

脉冲图像去噪的BregmanDC算法

葛家豪

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月19日

摘要

针对脉冲图像去噪的非凸模型求解困难的问题, 本文提出了一种基于Bregman距离的DC算法, 简称BregmanDC算法。非凸模型虽能更准确地刻画图像先验, 但在求解时面临计算复杂度高、收敛缓慢且极易陷入局部极小值等挑战。为此, 本文在Difference of Convex (DC) 规划框架下巧妙引入Bregman距离, 有效改善了子问题的适定性, 将其转化为更易处理的凸优化问题, 同时指出, 经典的DCA算法仅为本文提出的BregmanDC算法的一个特例。进一步地, 针对求解过程中的非光滑子问题, 本文利用凸共轭的性质, 设计了基于对偶的增广拉格朗日算法以实现快速且稳定的求解。数值实验验证了算法的有效性, 结果表明在不同强度的椒盐噪声影响下, BregmanDC算法的表现优于基准算法。

关键词

脉冲图像去噪, Bregman距离, Difference of Convex规划, 凸共轭

The BregmanDC Algorithm for Impulse Image Denoising

Jiahao Ge

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

To address the difficulty of solving non-convex models for impulse image denoising, this paper proposes a Difference-of-Convex (DC) algorithm based on the Bregman distance, abbreviated as the BregmanDC algorithm. Although non-convex models can more accurately characterize image priors, optimizing them presents significant challenges, including high computational complexity, slow convergence, and a high susceptibility to getting trapped in local minima. To overcome these, we ingeniously introduce the Bregman distance into the DC programming framework. This effectively improves

the well-posedness of the subproblems, transforming them into more tractable convex optimization problems. Furthermore, we demonstrate that the classical DCA is merely a special case of our proposed BregmanDC algorithm. Additionally, to address the non-smooth subproblems encountered during the solution process, we leverage the properties of convex conjugation to design a dual-based augmented Lagrangian algorithm, achieving fast and stable resolutions. Numerical experiments validate the effectiveness of the proposed algorithm. The results demonstrate that, under varying intensities of salt-and-pepper noise, the BregmanDC algorithm consistently outperforms the baseline algorithms.

Keywords

Impulse Image Denoising, Bregman Distance, Difference of Convex Programming, Convex Conjugate

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 研究背景与意义

图像恢复作为数字图像处理与计算机视觉领域中一个经典的反问题[1], 一直扮演着至关重要的角色。具体而言, 如何恢复受噪声污染的图像是图像恢复的核心目标。在数学上, 图像退化模型可表示为 $f = N_{\text{imp}}(Ku)$, 其中 $f \in \mathbb{R}^m$ 为受损图像, N_{imp} 表示由脉冲噪声引起的退化, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 代表算子, $u \in \mathbb{R}^n$ 为原始图像。图像恢复的目标就是从上述模型中求解得到 u 。

脉冲噪声是由于图像采集时的硬件存储故障或通信信道的传输错误产生, 这类噪声的主要特点是仅随机污染图像中的部分像素点, 而其余像素则保持原始观测值不变。中值滤波[2]是去除脉冲去噪的一个经典算法, 因其高效稳定而成为早期的主流算法。但是传统的中值滤波在平滑噪声的同时, 极易导致图像边缘模糊与纹理细节的严重丢失。为了在滤除噪声与保持边缘之间取得更好的平衡, 基于变分法的图像恢复技术应运而生[3]。该类方法将图像去噪转化为一个能量泛函的最小化问题, 通过求解该目标函数来恢复原始干净图像 u 。该最小化问题的能量函数由数据保真项和正则化项共同构成[4]。

数据保真项通常取决于噪声类型, 对于高斯噪声, 通常用 ℓ_2 范数。对于非高斯噪声, 通常会选取 ℓ_1 范数, 然而, 从统计学角度来看, ℓ_1 范数会导致有偏估计。特别是在面对高强度脉冲噪声时, 基于 ℓ_1 范数的数据保真项往往表现不佳。正则化项与图像的先验知识密切相关, 这些都是图像中重要的信息与结构。该项的一般形式是势函数与梯度算子的组合。最经典的例子是 Tikhonov 正则化[5], 其函数是二次且平滑的。它可以使平滑优化方法轻松地进行最小化求解。然而, 这种正则化函数往往会过度平滑图像的边缘和纹理细节。为了克服这一缺陷, 文献[3]提出了全变分(TV)正则化, 并已被证明取得了巨大的成功。TV 项由 ℓ_1 范数和梯度算子组成。它不仅能够刻画图像的梯度稀疏性, 还具备优良的边缘保持能力。尽管 TV 正则化在保持图像边缘方面取得了显著成功, 但在处理包含丰富细节的图像或遭遇强脉冲噪声时, 其局限性日益凸显。TV 模型强烈的偏好分块常数解, 极易在平滑过渡区域引发阶梯效应[6]; 同时, 其线性惩罚机制会导致图像对比度下降与微小纹理丢失。在过去的二十年里, 学者们对 TV 模型的一些变体也进行了深入研究[7]。

尽管这些凸优化模型具备计算效率高, 较易求解的好处, 但是凸模型已经无法满足对高质量图像细节恢复的严苛要求。为此, 研究者们提出了更为复杂且精细的非凸模型来更准确地刻画图像先验。然而, 这类模型往往伴随着高度的非线性与非平滑性, 在求解时面临着巨大的挑战: 这类问题不仅计算复杂度极高、收敛速度缓慢, 而且极易陷入局部极小值。这些优化计算上的瓶颈, 严重限制了这类模型在实际工程中的应用。故对非凸模型开发一种普适且高效的求解框架是当前领域的当前该领域迫切需要解决的核心课题。

1.2. 研究现状

通过结合 TV 正则化与 ℓ_1 范数数据拟合项, 文献[4]提出了用于去除脉冲噪声的 TVL1 模型。为了求解 TVL1 优化问题, 研究者们设计了一些高效的算法, 包括交替方向乘法[8]以及原始-对偶方法[9]。Nikolova 等人[10]提出了一种将 ℓ_1 范数数据拟合与非凸正则化项相结合的模式。非凸正则化项为恢复高质量图像提供了更多可能性。Gu 等人[11]采用 TV 作为正则化项、平滑剪裁绝对偏差(Smooth Clipped Absolution Deviation, SCAD)作为数据拟合函数, 引入了一种名为 TVSCAD 的新模型。该非凸模型能够取得比 TVL1 更好的性能, 并且设计了凸差(Difference-of-Convex, DC)函数算法对其进行求解。Zhang 等人[12]提出了一种简单的优化模型, 该模型使用非凸对数函数作为数据拟合项并结合了 TV 正则化。与 TVSCAD 相比, 该模型更容易进行标量参数的选择。他们还开发了一种带有自适应近端参数的新型 DC 算法。Zhang 等人[13]引入了一些带有非凸势函数的非凸 TV 模型, 并给出了一种近端线性化极小化算法。Yuan 和 Ghanem [14]提出了一种稀疏优化方法, 将 TV 正则化与 ℓ_0 范数数据保真项应用于脉冲噪声去除。为了求解这一非凸优化模型, 作者将该问题重新表述为具有均衡约束的数学规划问题。最近, Li 等人[15]提出了一种非凸稀疏保真项和 TV 正则化项的模式。

然而, 这些性能优异的非凸正则化项也给模型的优化求解带来了巨大的挑战。传统的优化算法在求解此类非凸非平滑问题时常常面临子问题难以精确求解、整体迭代效率低下的瓶颈。在现有的求解非凸问题的有效策略中, Difference-of-Convex (DC)规划就是一个通用且强大的框架, 它的主要思想就是将原本的非凸能量函数分解为两个凸函数的差。求解 DC 问题的经典算法就是 DCA, 但是由于对凸分量性质要求严格, 在实际求解中常常因为子问题的凸性较弱限制了算法的整体计算效率与收敛精度。

2. 预备知识

2.1. Difference-of-Convex 规划

作为处理非凸优化模型的强大数学框架, Difference-of-Convex (DC)规划在于构造两个凸函数 $g(x)$ 和 $h(x)$, 并将原复杂目标函数等价重构为两者的差值, 即

$$\min_x F(x) := g(x) - h(x), \quad (1)$$

根据 Hartman 等人[16]的理论, 该分解形式具备极其广泛的适用性, 涵盖了所有二次连续可微(C^2)函数。近年来, 得益于这种灵活且普遍的结构, 该规划方法在机器学习[17]、稀疏信号重建[18]以及图像恢复[19]等工程挑战中展现出了卓越的求解能力。

针对此类 DC 规划, 经典的求解框架为 DCA [20]。其核心思想是通过凹分量 $-h(x)$ 进行局部线性逼近, 将原非凸问题松弛为一系列依序求解的凸优化子问题。其标准迭代格式如下:

$$x^{k+1} = \arg \min_x \left\{ g(x) - \langle \partial h(x^k), x \rangle \right\}.$$

其中 $\partial h(x^k)$ 表示凸函数 h 在 x^k 处的次梯度(若 h 可微, 则退化为常规梯度 $\nabla h(x^k)$)。

尽管标准 DCA 具有良好的下降性质, 但其每次迭代均需精确最小化包含 $g(x)$ 的目标函数。当 $g(x)$

的凸性较弱时, 该子问题的求解往往面临适定性不足或难以高效计算的困难。为了克服这一瓶颈, Gotoh 等人[21]通过在子问题中引入二次邻近项, 提出了邻近 DC 算法(pDCA)。

2.2. Bregman 距离

Bregman 距离提供了一种度量两点间“距离”的方法。它利用凸函数的几何性质来定义差异, 而非简单的直线距离。对于连续可微的凸函数 h 的 Bregman 距离 $D_h(x, y)$, 定义为函数 h 在点 x 处的实际值与它在点 y 处的一阶泰勒近似值之间的差。

定义 2.1 设 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个连续可微的连续凸函数, 对于任意的 $x, y \in \text{dom}h$, Bregman 距离 $D_h(x, y)$ 定义为

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle,$$

对于非光滑函数 h , 用它的次梯度代替梯度。

2.3. 凸共轭

定义 2.2 假设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 函数的共轭函数, 记为 $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle y, x \rangle - f(x) \},$$

这个变换也被称为 Legendre-Fenchel 变换。

共轭函数在凸分析中具有诸多重要的理论性质。本文的算法推导主要基于以下关键性质: 若给定函数为闭凸函数, 则其二次共轭函数(即共轭函数的共轭)与其自身等价, 即为 $f^{**} = f$ 。

3. 基于 Bregman 距离的 DC 算法的脉冲图像去噪模型求解

本节针对脉冲噪声图像去噪问题, 构造一种基于 Bregman 距离的邻近 DC 算法。

3.1. 图像去噪的 DC 分解

考虑脉冲图像去噪的模型如下:

$$\min_u \sum_i \Psi(|u_i - f_i|) + \lambda \|\nabla u\|_1, \quad (2)$$

其中 $u \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示待恢复图像的向量化形式, f 表示观测图像, Ψ 是促进稀疏的函数, $\lambda > 0$ 是正则化参数, $\|\nabla u\|_1$ 为全变分正则项, 用于保持图像边缘与结构信息。

与文献[22]中关于非凸稀疏逼近函数的处理思想一样, 本文采用定义在 $(0, +\infty]$ 的光滑凹函数 g 来近似 Ψ , 从而将上述模型改写为

$$\min_u \sum_i g(|u_i - f_i|) + \lambda \|\nabla u\|_1. \quad (3)$$

由于 g 是凹函数, 上式中的数据保真项是非凸的, 因此原问题属于非凸非光滑优化问题。为构造适合 DC 算法求解的模型, 记

$$h(x) := -g(|x|),$$

若 g 在 $(0, +\infty]$ 上为凹且单调不减, 则函数 h 可视为是关于绝对值项 $|x|$ 的凸函数。于是原目标函数可等价地写为

$$F(u) = \lambda \|\nabla u\|_1 - \left[-\sum_i g(|u_i - f_i|) \right],$$

这样,原图像去噪模型被重写为一个典型 DC 问题。该分解保留了非凸稀疏数据项的复合结构,避免了对 $g(|x|)$ 作过度光滑化处理,同时也为后续构造基于 Bregman 距离的邻近 DC 迭代格式提供了基础。

3.2. 基于 Bregman 距离的 DC 算法

本节针对具有挑战性的非凸 DC 问题(1),基于带有特定 Bregman 距离的凸近端优化框架,提出一种新颖的优化算法。用于求解非凸 DC 问题(1)的算法核心是 Bregman 邻近 DC 映射 $\phi_\mu(x)$ 。对于任意给定的点 x 和参数 $\mu > 0$,该映射定义为以下优化子问题的解:

$$\phi_\mu(x) := \arg \min_u \{g(u) - h(u) + \mu D_h(u, x)\}. \quad (4)$$

通过代入 Bregman 距离的定义,可以将目标映射(4)展开并化简,得到其等价形式:

$$\phi_\mu(x) := \arg \min_u \{g(u) + (\mu - 1)h(u) - \mu \langle \nabla h(x), u \rangle\}, \quad (5)$$

进一步地,若 h 为非光滑函数,梯度 ∇h 应替换为次梯度 $\xi \in \partial h$ 。值得指出的是,当 $\mu > 1$ 时,由于子问题(5)的目标函数为多个凸函数相加而构成,因此该子问题本质上仍是一个凸优化问题,易于有效求解。特别的,当 $\mu = 1$ 的特例中,基于子问题(5)的迭代更新(即 $x^{k+1} = \Psi_\mu(x^k)$)直接退化为 DCA 的标准格式。因此, DCA 可视为本文提出的基于 Bregman 距离 DC 算法(BDCA)的一个特例。BDCA 算法的第 k 次迭代的更新如下:

$$x^{k+1} = \arg \min_x \{g(x) + (\mu - 1)h(x) - \mu \langle \nabla h(x^{k+1}), x \rangle\}. \quad (6)$$

故利用 BregmanDC 算法求解去噪模型(3),可以得到下面的子问题:

$$u^{k+1} \in \arg \min_u \left\{ \lambda \|\nabla u\| + (\mu - 1) \sum_i [-g(|u_i - f_i|)] + \mu \sum_i \langle \nabla g(|u_i^k - f_i|), |u_i - f_i| \rangle \right\}, \quad (7)$$

其中, $\mu \geq 1$ 为算法参数。该子问题仍然包含非光滑项,因此需要进一步借助凸优化方法进行求解。

3.3. 基于共轭对偶与增广拉格朗日的子问题求解

为了有效求解子问题(7),首先给出函数 $-g$ 的共轭表示 $-g(v) = \max_{q \in \mathbb{R}} \{\langle q, v \rangle + g^*(q)\}$,其中 $g^*(q)$ 是函数 g 的共轭函数。故用 $|u_i - f_i|$ 代入 $g(v)$,通过共轭的定义可以得到

$$-g(|u_i - f_i|) = \max_{q_i \in \mathbb{R}} \{\langle q_i, |u_i - f_i| \rangle + g^*(q_i)\}, \quad (8)$$

于是子问题(7)可以等价改写为

$$\max_q \min_u \left\{ \lambda \|\nabla u\| + (\mu - 1) \sum_i [\langle q_i, |u_i - f_i| \rangle + g^*(q_i)] + \mu \sum_i \langle \nabla g(|u_i^k - f_i|), |u_i - f_i| \rangle \right\}. \quad (9)$$

据此,可采用两阶段交替迭代策略进行求解。

第一步,在固定 u^k 的条件下,对每个 q_i^k 进行更新:

$$q_i^{k+1} = \arg \max_{q_i} \left\{ \langle q_i, |u_i^k - f_i| \rangle + g^*(q_i) \right\}, \quad (10)$$

第二步,在固定 q^{k+1} 后,求解每个 u 子问题:

$$u^{k+1} = \left\{ \lambda \|\nabla u\| + (\mu - 1) \sum_i [\langle q_i^{k+1}, |u_i - f_i| \rangle + g^*(q_i^{k+1})] + \mu \sum_i \langle \nabla g(|u_i^k - f_i|), |u_i - f_i| \rangle \right\}. \quad (11)$$

若 g 连续可微,则子问题(10)可得闭式解:

$$q_i^{k+1} = -(\nabla g^*)^{-1}(|u_i^k - f_i|),$$

因此, 算法的主要计算量集中在 u 子问题(11)的求解上。

为此, 为解决 u 子问题, 本文利用原始对偶法求解。首先要利用如下共轭表示:

$$\lambda \|\nabla u\|_1 = \max_{p_i \in [-\lambda, \lambda]} -\langle u, \text{Div } p \rangle \quad (12)$$

$$(\mu - 1) \langle q_i, |u_i - f_i| \rangle = \max_{w_i \in [-(\mu-1)q_i^k, (\mu-1)q_i^k]} \langle w_i, u_i - f_i \rangle \quad (13)$$

$$\mu \langle \nabla g(|u_i^k - f_i|), |u_i - f_i| \rangle = \max_{t_i \in [-\mu v^k, \mu v^k]} \langle t_i, u_i - f_i \rangle \quad (14)$$

其中 $v^k = \nabla g(|u_i^k - f_i|)$, Div 表示离散散度算子, 它是离散梯度算子的负伴随算子。于是, u 子问题可进一步转化为如下原始 - 对偶形式:

$$\min_u \max_{\substack{w_i \in [-(\mu-1)q_i^k, (\mu-1)q_i^k] \\ t_i \in [-\mu v^k, \mu v^k]}} -\langle t + w, f \rangle + \langle t + w - \text{Div } p, u \rangle. \quad (15)$$

先对 u 求极小, 可得到与之等价的对偶问题:

$$\max_{\substack{w_i \in [-(\mu-1)q_i^k, (\mu-1)q_i^k] \\ t_i \in [-\mu v^k, \mu v^k]}} -\langle t + w, f \rangle, \quad (16)$$

$$\text{s.t. } t + w - \text{Div } p = 0.$$

此时, 原变量 u 可视为上述线性约束对应的拉格朗日乘子。相应的拉格朗日函数为

$$L(t, w, p, u) = -\langle t + w, f \rangle + \langle t + w - \text{Div } p, u \rangle.$$

为提高求解效率, 本文采用增广拉格朗日方法对上述约束对偶问题进行求解, 其增广拉格朗日函数定义为

$$L(t, w, p, u) = -\langle t + w, f \rangle + \langle t + w - \text{Div } p, u \rangle - \frac{\beta}{2} \|t + w - \text{Div } p\|_2^2,$$

其中, $\beta > 0$ 为惩罚参数。利用增广拉格朗日法求解问题(15), 在每次内层迭代中, 采用如下交替迭代格式求解:

1. 固定 u^k , p^k , w^k , 更新 t :

$$t^{k+1} := \arg \max_{t_i \in [-\mu v^k, \mu v^k]} L_\beta(t, w^k, p^k, u^k). \quad (17)$$

2. 固定 u^k , p^k , t^{k+1} , 更新 w :

$$w^{k+1} := \arg \max_{w_i \in [-(\mu-1)q_i^k, (\mu-1)q_i^k]} L_\beta(t^{k+1}, w, p^k, u^k). \quad (18)$$

3. 固定 u^k , w^{k+1} , t^{k+1} , 更新 p :

$$p^{k+1} := \arg \max_{\|p\|_\infty \leq \lambda} L_\beta(t^{k+1}, w^{k+1}, p, u^k). \quad (19)$$

4. 固定 p^{k+1} , w^{k+1} , t^{k+1} , 更新 u :

$$u^{k+1} := u^k - \beta(t^{k+1} + w^{k+1} - \text{Div } p^{k+1}).$$

上述 t 子问题(17), w 问题(18), p 子问题(19)都是非常标准的凸优化问题, 它们均可通过现有的凸优化算法或直接求得解析解, 故在此不再赘述其具体的求解过程。

4. 数值实验

4.1. 实验设置

在本节中，我们将通过数值实验来评估所提 BregmanDC 算法在图像去噪问题中的表现，并将其与 DCA 和 pDCA 算法进行对比分析。具体的实验设置如下：

图像生成：常用的纯净灰度测试图像如图所示。在模拟实验中，我们向这些图像中加入椒盐噪声(Salt-and-Pepper noise)，噪声水平从 20% 递增至 80%，步长为 30%。

稀疏函数与正则化参数：本文采用了三种稀疏近似函数： $g_1(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ， $g_2(x) = \frac{\ln(1 + \alpha x)}{\ln(1 + \alpha)}$ ， $g_3(x) = \min(\alpha x, 1)$ 。对于函数 g_1 、 g_2 和 g_3 ，相关的正则化参数与尺度参数分别被设置为 $(\lambda, \alpha) = (0.255, 1)$ 、 $(0.35, 1)$ 和 $(0.5, 1)$ 。

为保证对比的公平性，三种算法均从原点进行初始化，并采用如下的迭代终止准则：

内循环停机准则如下

$$\frac{\|u^t - u^{t-1}\|}{N} < 10^{-6}.$$

外循环停机准则如下

$$\frac{\|u^t - u^{t-1}\|}{N} + \frac{\|q^t - q^{t-1}\|}{N} < 10^{-6}.$$

其中， N 表示图像的总像素数。此外，我们采用峰值信噪比(PSNR)和结构相似性指数(SSIM)作为图像恢复质量的定量评价指标：

$$\text{PSNR}(u, u_0) := 10 \log \left(\frac{\max(u_0^2)}{\text{MSE}} \right),$$

$$\text{SSIM}(u, u_0) := \frac{(2\bar{u}\bar{u}_0 + C_1) + (2\sigma_{uu_0} + C_2)}{(\bar{u}^2 + \bar{u}_0^2 + C_1) + (\sigma_u^2 + \sigma_{u_0}^2 + C_2)}.$$

其中， u 和 u_0 分别表示恢复后的图像与原始图像 \bar{u} 、 \bar{u}_0 、 σ_u 、 σ_{u_0} 以及 σ_{uu_0} 分别代表图像 u 和 u_0 的局部均值、标准差和协方差； $C_1 = (k_1 L)^2$ 与 $C_2 = (k_2 L)^2$ 为常数，用于防止公式分母为零。在图 1 中展示了实验中所用到的测试图片。

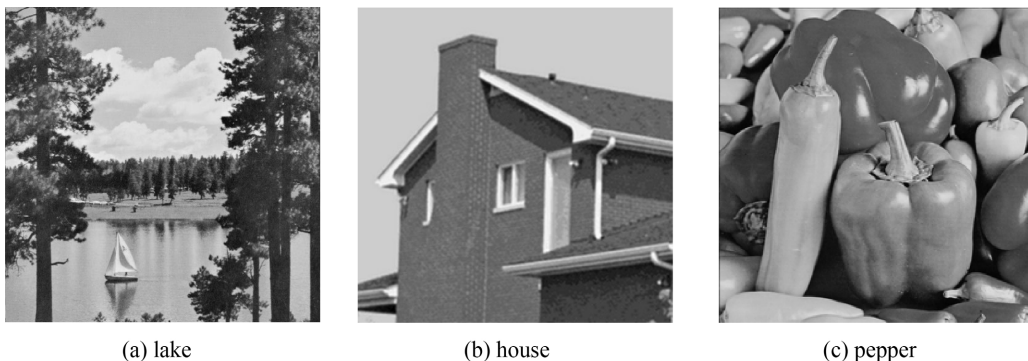


Figure 1. Test images
图 1. 测试图片

4.2. 实验结果

表 1~表 3 分别对比了测试图像在受到不同强度的椒盐噪声破坏后, 基于各正则化去噪模型的恢复效果, 其中基于 Bregman 距离的 DC 算法的参数设定为 $\mu = 1.1$ 。表中的各个算法数据从依次显示为: PSNR/SSIM/迭代次数。

三个表格数据显示, 在各个噪声强度的影响下, DCA 和 pDCA 算法相比, 本文提出的 BregmanDC 算法在 PSNR 和 SSIM 这两项指标均高于基准算法, 并且当正则化函数为 g_1 时, 迭代次数也少于基准算法。这表明本文提出的算法不仅能有效的去除噪声, 更在特定的条件下展现出高效的收敛速度。此外, 图 2 展示了 Lake 图片在 20% 噪声污染下不同算法的噪声恢复图片。图 2 表明, BregmanDC 算法在有效去除脉冲噪声的同时, 能够更好地保留图像的边缘和细节信息。

Table 1. Performance comparison of image denoising algorithms with g_1 regularization

表 1. 稀疏项为 g_1 的图像去噪结果对比

| 图片 | 噪声强度 | BregmanDC 算法 | DCA | pDCA |
|--------|------|------------------|------------------|------------------|
| Lake | 20 | 35.93/0.9651/181 | 34.62/0.9457/248 | 34.87/0.9489/201 |
| | 50 | 30.22/0.9016/254 | 29.46/0.8811/320 | 29.73/0.8846/273 |
| | 80 | 24.73/0.8019/372 | 24.06/0.7182/423 | 24.47/0.7284/390 |
| Lenna | 20 | 39.16/0.9754/182 | 37.97/0.9653/196 | 27.84/0.8038/384 |
| | 50 | 33.47/0.9271/251 | 32.74/0.9149/271 | 33.01/0.9183/268 |
| | 80 | 28.11/0.8175/365 | 27.52/0.7963/385 | 42.34/0.9889/201 |
| Pepper | 20 | 42.43/0.9890/200 | 42.27/0.9888/203 | 42.34/0.9889/201 |
| | 50 | 36.47/0.9647/280 | 36.23/0.9668/302 | 36.28/0.9642/285 |
| | 80 | 29.70/0.8867/406 | 29.18/0.8869/471 | 29.48/0.8833/420 |

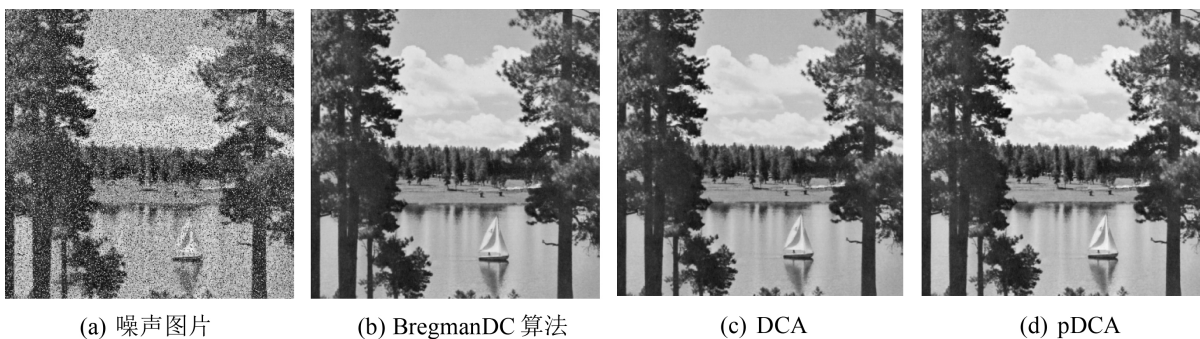
Table 2. Performance comparison of image denoising algorithms with g_2 regularization

表 2. 稀疏项为 g_2 的图像去噪结果对比

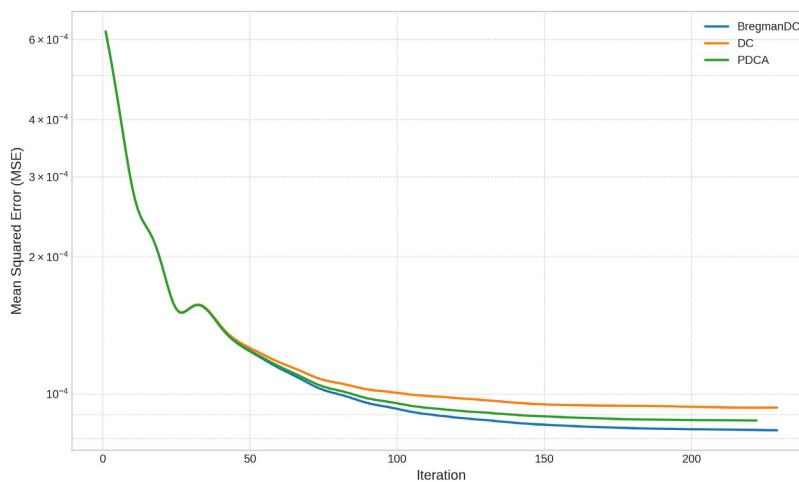
| 图片 | 噪声强度 | BregmanDC 算法 | DCA | pDCA |
|--------|------|------------------|------------------|------------------|
| Lake | 20 | 32.85/0.9140/213 | 31.57/0.8925/210 | 32.16/0.8981/195 |
| | 50 | 28.21/0.8363/312 | 27.30/0.8083/298 | 27.82/0.8182/284 |
| | 80 | 22.89/0.6517/482 | 22.24/0.6222/445 | 22.79/0.6369/424 |
| Lenna | 20 | 35.94/0.9410/215 | 34.58/0.9254/213 | 35.01/0.9275/199 |
| | 50 | 31.43/0.8837/306 | 30.61/0.8651/295 | 30.97/0.8709/285 |
| | 80 | 26.49/0.7535/470 | 25.83/0.7337/443 | 26.21/0.7377/421 |
| Pepper | 20 | 41.13/0.9850/231 | 40.58/0.9835/229 | 40.85/0.9841/229 |
| | 50 | 35.28/0.9542/343 | 34.47/0.9468/328 | 34.85/0.9483/326 |
| | 80 | 27.97/0.8524/532 | 27.15/0.8362/485 | 27.71/0.8420/483 |

Table 3. Performance comparison of image denoising algorithms with g_3 regularization**表 3.** 稀疏项为 g_3 的图像去噪结果对比

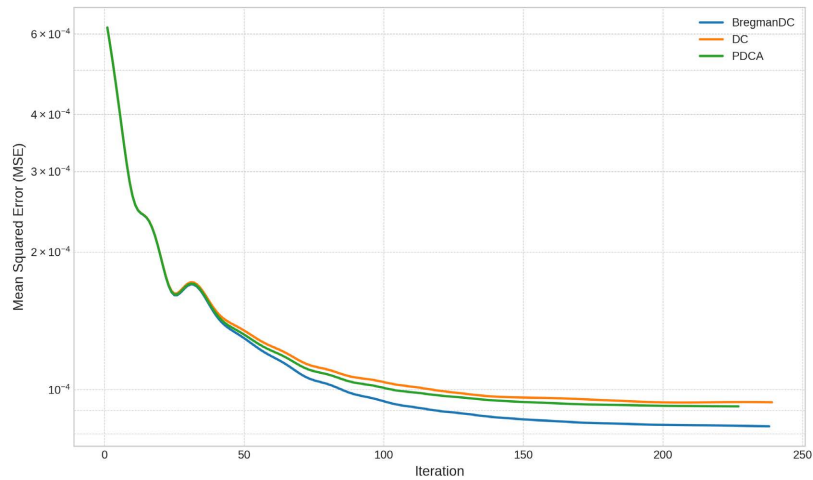
| 图片 | 噪声强度 | BregmanDC 算法 | DCA | pDCA |
|--------|------|------------------|------------------|------------------|
| Lake | 20 | 36.01/0.9651/201 | 34.18/0.9370/202 | 34.59/0.9413/190 |
| | 50 | 30.23/0.9023/294 | 29.08/0.8654/290 | 29.40/0.8715/275 |
| | 80 | 24.73/0.7507/447 | 23.67/0.6886/426 | 24.02/0.7018/409 |
| Lenna | 20 | 39.12/0.9742/201 | 37.34/0.9575/201 | 37.73/0.9602/196 |
| | 50 | 33.40/0.9275/289 | 32.28/0.9039/283 | 32.56/0.9073/274 |
| | 80 | 28.06/0.8147/432 | 27.14/0.7774/419 | 27.41/0.7848/408 |
| Pepper | 20 | 42.33/0.9883/216 | 42.05/0.9879/216 | 42.10/0.9879/216 |
| | 50 | 36.46/0.9641/317 | 35.97/0.9608/314 | 36.05/0.9608/312 |
| | 80 | 29.65/0.8865/493 | 28.81/0.8684/468 | 29.02/0.8699/462 |

**Figure 2.** Denoising results of different algorithms**图 2.** 不同算法的噪声恢复结果

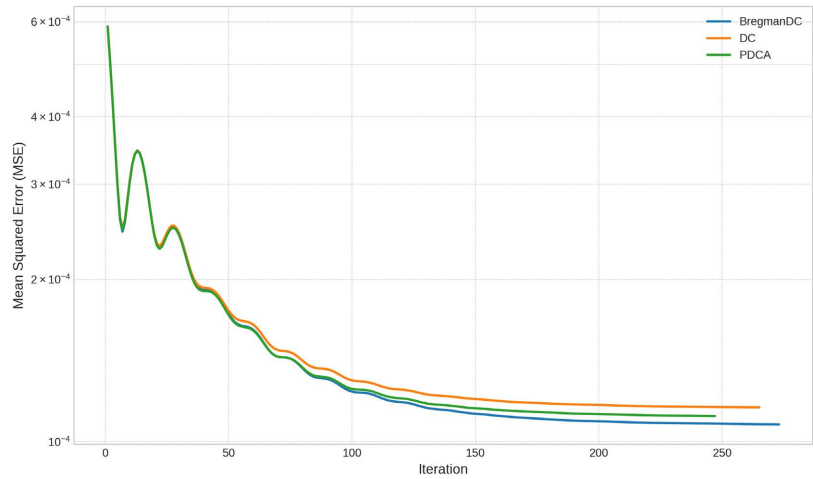
同时，图 3 还展示 BregmanDC 算法、DCA 和 pDCA 在不同正则化函数下收敛曲线。图不仅很好展示了 BregmanDC 的收敛效果，验证了算法的收敛性，还说明了与 DCA、pDCA 相比，Bregman 算法具有更快的收敛速度和更高精度的解。



(a) g1



(b) g2



(c) g3

Figure 3. Convergence curves of different algorithms under various regularization functions
图 3. 不同算法在不同稀疏函数的收敛曲线图

5. 总结

本研究针对脉冲图像去噪问题的求解挑战，提出了 BregmanDC 算法。与传统的 DC 算法相比，本文通过引入 Bregman 距离，构建了一个凸性更强，在某些情况更易求解的子问题。特别地，当 BregmanDC 算法的近端参数 $\mu=1$ 时，BregmanDC 算法退化为 DCA，这显示 DCA 仅为本文提出的 Bregman 算法的一个特例。进一步地，在求解非光滑子问题时，本文利用凸共轭的性质设计了基于对偶的增广拉格朗日算法，实现了子问题的快速求解。数值实验以一般化的稀疏脉冲图像去噪模型为例，通过三个不同的稀疏正则项，验证了 BregmanDC 算法的有效性。此外，与基准算法对比，BregmanDC 算法具有更好的恢复质量和求解速度。

本文贡献

为此，针对非凸稀疏数据项模型，本文在 DC 规划框架下，巧妙地引入了 Bregman 距离，提出了一种 BregmanDC 算法。通过合理构造基于 Bregman 距离的算法，BregmanDC 算法能够有效改善子问题的

适定性, 使其转化为更容易处理的凸优化问题, 显著提升了算法的整体收敛稳定性。进一步地, 针对 BregmanDC 算法求解非凸稀疏数据项模型的子问题, 本文设计了基于对偶的增广拉格朗日算法, 快速且稳定的求解了子问题。

参考文献

- [1] Jähne, B. (2005) Digital Image Processing. Springer.
- [2] Gallagher, N. and Wise, G. (2003) A Theoretical Analysis of the Properties of Median Filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **29**, 1136-1141. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1981.1163708>
- [3] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-f](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f)
- [4] Nikolova, M. (2004) A Variational Approach to Remove Outliers and Impulse Noise. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **20**, 99-120. <https://doi.org/10.1023/b:jmiv.0000011326.88682.e5>
- [5] Bell, J.B., Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y. (1978) Solutions of Ill-Posed Problems. *Mathematics of Computation*, **32**, 1320-1322. <https://doi.org/10.2307/2006360>
- [6] Nikolova, M. (2000) Local Strong Homogeneity of a Regularized Estimator. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **61**, 633-658. <https://doi.org/10.1137/s0036139997327794>
- [7] Bredies, K., Kunisch, K. and Pock, T. (2010) Total Generalized Variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **3**, 492-526. <https://doi.org/10.1137/090769521>
- [8] Yang, J., Zhang, Y. and Yin, W. (2009) An Efficient TVL1 Algorithm for Deblurring Multichannel Images Corrupted by Impulsive Noise. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 2842-2865. <https://doi.org/10.1137/080732894>
- [9] Chambolle, A. and Pock, T. (2011) A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **40**, 120-145. <https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>
- [10] Nikolova, M., Ng, M.K. and Tam, C. (2013) On ℓ_1 Data Fitting and Concave Regularization for Image Recovery. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **35**, A397-A430. <https://doi.org/10.1137/10080172x>
- [11] Gu, G., Jiang, S. and Yang, J. (2017) A TVSCAD Approach for Image Deblurring with Impulsive Noise. *Inverse Problems*, **33**, Article ID: 125008. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa9383>
- [12] Zhang, B., Zhu, G. and Zhu, Z. (2020) A TV-Log Nonconvex Approach for Image Deblurring with Impulsive Noise. *Signal Processing*, **174**, Article ID: 107631. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107631>
- [13] Zhang, X., Bai, M. and Ng, M.K. (2017) Nonconvex-TV Based Image Restoration with Impulse Noise Removal. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **10**, 1627-1667. <https://doi.org/10.1137/16m1076034>
- [14] Yuan, G. and Ghanem, B. (2019) TV: A Sparse Optimization Method for Impulse Noise Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 352-364. <https://doi.org/10.1109/tpami.2017.2783936>
- [15] Li, X., Yuan, J., Tai, X. and Liu, S. (2024) Efficient Convex Optimization for Non-Convex Non-Smooth Image Restoration. *Journal of Scientific Computing*, **99**, Article No. 57. <https://doi.org/10.1007/s10915-024-02504-6>
- [16] Hartman, P. (1959) On Functions Representable as a Difference of Convex Functions. *Pacific Journal of Mathematics*, **9**, 707-713. <https://doi.org/10.2140/pjm.1959.9.707>
- [17] Le Thi, H.A., Luu, H.P.H. and Dinh, T.P. (2024) Online Stochastic DCA with Applications to Principal Component Analysis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **35**, 7035-7047. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2022.3213558>
- [18] Pham, T.N., Dao, M.N., Amjady, N. and Shah, R. (2025) A Proximal Splitting Algorithm for Generalized DC Programming with Applications in Signal Recovery. *European Journal of Operational Research*, **326**, 42-53. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.04.034>
- [19] Zhang, B., Xue, L., Sun, S., et al. (2025) DC Programming and Algorithm for Nonconvex Log Total Variation Image Reconstruction. *Journal of Applied and Numerical Optimization*, **7**, 41-54. <https://doi.org/10.23952/jano.7.2025.1.03>
- [20] Tao, P.D. and An, L.T.H. (1997) Convex Analysis Approach to DC Programming: Theory, Algorithms and Applications. *Acta Mathematica Vietnamica*, **22**, 289-355.
- [21] Gotoh, J., Takeda, A. and Tono, K. (2018) DC Formulations and Algorithms for Sparse Optimization Problems. *Mathematical Programming*, **169**, 141-176. <https://doi.org/10.1007/s10107-017-1181-0>
- [22] Lanza, A., Morigi, S., Selesnick, I.W. and Sgallari, F. (2019) Sparsity-Inducing Nonconvex Nonseparable Regularization for Convex Image Processing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **12**, 1099-1134. <https://doi.org/10.1137/18m1199149>