U_1\Sigma_1V_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}9.1 & 14.6 & 20.1 & 25.6\\ 16.4 & 26.4 & 36.4 & 46.4\\ 23.7 & 38.2 & 52.7 & 67.2\\ 35.5 & 57.2 & 78.9 & 100.6\end{bmatrix}.$$

- 情况 2 当 $k=2$ 时，对图像进行中等压缩率的压缩，此时取 U 的前两列 U_2、Σ 的前 2 个奇异值 Σ_2 和 V^{T} 的前两行 V_2^{T}，得到重构的图像矩阵

$$A_2=U_2\Sigma_2V_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}10.0 & 20.0 & 30.0 & 40.0\\ 20.0 & 30.0 & 40.0 & 50.0\\ 30.0 & 40.0 & 50.0 & 60.0\\ 40.0 & 50.0 & 60.0 & 70.0\end{bmatrix}.$$

步骤 4 对比原始图像和重构图像，当 $k=1$ 时，重构图像 A_1 与原始图像 A 有一定差异，但大致保留了图像的渐变趋势。当 $k=2$ 时，重构图像 A_2 与原始图像 A 完全一致(因为矩阵 A 的秩为 2)。

步骤 5 计算压缩率，原始图像储存大小为 $4\times4=16$，当 $k=1$ 时压缩后储存大小为 $4+1+4=9$，压缩率为 $(16-9)/16=43.75\%$；当 $k=2$ 时压缩后储存大小为 $4\times2+2+4\times2=18$，压缩率为 $(16-18)/16=-12.5\%$，储存空间反而变大了，主要原因是图像矩阵的维度太小导致的，说明对于维度太小的图像，可能不需要进行压缩储存。

这个例子说明可以通过保留最重要的奇异值和奇异向量，用更少的储存空间来近似原始图像。在实际应用中，对于大型图像矩阵，SVD 压缩可以利用奇异值(即特征值)的重要性差异进行图像信息的删减从而得到近似矩阵，显著减少储存空间，保留较好的图像质量。虽然 SVD 压缩经常用于处理图像压缩问题，但是 SVD 压缩对于包含大量高频信息的图像(如复杂纹理)效果就不是很好，对于这类图像需要用深度网络进行压缩。通过这个案例的讲解，帮助计算机视觉相关的研究生更好地理解数学理论与应用的结合，这种案例教学方式贴合江苏省研究生学位和研究生教育改革的要求。

3.2. 基于协方差矩阵特征值分解的图像特征提取和数据降维

基于协方差矩阵的特征值分解进行特征提取，核心思想是主成分分析(PCA)，假设用一个 $m\times n$ 的矩阵 A 表示一个灰度图像，其中 A_{ij} 代表图像中第 i 行第 j 列的灰度值(0~255)。图像矩阵可以看成是一个包含 m 个样本的数据集，每个样本的维度是 n。在应用 PCA 之前，通常需要对数据进行预处理，常见的预处理步骤包括：中心化：将每个特征(即图像的每个像素)的均值减去，使得每个特征的均值为 0。这可以消除数据中的平移影响。标准化：将每个特征的标准差归一化为 1。这可以消除数据中的尺度影响。在人脸图像的 PCA 中，通常只需要进行中心化处理，而不需要进行标准化处理，因为图像的像素值已经在一个相对固定的范围内(0~255)。

对于大小为 $m\times n$ 的图像数据矩阵 A，经过中心化处理后的数据矩阵为 X，其协方差矩阵 $C=\frac{1}{m-1}A^{\mathrm{T}}A$，描述了不同特征之间的相关性，对角线上的元素 C_{ii} 是第 i 个特征的方差，非对角线上的元素 C_{ij} 是第 i 个特征和第 j 个特征之间的协方差。对协方差矩阵 C 进行特征值分解，可以得到：

$$C=P\Lambda P^{\mathrm{T}},$$

其中，P 是一个 $n\times n$ 的正交矩阵，其列向量是协方差矩阵 C 的特征向量；Λ 是一个 $n\times n$ 的对角矩阵，其对角线上的元素是协方差矩阵 C 的特征值，一般按照从大到小的顺序排列。

对于数据矩阵来说，特征值大小直接衡量了数据在该特征向量方向上的方差大小，而方差越大，代表该方向包含的信息越多。因此，图像的协方差矩阵分解后的特征向量可以视为图像的主成分，代表了图像中最主要的纹理和结构模式。我们可以选择前 k 个最大的特征值对应的特征向量，构成一个新的矩阵 $P_k(n\times k)$。然后将数据矩阵 X 投影到这个新的 k 维空间中，得到降维后的数据 $Y=XP_k$，新的数据 Y 保留了数据矩阵的重要信息，同时将维度从 n 降到 k。下面以一张模拟的 3×3 微型人脸图像为例来展示图像特征提取和数据降维的效果。

实例 4 利用协方差矩阵特征值分解来提取一个人脸灰度图像 A 的特征，其中，$A=\begin{bmatrix}100 & 120 & 110\\150 & 170 & 160\\130 & 150 & 140\end{bmatrix}$。

具体特征提取步骤如下：

步骤 1 对图像数据进行中心化，计算每列均值：$\mu=[126.67\quad 146.67\quad 136.67]$，中心化后的数据矩阵 $X=\begin{bmatrix}-26.67 & -26.67 & -26.67\\23.33 & 23.33 & 23.33\\3.33 & 3.33 & 3.33\end{bmatrix}$。

步骤 2 通过如下公式计算协方差矩阵 C。

$$C=\frac{1}{3-1}X^{\mathrm{T}}X=\begin{bmatrix}788.89 & 788.89 & 788.89\\788.89 & 788.89 & 788.89\\788.89 & 788.89 & 788.89\end{bmatrix}.$$

步骤 3 计算特征值和特征向量，协方差矩阵 C 的特征值：$\lambda_1=2366.67,\lambda_2=0,\lambda_3=0$。对应的单位正交化特征向量：

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}0.577\\0.577\\0.577\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0.816\\-0.408\\-0.408\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\0.707\\-0.707\end{bmatrix}.$$

步骤 4 选择主成分，对于该人脸图像，选择 $k=1$，只保留最大的特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1$。

步骤 5 对图像进行特征提取，通过 PCA 得到的特征向量为 $v^{\mathrm{T}}=Y=XP_k=\begin{bmatrix}-46.166\\40.384\\5.764\end{bmatrix}$，图像数据矩阵降维后的矩阵是 Y。

上述简单微型图像的例子只是为了展示 PCA 特征提取和数据降维过程，在实际应用中，对于单张人脸灰度图像：将图像分割成多个重叠或不重叠的局部块(例如 8×8 的图像块)；每块展平成一个向量(当作一个样本)，所有向量组成一个数据矩阵；在这个数据矩阵上进行 PCA 得到主成分，将每个原始的图像块向量投影到主成分空间，得到一个低维的特征向量；将所有块的低维特征向量按照其在图像中的位置顺序拼接起来，就得到了该图像的特征向量。每张图像经过 PCA 降维后的特征向量可直接用于人脸识别、身份核验等实际场景。虽然 PCA 能够进行数据特征提取和数据降维，但是 PCA 作为一种线性降维方法，对于非线性结构的数据则无能为力。

4. 结论

通过上述四个实例的探讨，我们发现矩阵的特征值及特征向量在矩阵的幂运算高效求解和线性微分方程组的求解，图像压缩与特征提取，数据降维都有重要的应用价值。通过具体的实例，让学生了解到“矩阵的特征值及特征向量”不再是抽象符号，而是解决实际问题的“工具”，提高了学生学习“矩阵的特征值及特征向量”这一概念的兴趣和应用能力。这种案例教学法不仅能够帮助本科生学习线性代数的知识，还能帮助计算机视觉方向的研究生从算法底层层面理解算法，比较贴合研究生学位和研究生教育教学改革的新要求。

基金项目

本文为江苏省学位与研究生教育教学改革课题重点课题“适应区域经济社会发展需求的学科设置优

化机制研究——基于教育强国战略下的省域实践探索”(JGKT_B049)阶段性成果。

参考文献

[1] 李俊, 周文. 可对角化矩阵的应用[J]. 数学学习与研究, 2020(5): 16-17.

[2] 蒋卓芸, 夏雪. 奇异值分解及其简单应用[J]. 成都大学学报(自然科学版), 2015, 34(4): 364-366+370.

[3] 张文丽, 万晓娟, 杨静雅. 矩阵特征值和特征向量在微分方程求解中的应用[J]. 长治学院学报, 2024, 41(5): 7-15.

[4] Shlens, J. (2014) A Tutorial on Principal Component Analysis. arXiv:1404.1100

[5] 相林, 侯潮, 孙敏. 基于图像内容的常见蔬菜病害诊治研究[J]. 淮阴工学院学报, 2016, 25(3): 1-5.

[6] 张超群. 基于主成分分析法的人脸识别算法研究[J]. 电脑编程技巧与维护, 2020(7): 111-115.

[7] 徐肖亮, 邓燕妮. 基于改进 PCA 算法的人脸识别研究[J]. 科学技术创新, 2019(9): 68-70.

[8] Belkin, M. and Niyogi, P. (2003) Laplacian Eigenmaps for Dimensionality Reduction and Data Representation. *Neural Computation*, **15**, 1373-1396. https://doi.org/10.1162/089976603321780317

[9] 刘文博, 梁盛楠, 董小刚. 基于 t 类加权核函数的主成分分析维度约简算法[J]. 统计与决策, 2022, 38(9): 52-56.

[10] 吴温博, 金文标. 基于主成分分析的高光谱图像降维[J]. 内蒙古科技与经济, 2018(22): 66-67.

[11] 周泽文, 凌玲, 李立. 含有多种阻尼模型的机械系统的物理子空间特征值降维求解方法[J]. 振动与冲击, 2025, 44(14): 187-197+236.

[12] 王彦普, 赵璇. 线性代数特征值问题在结构工程稳定性分析中的应用[C]//中国企业文化促进会职业教育专业委员会. 数字化背景下建筑企业生产与企业文化融合式发展论坛论文集. 西安: 西安明德理工学院, 2025: 138-141.

[13] 杨宇, 程健, 彭晓燕, 等. 一种基于改进辛几何模态分解的复合故障诊断方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2020, 47(2): 53-59.

[14] 李赫, 樊新海, 王战军, 等. 主分量分析方法及其在信号去噪中的应用[J]. 国外电子测量技术, 2010, 29(12): 70-72+84.