Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 61-71**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155208

含各向异性非牛顿算子的双扩散对流方程组解的适定性

万玉欢

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2026年4月12日；录用日期：2026年5月6日；发布日期：2026年5月13日

摘　要

在光滑有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$中，考虑一类含各向异性非牛顿算子的双扩散对流方程组的初边值问题。首先用Galerkin方法构建近似解，接着利用能量法建立近似解的一致先验估计，最后借助紧性论证与单调性方法，证明弱解的存在性。

关键词

各向异性非牛顿算子，双扩散对流，弱解，存在性

Well-Posedness of Solutions for the Double-Diffusive Convection System with Anisotropic Non-Newtonian Operators

Yuhuan Wan

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun Jilin

Received: April 12, 2026; accepted: May 6, 2026; published: May 13, 2026

Abstract

We considered the initial-boundary value problem for a class of double-diffusive convection systems involving anisotropic non-Newtonian operators in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. We first constructed approximate solutions via the Galerkin method and established uniform a priori estimates by the energy method. Finally, we proved the existence of weak solutions using compactness arguments and the monotonicity method.

文章引用: 万玉欢. 含各向异性非牛顿算子的双扩散对流方程组解的适定性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 61-71.
DOI: 10.12677/aam.2026.155208

Keywords

Anisotropic Non-Newtonian Operators, Double-Diffusive Convection, Weak Solution, Existence

1. 引言

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一光滑有界区域，考虑如下各向异性非牛顿双扩散对流方程组的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u - \nu\sum_{i=1}^{3} D_i\left(\left|D_i u\right|^{q_i-2} D_i u\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \left(\beta_\theta\theta + \beta_\psi\psi\right)g + Q_1 & (x,t)\in Q_T, \\ \theta_t + (u\cdot\nabla)\theta - \alpha_1\Delta\theta = Q_2 & (x,t)\in Q_T, \\ \psi_t + (u\cdot\nabla)\psi - \alpha_2\Delta\psi = Q_3 & (x,t)\in Q_T, \\ \operatorname{div} u = 0 & (x,t)\in Q_T, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \psi|_{t=0} = \psi_0(x) & x\in\Omega, \\ u=0,\ \theta=0,\ \psi=0 & (x,t)\in\Gamma_T, \end{cases} \tag{1}$$

其中：$Q_T = \Omega\times[0,T]$，$\Gamma_T = \partial\Omega\times[0,T]$，$0<T<\infty$；未知向量函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 表示流体速度；θ 表示温度；ψ 表示浓度；P 表示压力；Q_1,Q_2,Q_3 和 g 为给定的源函数，$D_i u = (\partial_i u_1, \partial_i u_2, \partial_i u_3)$；指数 q_i 假定为常数，可取 $(1,\infty)$ 内的不同值；$\nu>0$ 表示运动黏性系数；ρ 表示平均密度；α_1 表示热传导系数；α_2 表示扩散系数；β_θ,β_ψ 为给定常数。

双扩散对流是由具不同扩散特性的两个标量场协同诱导产生的流体现象。其本质在于，两个标量场的扩散速度差异导致流体密度分布不均，进而引发对流运动，该类模型具有强耦合性与强非线性性。该现象广泛存在于地幔对流、复合材料、液晶流体等各向异性介质中，这类介质的黏性具有方向依赖性，经典各向同性牛顿黏性模型无法准确描述。因此，本文在双扩散对流框架下引入各向异性非牛顿黏性项，以刻画这类方向依赖的黏性行为，为地球物理、材料工程等领域的实际流动问题提供理论支撑。Chen 等[1]研究了有界区域内双扩散对流系统初边值问题的适定性。随后，他们[2]考虑了双扩散对流系统柯西问题的适定性，即解的存在性、唯一性和全局稳定性。基于上述，Chen 等[3]通过正则化逼近和紧性理论，证明了三维双扩散对流系统柯西问题弱解的全局存在性。除此之外，还有一些双扩散对流模型的其他问题的研究[4] [5]。

令 $\vec{q} := (q_1,q_2,q_3), 1<q_i<\infty, i\in\{1,2,3\}, q^+ := \max(q_1,q_2,q_3), q^- := \min(q_1,q_2,q_3)$。定义

$$L^{\vec{q}}(\Omega) = \left\{u \mid u\in L^{q_i}(\Omega), \forall\, i=1,2,3\right\},$$

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega) = \left\{u \mid u\in W^{1,1}(\Omega), D_i u\in L^{q_i}(\Omega), \forall\, i=1,2,3\right\},$$

分别赋予范数 $\|u\|_{L^{\vec{q}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3}\|u\|_{L^{q_i}(\Omega)}, \|u\|_{W^{1,\vec{q}}(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3}\|D_i u\|_{L^{q_i}(\Omega)}$。则其为 Banach 空间。

引理 1 [6]设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一具有充分光滑边界的有界开集。若 $\sum_{j=1}^{3} q_j^{-1} > 1$，则以下嵌入关系成立

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \qquad \forall\, s: 1\le s\le q_a^*, \tag{2}$$

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^s(\Omega), \qquad \forall\, s: 1\le s< q_a^*, \tag{3}$$

其中 $q_a^* = \max\left\{\bar{q}^*, q^+\right\}, \bar{q}^* = 3\Big/\left(\sum_{j=1}^{3} q_j^{-1} - 1\right)$。

注 1 由引理 1，本文假设 $q_i\ (i=1,2,3)$ 满足条件 $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 > 1$。

为引入本文所考虑的弱解概念，记 $\mathcal{V} := \left\{u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\right\}$。定义函数空间 $H := \mathcal{V}$ 在 $L^2(\Omega)$ 范数意义下的闭包；$V_q := \mathcal{V}$ 在 $W^{1,q}(\Omega)$ 范数意义下的闭包；$V_{\vec{q}} := \mathcal{V}$ 在 $W^{1,\vec{q}}(\Omega)$ 范数意义下的闭包。

考虑抛物型各向异性空间：

$$L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right) := \left\{u \mid u:[0,T] \to V_{\vec{q}}, u, \left|D_i u\right|^{q_i} \in L^1\left(Q_T\right), \forall\, i=1,2,3\right\},$$

赋予范数 $\|u\|_{L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)} = \|u\|_{L^1(Q_T)} + \sum_{i=1}^{3}\left\|D_i u\right\|_{L^{q_i}(Q_T)}$，则对有界区域 Ω 和有限时间 T，连续嵌入

$$L^{q^+}\left(0,T;V_{q^+}\right) \hookrightarrow L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right) \hookrightarrow L^{q^-}\left(0,T;V_{q^-}\right), \tag{4}$$

成立，空间 $L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$ 是可分且自反，用 $L^{\vec{q}'}\left(0,T;V_{\vec{q}}'\right)$ 表示其对偶空间，$V_{\vec{q}}'$ 表示 $V_{\vec{q}}$ 的对偶空间。

定义 1 假设 $Q_1 \in L^{\vec{q}'}\left(0,T;V_{\vec{q}}'\right)$，$Q_2, Q_3 \in L^2\left(0,T;H^{-1}\right)$，$g \in L^\infty\left(Q_T\right)$，$q_a^* \ge 2$，$q^- \ge 2$。称 (u,θ,ψ) 是问题(1)的弱解，如果

1. $u \in L^\infty\left(0,T;H\right) \cap L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right), \theta,\psi \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1\right)$；
2. $u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0, \psi(0) = \psi_0$；
3. 对 $\forall \varphi \in V_{\vec{q}} \cap L^\delta(\Omega), \phi \in H^1$ 以及 a.e. $t \in [0,T]$，有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u \cdot \varphi \mathrm{d}x + \nu \sum\limits_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|D_i u\right|^{q_i - 2} D_i u \cdot D_i \varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega \left[(u \cdot \nabla) u\right] \cdot \varphi \mathrm{d}x \\ \quad = \int_\Omega Q_1 \cdot \varphi \mathrm{d}x + \beta_\theta \int_\Omega \theta g \cdot \varphi \mathrm{d}x + \beta_\psi \int_\Omega \psi g \cdot \varphi \mathrm{d}x, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \theta \cdot \phi \mathrm{d}x + \int_\Omega \left[(u \cdot \nabla)\theta\right] \cdot \phi \mathrm{d}x + \alpha_1 \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega Q_2 \cdot \phi \mathrm{d}x, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \psi \cdot \phi \mathrm{d}x + \int_\Omega \left[(u \cdot \nabla)\psi\right] \cdot \phi \mathrm{d}x + \alpha_2 \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega Q_3 \cdot \phi \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{5}$$

其中 δ 由下述关系式确定

$$\frac{1}{q_a^*} + \frac{1}{q^-} + \frac{1}{\delta} = 1. \tag{6}$$

注 2 [7]压力项 P 未包含在弱解定义 1 中。事实上，若速度场 u 确定，则可由 Rham 定理唯一地恢复 P。因此，我们仅专注于证明未知速度场 u 的存在性。

注 3 在定义 1 中，$u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0, \psi(0) = \psi_0$ 在下列意义中成立：

$$\lim_{t \to 0^+}\int_\Omega u(t) \cdot \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega u_0 \cdot \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in V_{\vec{q}} \cap L^\delta(\Omega), \tag{7}$$

$$\lim_{t \to 0^+}\int_\Omega \theta(t) \cdot \phi \mathrm{d}x = \int_\Omega \theta_0 \cdot \phi \mathrm{d}x, \quad \lim_{t \to 0^+}\int_\Omega \psi(t) \cdot \phi \mathrm{d}x = \int_\Omega \psi_0 \cdot \phi \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in L^2(\Omega). \tag{8}$$

注 4 当 $u \in L^\infty\left(0,T;H\right) \cap L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$ 时，为确保定义 1 中的对流项 $\int_\Omega \left[(u \cdot \nabla) u\right] \cdot \varphi \mathrm{d}x$ 有意义，需要 $\varphi \in L^\delta(\Omega)$。然而若 $\delta \le q_a^*$，则仅需 $\varphi \in V_{\vec{q}}$，因此时嵌入关系 $V_{\vec{q}} \hookrightarrow L^\delta(\Omega)$ 成立。

注 5 如果记 $V := V_{\vec{q}} \cap L^\delta(\Omega)$，则当 $q_a^* \ge 2$，下述嵌入关系显然成立：

$$V \hookrightarrow V_{\vec{q}} \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V_{\vec{q}}' \hookrightarrow V'. \tag{9}$$

引理 2 [8]对 $u,v,w \in H_0^1$，定义 $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_i(x)\dfrac{\partial v_j(x)}{\partial x_i} w_j(x)\mathrm{d}x$。如果 $\operatorname{div} u = 0$，则

$b(u,v,w)=-b(u,w,v)$ 和 $b(u,v,v)=0$。

引理 3 [7]设 X，Y 为两个 Banach 空间，X 连续嵌入到 Y。若函数 $u\in L^{\infty}(0,T;X)$ 且 $u:[0,T]\to Y$ 是弱连续的，则 $u:[0,T]\to X$ 是弱连续的。

本文的主要结果如下：

定理 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 边界光滑的有界区域。假设 $u_0\in H$，$\theta_0,\psi_0\in L^2(\Omega)$，$Q_1\in L^{\bar{q}'}(0,T;V'_{\bar{q}})$，$Q_2,Q_3\in L^2(0,T;H^{-1})$，$g\in L^{\infty}(Q_T)$，若 $q^->2$ 和 $q_a^*\ge q^*$，则问题(1)至少存在一组弱解 (u,θ,ψ)，满足

$$u\in C_w([0,T];H)\cap L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}}),\qquad \theta,\psi\in C_w([0,T]L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1),$$

其中：

$$q^*=\begin{cases}2q^-(q^--1)\big/\left[(q^-+1)(q^--2)\right], & 2<q^-<3,\\ 2q^-\big/(q^--1), & q^-\ge 3;\end{cases}\tag{10}$$

$u\in C_w([0,T];X)$ 表示 $u:[0,T]\to X$ 是连续的。

2. 近似解的构造及先验估计

为选取 Galerkin 方法中的基底，定义空间 $\tilde{V}:=\mathcal{V}$ 在 $W^{3,2}(\Omega)$ 下的闭包，考虑特征值问题

$$\sum_{|k|=3}(D^k\varphi_j,D^kv)=\lambda_j(\varphi_j,v),\qquad \forall v\in\tilde{V}.\tag{11}$$

由文献[9]中的定理 4.11 可知，存在一族解 $\{\varphi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$，在 $\tilde{V}$ 中是正交的，且在 H 中是标准正交的。此外，取 $-\Delta$ 算子的特征函数族 $\{\phi_r\}_{r\in\mathbb{W}}$ 作为 $H^1(\Omega)$ 一组基。对给定的 $m\in\mathbb{N}$，记 $V^m=\operatorname{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$，$W^m=\operatorname{span}\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m\}$ 分别由 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$，$\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m\}$ 张成的空间。

寻求问题(5)如下形式的近似解：

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k^m(t)\varphi_k(x),\quad \theta^m(x,t)=\sum_{k=1}^m h_k^m(t)\phi_k(x),\quad \psi^m(x,t)=\sum_{k=1}^m d_k^m(t)\phi_k(x),$$

其中 $\varphi_k\in V^m,\phi_k\in W^m,k=1,2,\cdots,m$，系数 $c_k^m(t),h_k^m(t),d_k^m(t)$ 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega\frac{\partial u^m}{\partial t}\cdot\varphi_k\,\mathrm{d}x+\nu\sum_{i=1}^3\int_\Omega|D_iu^m|^{q_i-2}D_iu^m\cdot D_i\varphi_k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u^m\cdot\nabla)u^m\right]\cdot\varphi_k\,\mathrm{d}x\\ \displaystyle\quad=\int_\Omega Q_1\cdot\varphi_k\,\mathrm{d}x+\beta_\theta\int_\Omega\theta^m g\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\beta_\psi\int_\Omega\psi^m g\cdot\varphi_k\mathrm{d}x,\\ \displaystyle\int_\Omega\frac{\partial\theta^m}{\partial t}\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u^m\cdot\nabla)\theta^m\right]\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x+\alpha_1\int_\Omega\nabla\theta^m\cdot\nabla\phi_k\,\mathrm{d}x=\int_\Omega Q_2\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x,\\ \displaystyle\int_\Omega\frac{\partial\psi^m}{\partial t}\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u^m\cdot\nabla)\psi^m\right]\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x+\alpha_2\int_\Omega\nabla\psi^m\cdot\nabla\phi_k\,\mathrm{d}x=\int_\Omega Q_3\cdot\phi_k\,\mathrm{d}x,\end{cases}\tag{12}$$

并且当 $m\to\infty$ 时，有

$$u^m(0)=u_0^m\to u_0\text{ 于 }H;\theta^m(0)=\theta_0^m\to\theta_0,\ \psi^m(0)=\psi_0^m\to\psi_0\text{ 于 }L^2(\Omega).\tag{13}$$

由常微分方程组解的存在性定理，存在一个区间 $[0,T_m](0<T_m<T)$，使得问题(12)和(13)具有古典解 $c_k^m(t),h_k^m(t),d_k^m(t)\in C^1[0,T_m],k=1,2,\cdots,m$。结合一致估计并利用解的延拓定理可得 $T_m=T$。

接下来，在式(12)的两端分别乘以 $c_k^m(t),h_k^m(t),d_k^m(t)$，并对 k 从 1 到 m 求和，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^m\|_{L^2(\Omega)}^2+b(u^m,u^m,u^m)+\nu\sum_{i=1}^3\int_\Omega|D_iu^m|^{q_i}\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega Q_1\cdot u^m\mathrm{d}x+\beta_\theta\int_\Omega\theta^m gu^m\mathrm{d}x+\beta_\psi\int_\Omega\psi^m gu^m\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{14}$$

DOI: 10.12677/aam.2026.155208

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+b\left(u^m,\theta^m,\theta^m\right)+\alpha_1\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega Q_2\cdot\theta^m\mathrm{d}x, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+b\left(u^m,\psi^m,\psi^m\right)+\alpha_2\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega Q_3\cdot\psi^m\mathrm{d}x, \tag{16}$$

利用引理 2，Hölder 不等式和 Young 不等式，整理式(14)~(16)得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\nu\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\left|D_iu^m\right|^{q_i}\mathrm{d}x\\
&\le\left\|Q_1\right\|_{L^{\bar{q}'}(\Omega)}\left\|u^m\right\|_{L^{\bar{q}}(\Omega)}+\beta_\theta\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|g\right\|_\infty\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}+\beta_\psi\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|g\right\|_\infty\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i}+\sum_{i=1}^{3}2^{\frac{q_i}{q_i-1}}\left\|D_iQ_1\right\|_{L^{q_i'}(\Omega)}^{q_i'}\\
&\quad+\frac{1}{2}\beta_\theta\left\|g\right\|_\infty\left(\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{1}{2}\beta_\psi\left\|g\right\|_\infty\left(\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\left\|Q_2\right\|_{H^{-1}}\left\|\theta^m\right\|_{W^{1,2}}\le\frac{1}{4}\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|Q_2\right\|_{H^{-1}}^2, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_2\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\left\|Q_3\right\|_{H^{-1}}\left\|\psi^m\right\|_{W^{1,2}}\le\frac{1}{4}\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|Q_3\right\|_{H^{-1}}^2, \tag{19}$$

将式(17)~(19)相加，整理得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+(2\nu-1)\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\left|D_iu^m\right|^{q_i}\mathrm{d}x\\
&+\left(2\alpha_1-\frac{1}{2}\right)\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left(2\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\le\sum_{i=1}^{3}2^{\frac{q_i}{q_i-1}}\left\|D_iQ_1\right\|_{L^{q_i'}(\Omega)}^{q_i'}+2\left\|Q_2\right\|_{H^{-1}}^2+2\left\|Q_3\right\|_{H^{-1}}^2\\
&\quad+\left(\beta_\theta+\beta_\psi\right)\left\|g\right\|_\infty\left(\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right),
\end{aligned} \tag{20}$$

将式(20)在 $(0,t),0\le t\le T$ 上进行积分，得

$$\begin{aligned}
&\left\|u^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+(2\nu-1)\sum_{i=1}^{3}\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}(0,t;L^{q_i}(\Omega))}^{q_i}\\
&+\left(2\alpha_1-\frac{1}{2}\right)\int_0^t\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s+\left(2\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\int_0^t\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s\\
&\le\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{3}2^{\frac{q_i}{q_i-1}}\left\|D_iQ_1\right\|_{L^{q_i'}(Q_T)}^{q_i'}+2\left\|Q_2\right\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2\\
&\quad+2\left\|Q_3\right\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2+\left(\beta_\theta+\beta_\psi\right)\left\|g\right\|_\infty\int_0^t\left(\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{21}$$

记

$$C_0=\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{3}2^{\frac{q_i}{q_i-1}}\left\|D_iQ_1\right\|_{L^{q_i'}(Q_T)}^{q_i'}+2\left(\left\|Q_2\right\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2+\left\|Q_3\right\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2\right).$$

再由式(21)应用 Gronwall 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left(\left\|u^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\psi^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+(2\nu-1)\sum_{i=1}^{3}\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i}\\&+\left(2\alpha_1-\frac{1}{2}\right)\int_0^T\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s+\left(2\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\int_0^T\left\|\nabla\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s\\&\le C_0\left(1+\left(\beta_\theta+\beta_\psi\right)\|g\|_\infty Te^{\left(\beta_\theta+\beta_\psi\right)\|g\|_\infty T}\right).\end{aligned}\tag{22}$$

此外，对 $\forall\varphi\in L^{q_i}\left(0,T;V_{q_i}\right)$，有

$$\begin{aligned}-\iint_{Q_T}D_i\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\iint_{Q_T}\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right)\cdot D_i\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\iint_{Q_T}\left|D_iu^m\right|^{q_i-1}\cdot\left|D_i\varphi\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\int_0^T\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i-1}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i-1}\left\|\varphi\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;V_{q_i}\right)},\end{aligned}\tag{23}$$

由式(22)，可得

$$\left\|D_i\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right)\right\|_{L^{q_i'}\left(0,T;V_{q_i}'\right)}\le C\tag{24}$$

则存在 $S_i\in L^{q_i'}\left(0,T;V_{q_i}'\right),i=\{1,2,3\}$，满足

$$D_i\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right)\rightharpoonup S_i\text{ 弱收敛于 }L^{q_i'}\left(0,T;V_{q_i}'\right),\text{ 当 }m\to\infty.$$

下面推导 $\frac{\partial u^m}{\partial t},\frac{\partial\theta^m}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial\psi^m}{\partial t}$ 的先验估计。首先，在广义函数意义下，重写$(12)_1$

$$\frac{\partial u^m}{\partial t}=\nu\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_m^*D_i\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right)-\mathcal{P}_m^*\left(u^m\cdot\nabla\right)u^m+\mathcal{P}_m^*Q_1+\mathcal{P}_m^*\beta_\theta g\theta^m+\mathcal{P}_m^*\beta_\psi g\psi^m:=\sum_{i=1}^{5}J_i,$$

其中 $\mathcal{P}_m$ 为 H 到 V_m 上的正交投影算子

$$\mathcal{P}_mu=\sum_{j=1}^{m}\left(u,\varphi_j\right)\varphi_j,\quad\forall u\in H,$$

且 $\mathcal{P}_m$ 的伴随算子 $\mathcal{P}_m^*:\tilde V'\to\tilde V'$ 满足 $\mathcal{P}_m^*\frac{\partial u^m}{\partial t}=\frac{\partial u^m}{\partial t}$，和 $\left\|\mathcal{P}_m\right\|_{L(\tilde V,\tilde V)}\le1,\left\|\mathcal{P}_m^*\right\|_{L(\tilde V',\tilde V')}\le1$。

记 $A_i\left(u^m\right)=D_i\left(\left|D_iu^m\right|^{q_i-2}D_iu^m\right),A\left(u^m\right)=\sum_{i=1}^{3}A_i\left(u^m\right)$。接下来推导 $J_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$ 的估计。

对 J_1 项，由 $W^{3,2}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,\bar q}$ 对 $\forall\eta\in L^{\bar q}\left(0,T;\tilde V\right)$ 有

$$\begin{aligned}\nu\iint_{Q_T}\mathcal{P}_m^*A\left(u^m\right)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\nu\iint_{Q_T}A\left(u^m\right)\cdot\left(\mathcal{P}_m\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\nu\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T}\left|D_iu^m\right|^{q_i-1}\cdot\left|D_i\left(\mathcal{P}_m\eta\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\nu\sum_{i=1}^{3}\int_0^T\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i-1}\cdot\left\|\mathcal{P}_m\eta\right\|_{\tilde V}\mathrm{d}t\\&\le\nu\sum_{i=1}^{3}\int_0^T\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i-1}\cdot\left\|\eta\right\|_{\tilde V}\mathrm{d}t\\&\le\nu\sum_{i=1}^{3}\left\|D_iu^m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i-1}\cdot\left\|\eta\right\|_{L^{\bar q}\left(0,T;\tilde V\right)}.\end{aligned}\tag{25}$$

对 J_2 项，通过分部积分，利用 Hölder 不等式及 Sobolev 嵌入 $W^{3,2}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,\infty}$ 可得

$$\begin{aligned}-\iint_{Q_T}\mathcal{P}_m^*\left(u^m\cdot\nabla\right)u^m\cdot\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=-\iint_{Q_T}\left(u^m\cdot\nabla\right)u^m\cdot\left(\mathcal{P}_m\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\left|u^m\right|^2\cdot\nabla\left(\mathcal{P}_m\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\int_0^T\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\cdot\left\|\nabla\eta\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\int_0^T\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\cdot\left\|\eta\right\|_{\tilde{V}}\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\left\|u^m\right\|_{L^\infty(0,T;H)}^2\cdot\left\|\eta\right\|_{L^{\bar{q}}(0,T;\tilde{V})}.\end{aligned}\tag{26}$$

对 J_3 项有

$$\iint_{Q_T}\mathcal{P}_m^*Q_1\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\iint_{Q_T}\left|Q_1\cdot\left(\mathcal{P}_m\eta\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\left\|Q_1\right\|_{L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}^{*}\right)}\left\|\eta\right\|_{L^{\bar{q}}\left(0,T;\tilde{V}\right)}.\tag{27}$$

对 J_4 项，利用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}\mathcal{P}_m^*\beta_\theta\theta^m g\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\beta_\theta\iint_{Q_T}\theta^m g\cdot\left(\mathcal{P}^m\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\beta_\theta\int_0^T\left\|\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left\|g\right\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left\|\eta\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\beta_\theta\left\|g\right\|_{L^\infty(Q_T)}\cdot\left\|\theta^m\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\right)}\cdot\left\|\eta\right\|_{L^{\bar{q}}\left(0,T;\tilde{V}\right)}.\end{aligned}\tag{28}$$

同样，对 J_5 项有

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}\mathcal{P}_m^*\beta_\psi\psi^m g\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\beta_\psi\iint_{Q_T}\psi^m g\cdot\left(\mathcal{P}^m\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\beta_\psi\int_0^T\left\|\psi^m\right\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left\|g\right\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left\|\eta\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\beta_\psi\left\|g\right\|_{L^\infty(Q_T)}\cdot\left\|\psi^m\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\right)}\cdot\left\|\eta\right\|_{L^{\bar{q}}\left(0,T;\tilde{V}\right)}.\end{aligned}\tag{29}$$

结合式(25)~(29)，利用式(22)，(24)可得 $\dfrac{\partial u^m}{\partial t}\in L^\infty\left(0,T;\tilde{V}'\right)\cap L^{\bar{q}'}\left(0,T;\tilde{V}'\right)$。由 q^+ 的定义，可知 $L^\infty\left(0,T;\tilde{V}'\right)\hookrightarrow L^{\bar{q}'}\left(0,T;\tilde{V}'\right)\hookrightarrow L^{q^{+\prime}}\left(0,T;\tilde{V}'\right)$，由此可得

$$\frac{\partial u^m}{\partial t}\in L^{q^{+\prime}}\left(0,T;\tilde{V}'\right).\tag{30}$$

同样，设正交投影算子 $\mathcal{R}_m:H^1\to W^m$：

$$\mathcal{R}_m\theta=\sum_{j=1}^m\left(\theta,\phi_j\right)\phi_j,\quad\forall\theta\in H^1,$$

且 $\mathcal{R}_m$ 的伴随算子 $\mathcal{R}_m^*:H^{-1}\to H^{-1}$ 满足 $\mathcal{R}_m^*\dfrac{\partial\theta^m}{\partial t}=\dfrac{\partial\theta^m}{\partial t}$，和 $\left\|\mathcal{R}_m\right\|_{L\left(H^1,H^1\right)}\le1,\left\|\mathcal{R}_m^*\right\|_{L\left(H^{-1},H^{-1}\right)}\le1.$

在广义函数的意义下，重写(12)₂

$$\frac{\partial\theta^m}{\partial t}=-\mathcal{R}_m^*\left(u^m\cdot\nabla\right)\theta^m+\alpha_1\mathcal{R}_m^*\Delta\theta^m+\mathcal{R}_m^*Q_2:=\sum_{j=1}^3I_j.$$

逐项推导 I_j 的估计。首先对 I_1 项，$\forall\mu\in L^2\left(0,T;H^2\right)$，利用 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入 $H^1\hookrightarrow L^6(\Omega)$ 可得

$$\begin{aligned}-\iint_{Q_T}\mathcal{R}_m^*\left(u^m\cdot\nabla\right)\theta^m\cdot\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=-\iint_{Q_T}\left(u^m\cdot\nabla\right)\theta^m\cdot\left(\mathcal{R}_m\mu\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\left|\iint_{Q_T}u^m\cdot\nabla\left(\mathcal{R}_m\mu\right)\cdot\theta^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\&\le\int_0^T\left\|u^m\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\left(\mathcal{R}_m\mu\right)\right\|_{L^3(\Omega)}\left\|\theta^m\right\|_{L^6(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\int_0^T\left\|u^m\right\|_H\cdot\left\|\mu\right\|_{H^2}\cdot\left\|\theta^m\right\|_{H^1}\mathrm{d}t\\&\le\left\|u^m\right\|_{L^\infty(0,T;H)}\cdot\left\|\mu\right\|_{L^2\left(0,T;H^2\right)}\cdot\left\|\theta^m\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\right)}.\end{aligned}\tag{31}$$

对 I_2 项有

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}\alpha_1\mathcal{R}_m^*\Delta\theta^m\cdot\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\alpha_1\iint_{Q_T}\Delta\theta^m\cdot\left(\mathcal{R}_m\mu\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\alpha_1\iint_{Q_T}\left|\nabla\theta^m\cdot\nabla\left(\mathcal{R}_m\mu\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\alpha_1\int_0^T\left\|\nabla\theta^m\right\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\le\alpha_1\int_0^T\left\|\theta^m\right\|_{H^1}\cdot\left\|\mu\right\|_{H^2}\mathrm{d}t\\&\le\alpha_1\left\|\theta^m\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\right)}\cdot\left\|\mu\right\|_{L^2\left(0,T;H^2\right)}.\end{aligned}\tag{32}$$

对 I_3 项有

$$\iint_{Q_T}\mathcal{R}_m^*Q_2\cdot\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\iint_{Q_T}\left|Q_2\cdot\mathcal{R}_m\mu\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\left\|Q_2\right\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}\right)}\cdot\left\|\mu\right\|_{L^2\left(0,T;H^2\right)}.\tag{33}$$

结合(31)~(33)，利用(22)可得

$$\frac{\partial\theta^m}{\partial t}\in L^2\left(0,T;H^{-2}\right).\tag{34}$$

同理，对浓度 ψ^m 进行估计，可得

$$\frac{\partial\psi^m}{\partial t}\in L^2\left(0,T;H^{-2}\right).\tag{35}$$

3. 近似解的收敛性和存在性证明

由式(22)，(24)，(30)，(34)，(35)，存在子序列(仍记为 m)，当 $m\to\infty$ 时，如下收敛性成立：

$$u^m\rightharpoonup u\ \text{弱}^*\text{收敛于}\ L^\infty\left(0,T;H\right);$$

$$u^m\rightharpoonup u\ \text{弱收敛于}\ L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right);$$

$$u_t^m\rightharpoonup u_t\ \text{弱收敛于}\ L^{q^{+\prime}}\left(0,T;\tilde{V}'\right);$$

$$A\left(u^m\right)\rightharpoonup S\ \text{弱收敛于}\ L^{\bar{q}'}\left(0,T;V_{\bar{q}}'\right);$$

$$\theta^m\rightharpoonup\theta\ \text{弱}^*\text{收敛于}\ L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right);$$

$$\theta^m\rightharpoonup\theta\ \text{弱收敛于}\ L^2\left(0,T;H^1\right);$$

$$\theta_t^m\rightharpoonup\theta_t\ \text{弱收敛于}\ L^2\left(0,T;H^{-2}\right);$$

$$\psi^m\rightharpoonup\psi\ \text{弱}^*\text{收敛于}\ L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right);$$

$$\psi^m\rightharpoonup\psi\ \text{弱收敛于}\ L^2\left(0,T;H^1\right);$$

$$\psi_t^m\rightharpoonup\psi_t\ \text{弱收敛于}\ L^2\left(0,T;H^{-2}\right);$$

由式(22)和嵌入 $L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)\hookrightarrow L^{q^-}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$，可得 $u^m\in L^{q^-}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$。并且 $H\hookrightarrow\tilde{V}'$ 是连续的，又当 $q^->2$ 时，恒有 $q_a^*>2$，故由(3)可知 $V_{\bar{q}}\hookrightarrow\hookrightarrow H$，利用 Aubin-Lions 定理，得

$$u^m\to u \text{ 强收敛于 } L^{q^-}\left(0,T;H\right), \tag{36}$$

进而由式(22)，(36)，利用插值不等式，得

$$u^m\to u \text{ 强收敛于 } L^r\left(0,T;H\right),\quad \forall r\ge 1. \tag{37}$$

此外，注意到 $H^1\hookrightarrow\hookrightarrow L^2\left(\Omega\right)$，再次运用 Aubin-Lions 定理，得

$$\theta^m\to\theta \text{ 强收敛于 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right),$$

$$\psi^m\to\psi \text{ 强收敛于 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right),$$

由上述收敛性，固定 k，在$(12)_1$中，令 $m\to\infty$ 取极限，可得对 $\forall\varphi_k\in V^m$，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\nu\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega S_i\cdot D_i\varphi_k\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)u\right]\cdot\varphi_k\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega Q_1\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\beta_\theta\int_\Omega\theta g\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\beta_\psi\int_\Omega\psi g\cdot\varphi_k\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{38}$$

由 $\tilde{V}=\bigcup_{m=1}^{\infty}V^m$，可知方程对 $\forall\varphi_k\in\tilde{V}$ 成立。通过连续性论证，若式(38)对 $\forall\varphi\in V_{\bar{q}}$ 成立，只要 $u\in L^\infty\left(0,T;H\right)\cap L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$ 时，式中积分保持有界。此处，唯一难点是证明对流项有界性。为此，利用 Hölder 不等式，可得

$$\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)u\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\otimes u:\nabla\varphi\mathrm{d}x\le\left\|u\right\|^2_{L^{2q^{-\prime}}(\Omega)}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^{q^-}(\Omega)}, \tag{39}$$

因为 $q_a^*>\dfrac{2q^-}{q^--1}$，且注意到 $V_{\bar{q}}\hookrightarrow V_{q^-}$，利用引理 1，得

$$\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)u\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x\le\left\|u\right\|^2_{V_{\bar{q}}}\left\|\varphi\right\|_{V_{\bar{q}}}.$$

由此，确保对流项的有界性。接下来，进行对流项极限过程，由式(37)，特别地取 $r=2$，得

$$u^m\to u \text{ 强收敛于 } L^2\left(0,T;H\right),$$

同时由式(22)的先验估计，可得 $u^m\in L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$ 一致有界，且由嵌入 $L^{\bar{q}}\hookrightarrow L^{q^-}$，故 $\nabla u^m\in L^{q^-}\left(0,T;L^{q^-}\left(\Omega\right)\right)$ 一致有界，所以存在子列使得

$$\nabla u^m\rightharpoonup\nabla u \text{ 弱收敛于 } L^{q^-}\left(0,T;L^{q^-}\left(\Omega\right)\right),$$

对 $\forall\varphi\in V_{\bar{q}}$，由上述收敛性，结合强收敛序列与弱收敛序列乘积的弱收敛性质，有

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega\left[\left(u^m\cdot\nabla\right)u^m\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)u\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x$$

从而得到对流项极限过程，式(38)连续论证成立。

同样，在式$(12)_2$，$(12)_3$中，令 $m\to\infty$ 取极限，可得对 $\forall\phi\in H^1$，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)\theta\right]\cdot\phi\mathrm{d}x+\alpha_1\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega Q_2\cdot\phi\mathrm{d}x,\\&\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)\psi\right]\cdot\phi\mathrm{d}x+\alpha_2\int_\Omega\nabla\psi\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega Q_3\cdot\phi\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{40}$$

利用式(38)并类似于上述讨论过程，可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^1\left(0,T;V'\right)$$

同样，利用式(40)可得 $\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\in L^1\left(0,T;H^{-2}\right)$，又由于 $u\in L^\infty\left(0,T;H\right)$，$\theta,\psi\in\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$，和 $H\hookrightarrow V'$，$L^2\left(\Omega\right)\hookrightarrow H^{-2}$，因此由引理 3 可知，$u\in C_w\left(\left[0,T\right];H\right)$ 和 $\theta,\psi\in C_w\left(\left[0,T\right];L^2\left(\Omega\right)\right)$。

接下来，为完成定理 1 的证明，只需证明

$$A_i\left(u\right)=S_i,\quad A\left(u\right)=\sum_{i=1}^{3}S_i=S. \tag{41}$$

首先，由于对 $\forall\xi,\eta\in L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right),\xi\neq\eta$，有

$$\sum_{i=1}^{3}\left\langle\left|D_i\xi\right|^{q_i-2}D_i\xi-\left|D_i\eta\right|^{q_i-2}D_i\eta,D_i\xi-D_i\eta\right\rangle_{L^{q_i'}(Q_T)\times L^{q_i}(Q_T)}>0,$$

表明 A_i,A 为严格单调算子，借助单调性性质，可利用单调性方法证明式(41)成立。其次，为支撑后续分析，需证明对 $\forall u\in L^\infty\left(0,T;H\right)\cap L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$ 和 $\forall v\in L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$，有

$$\int_\Omega\left[\left(u\cdot\nabla\right)u\right]\cdot v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\otimes u:\nabla v\,\mathrm{d}x\in L^1\left(0,T\right), \tag{42}$$

为证明式(42)，由 q^- 的定义及引理 1 可知

$$L^{\vec{q}}(0,T;V_{\vec{q}})\hookrightarrow L^{q^-}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)\hookrightarrow L^{q^-}\left(0,T;L^{q_a^*}\left(\Omega\right)\right),$$

随后，利用插值不等式可得

$$L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)\cap L^\infty\left(0,T;H\right)\subset L^{q^-}\left(0,T;L^{q_a^*}\left(\Omega\right)\right)\cap L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)\subset L^\rho\left(Q_T\right),$$

其中 $\rho=2+q^--2q^-/q_a^*$。由式(10)可推得 $2/\rho+1/q^-\leq1$，据此可应用 Hölder 不等式证明式(42)成立。

接下来，类似于文献[7]中的方法可知，对 a.e., $t\in\left(0,T\right)$，有

$$\frac{1}{2}\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\nu\int_0^t\left(S,u\right)\mathrm{d}s\geq\frac{1}{2}\left\|u\left(0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^t\left(Q_1,u\right)\mathrm{d}s+\beta_\theta\iint_{Q_t}\theta gu\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\beta_\psi\iint_{Q_t}\psi gu\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{43}$$

对 $\forall\eta\in L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$，令

$$\chi_m=\nu\int_0^t\left(A\left(u^m\right)-A\left(\eta\right),u^m-\eta\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\left\|u^m\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

由 A 的单调性可推得

$$\liminf_{m\to\infty}\chi_m\geq\frac{1}{2}\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{44}$$

由式(12)，将 χ_m 表示为

$$\begin{aligned}\chi_m=&\frac{1}{2}\left\|u^m\left(0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\nu\int_0^t\left(A\left(\eta\right),u^m-\eta\right)\mathrm{d}s-\nu\int_0^t\left(A\left(u^m\right),\eta\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(Q_1,u^m\right)\mathrm{d}s\\&+\beta_\theta\iint_{Q_t}\theta^m gu^m\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\beta_\psi\iint_{Q_t}\psi^m gu^m\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$ 取极限，可得

$$\begin{aligned}\chi=&\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\nu\int_0^t\left(A\left(\eta\right),u-\eta\right)\mathrm{d}s-\nu\int_0^t\left(A\left(u\right),\eta\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(Q_1,u\right)\mathrm{d}s\\&+\beta_\theta\iint_{Q_t}\theta gu\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\beta_\psi\iint_{Q_t}\psi gu\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

结合式(43)，(44)，可得

$$\int_0^t \left(S-A(\eta),u-\eta\right)\mathrm{d}s \ge 0,\quad \text{a.e., } t\in(0,T). \tag{45}$$

取 $\eta=u-\lambda\xi$，其中任意 $\lambda\ge 0,\xi\in L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$，代入式(45)得

$$\int_0^t \left(S-A(u-\lambda\xi),\xi\right)\mathrm{d}s \ge 0, \tag{46}$$

在式(46)中令 $\lambda\to 0$ 取极限，得

$$\int_0^t \left(S-A(u),\xi\right)\mathrm{d}s \ge 0,\quad \forall \xi\in L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right),$$

由此 $S=A(u)$, a.e., $(x,t)\in Q_T$，定理 1 得证。

4. 总结

本文在光滑有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 中，考虑了一类含各向异性非牛顿算子的双扩散对流方程组解的适定性问题，并证明了弱解的存在性。所研究的模型具有强耦合性、强非线性性及各向异性特征，为问题的分析带来实质困难。本文证明思路如下：首先用 Galerkin 方法构建问题近似解，接着利用能量法建立近似解的一致先验估计；然后运用紧性论证得到近似解的相应收敛性；最后，通过单调性方法对参数取极限证明本文的主要结果。本文所研究问题是全新的，所得结果是对流体动力学方程组相关经典结论的改进与推广。

基金项目

吉林省教育厅科学研究项目(批准号：JJKH20250466KJ)。

参考文献

[1] Chen, F., Guo, B. and Zeng, L. (2018) The Well-Posedness of the Double-Diffusive Convection System in a Bounded Domain. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4327-4336. https://doi.org/10.1002/mma.4895

[2] Chen, F., Guo, B. and Zeng, L. (2019) The Well-Posedness for the Cauchy Problem of the Double-Diffusive Convection System. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, 011511. https://doi.org/10.1063/1.5052668

[3] Chen, F. and Guo, B. (2019) The Suitable Weak Solution for the Cauchy Problem of the Double-Diffusive Convection System. *Applicable Analysis*, **98**, 1724-1740. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1441995

[4] Wu, F. (2020) Blowup Criterion of Strong Solutions to the Three-Dimensional Double-Diffusive Convection System. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 2673-2686. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00828-3

[5] Rudraiah, N. and Siddheshwar, P.G. (1998) A Weak Nonlinear Stability Analysis of Double Diffusive Convection with Cross-Diffusion in a Fluid-Saturated Porous Medium. *Heat and Mass Transfer*, **33**, 287-293. https://doi.org/10.1007/s002310050191

[6] Fragalà, I., Gazzola, F. and Kawohl, B. (2004) Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **21**, 715-734. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2003.12.001

[7] Lions, J.L. (1969) Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non-Linéaires. Dunod, Paris.

[8] Temam, R. (1977) Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. North-Holland Publishing, 510-512.

[9] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M. and Rùžička, M. (1996) Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs. Chapman & Hall.