Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 449-463**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155242

Hans汉斯

不可压缩Navier-Stokes-Landau-Lifshitz方程组全局弱解的存在性

茹柏文，任永华*，王旦霞

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2026年4月19日；录用日期：2026年5月13日；发布日期：2026年5月25日

摘 要

本文在光滑有界区域中研究了二维不可压缩Navier-Stokes-Landau-Lifshitz方程组的初边值问题，在初始密度有正上下界(远离真空)并赋予齐次Dirichlet边界条件的框架下，利用推出的一个基本的能量不等式和Fadeo-Galerkin方法，得到了系统全局弱解的存在性。

关键词

不可压缩Navier-Stokes-Landau-Lifshitz方程组，全局弱解，存在性

Existence of Global Weak Solution for the Incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz System

Bowen Ru, Yonghua Ren*, Danxia Wang

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

In this paper, the initial-boundary value problem of two-dimensional incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz equations is studied in smooth bounded regions. By the basic energy law and the Fadeo-Galerkin method, we prove the global existence of the weak solutions under the assumption that the initial density is strictly positive and bounded, and subject to homogeneous Dirichlet boundary

*通讯作者。

文章引用: 茹柏文, 任永华, 王旦霞. 不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 方程组全局弱解的存在性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 449-463. DOI: 10.12677/aam.2026.155242

conditions.

Keywords

Incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz Equations, Global Weak Solution, Existence

1. 引言

1.1. Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组的研究背景

Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组是深度融合粘性流体动力学与铁磁自旋磁化动力学的非线性偏微分方程组。该体系专门描述和刻画可流动铁磁介质(如铁磁流体、磁性软胶体以及流动磁畴材料等复杂多相体系)中，流体宏观流动与微观磁矩或磁化场演化之间的双向强耦合作用机制。此模型不仅系统地揭示了流动背景下磁矩的集体动力学特性及其演化规律，还深入阐释了磁化过程对流体整体运动、能量输运路径及内部结构形成过程所产生的显著反馈效应与调控作用。因此，这一方程组已成为软凝聚态物理、应用数学和工程流体力学等多学科领域开展跨学科前沿研究与复杂理论建模的核心分析框架和基础工具之一。

Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组是由 Navier-Stokes 方程和 Landau-Lifshitz 方程耦合而成的。Navier-Stokes (NS)方程是经典粘性流体力学理论的核心基础。Landau-Lifshitz (LL)方程则是铁磁体系磁化动力学的基础与核心理论框架。基于这两类方程的局限性和科技的大爆炸，20 世纪 60 年代，铁磁流体的成功制备，堪称材料科学领域的一项重大成就。其独特之处在于兼具可自由流动的流体特性以及宏观层面的铁磁性。这种双重特性使得传统物理理论难以全面解释其行为：单独运用纳维－斯托克斯(NS)方程虽可描述流体运动，但无法处理磁性效应；而单独使用朗道－利夫希茨(LL)方程虽能描述磁学现象，却无法涵盖流动特性。

由 Navier-Stokes 方程与 Landau-Lifshitz 方程耦合而成的 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 系统，是一类具有典型代表性的非线性偏微分方程的标志性难题。围绕该系统全局解的存在性与正则性、解可能出现爆破的精确数学判据，以及奇异性的形成与结构分析等核心问题，构成了当前国际数学分析领域长期关注且持续攻关的前沿研究方向，具有重大的理论挑战意义。该方程组通过有机整合描述流体运动的 NS 方程与刻画磁化演化的 LL 方程，有效克服了传统流体力学与磁学理论相互独立、难以描述磁性与流动之间复杂双向耦合作用的根本性理论缺陷。它不仅在理论层面统一了宏观流动行为与微观自旋动力学，而且为现代磁性软材料的设计、分析以及磁控流体工程的实际应用提供了关键的理论依据和数学方法，有力推动了相关科学与技术领域的持续发展。

1.2. Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组的研究现状

Navier-Stokes-Landau-Lifshitz (NSLL)耦合方程组解的适定性问题，特别是弱解的存在性、唯一性及正则性，已成为偏微分方程领域一个活跃的前沿研究方向。对于二维不可压缩情形，已有一系列重要成果。

在经典弱解理论方面，王和郭[1]较早地系统研究了二维不可压缩 NSLL 模型，利用 Faedo-Galerkin 逼近和弱紧性理论，证明了有限能量初值下全局弱解的存在性与唯一性。

当密度为常量时，对于下面 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho u) = 0, \rho \ge 0$$

$$\rho u_t + \rho u\cdot\nabla u \nabla P = \Delta u - \nabla\cdot(\nabla d \odot \nabla d),$$

$$\nabla\cdot u = 0$$

$$d_t + (u\cdot\nabla) d = \Delta d + |\nabla d|^2 d + d\times\Delta d, |d| = 1$$

$$(\rho, u, d)(x, 0) = (\rho_0, u_0, d_0), \nabla\cdot u_0 = 0, |d_0| = 1, x\in R^2$$

当初始密度 $\rho_0 > 0$ 及初值能量具备 $\left\|\rho_0^{\frac{1}{2}} u_0\right\|_{L^2}^2 + \|\nabla d_0\|_{L^2}^2$ 足够小时，利用能量方法，黄炳远等[2]讨论了不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合方程组整体强解的存在唯一性。

对于具有初始真空的三维不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 广义模型

$$\rho_t + div(\rho u) = 0, x\in R^3, t > 0$$

$$\partial_t(\rho u) + div(\rho u\otimes u) + (-\Delta)^{\frac{5}{4}} u + \nabla P = -\nabla\cdot(\nabla d\odot\nabla d),$$

$$d_t + u\cdot\nabla d + (-\Delta)^{\frac{5}{4}} d = |\nabla d|^2 d + d\times\Delta d, |d| = 1,$$

$$\nabla\cdot u = 0$$

$$(\rho, u, d)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, d_0), |d_0| = 1,$$

当拉普拉斯算子 $(-\Delta)^\alpha$ 中 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \ne 1$，且初值满足下述条件时

$$0 \le \rho_0 \in L^{\frac{6}{5}}(R^3)\cap L^\infty(R^3), \nabla\rho_0 \in L^{\frac{4}{3}}(R^3)$$

$$\nabla u_0 = 0, u_0 \in H^{\frac{5}{4}}(R^3), d_0 \in H^{\frac{9}{4}}(R^3), |d_0| = 1, \sqrt{\rho_0} u_0 \in L^2(R^3)$$

Liu 和 Gao [3]给出了该模型强解的存在唯一性。

当 $(-\Delta)^\alpha$ 中 $\alpha > 0$，$\alpha \ne 1$，Liu 和 Sun [4]研究了多维超粘性不可压缩的 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 模型

$$\partial_t u + (-\Delta)^\alpha u + (u\cdot\nabla) u + \nabla P + \nabla\cdot(\nabla d\odot\nabla d) = 0, (x, t)\in T^n\times R^+$$

$$\partial_t d + (-\Delta)^\alpha d + (u\cdot\nabla) d = d|\nabla d|^2 + d\times\Delta d, |d| = 1,$$

$$\nabla\cdot u = 0$$

$$u|_{t=0} = u_0, d|_{t=0} = d_0,$$

作者证明了 $n \ge 3$ 时，多维超粘性模型的适定性问题。

此外，申[5]将模型扩展至包含更复杂磁化动力学的 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程，同样在二维情形下证明了整体弱解的存在性

上述工作表明，现有研究多在常数密度、小初值、全空间/周期区域、或引入分数阶耗散/广义磁化项的特定条件下展开。然而，对于标准粘性项(即拉普拉斯算子 $-\Delta$)、在物理上更自然的有限光滑区域、并考虑非齐次密度(密度可变)及齐次 Dirichlet 边界条件这一基础而重要的情形，其全局弱解的存在性理论尚不完善。

1.3. 本文研究内容

基于上述研究现状，本文旨在填补一个理论空白：研究如下非齐次不可压缩 NSLL 系统(1.1)~(1.4)在二维有界光滑区域 Ω 上的初边值问题，其中密度 ρ 是变量，并假设初始密度满足 $0<\underline{\rho}\le\rho(x)\le\bar{\rho}$，速度场满足齐次 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$，我们首先推出了一个基本能量不等式(1.18)。为了处理变密度带来的困难，我们引入了一个正则化的近似系统(3.1)~(3.4)，即在方程中人为耗散项 $\varepsilon\Delta\rho$。通过该近似系统，先构造光滑的近似解序列，再通过一致的能量估计证明该序列在某个函数空间中具有紧性，最终取极限 $\varepsilon\to 0$ 得到原系统的弱解。

这项研究的必要性在于：它将不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 方程组解的存在性理论，推广到了有界区域上、非齐次密度、标准粘性这一更基础且物理意义明确的情形，为后续研究更复杂边界条件或低正则性初值的问题提供了工具和参考。

考虑如下非齐次不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 耦合系统

$$\rho_t+u\cdot\nabla\rho=0,\rho\ge 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(u_t+u\cdot\nabla u\right)+\nabla P=\mu\Delta u-\lambda\nabla\cdot\left(\nabla d\odot\nabla d\right), \tag{1.2}$$

$$d_t+u\cdot\nabla d=\upsilon\left(\Delta d+\left|\nabla d\right|^2 d\right)+d\times\Delta d,\left|d\right|=1 \tag{1.3}$$

$$\nabla\cdot u=0 \tag{1.4}$$

其中 Ω 是 R^2 内的一个有界光滑区域，这里速度函数 $u=u(x,t)=(u_1,u_2)(x,t)$，宏观分子取向力 $d=d(x,t)=(d_1,d_2)(x,t)$ 是 R^2 中的向量函数；密度函数 $\rho=\rho(x,t)$ 是一个数量函数；而压力项 $P=P(x,t)$ 是一个关于 ρ 的光滑函数。$\left|\nabla d\right|^2 d=-f(d)$ 是一个定义在 $d\in R^2$ 上的光滑有界函数。μ,λ,υ 均为大于 0 的正常数。$\nabla d\odot\nabla d$ 为指向场诱导的张量表示第 (i,j) 个元素为 $\partial_i d\cdot\partial_j d\ (1\le i,j\le 2)$ 的矩阵。

假设满足下述条件：

(H1) $f(d)=\nabla_d F(d)$；

其中 F 是 $R^2\to R$ 的光滑有界函数；

(H2) $\left|\nabla_d F(d)\right|\le C,\forall d\in R^2$；

(H3) $\nabla_d F\left(d^1\right)-\nabla_d F\left(d^2\right)=G\left(d^1,d^2\right)\left(d^1-d^2\right)$；

其中 $\left|G\left(d^1-d^2\right)\right|\le C,\forall d^1,d^2\in R^2$。

系统(1.1)~(1.4)的初始条件如下：

$$\rho(x,0)=\rho_0(x)\in C^{2+\delta}\left(\bar{\Omega}\right),0<\underline{\rho}\le\rho_0(x)\le\bar{\rho},\nabla\rho_0\cdot\nu|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.5}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in L^2(\Omega),\nabla\cdot u_0=0,u_0|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.6}$$

$$d(x,0)=d_0(x)\in H^1(\Omega),\left.\frac{\partial d_\nu}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.7}$$

和边界条件如下：

$$\nabla\rho\cdot\nu|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.8}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.9}$$

$$d|_{\partial\Omega}=d_0 \tag{1.10}$$

其中 ν 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。我们考虑问题(1.1)~(1.10)在 $\Omega\times[0,T]$ 上的解 ρ,u,d。

首先，用 u 与式子(1.2)做向量积，并在 Ω 上积分，利用分部积分和式子(1.4)得

$$\int_\Omega \rho u_t \cdot u + \int_\Omega \rho u \cdot \nabla u \cdot u - \mu \int_\Omega \nabla u \cdot u + \int_\Omega \nabla P \cdot u = -\lambda \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u \tag{1.11}$$

利用式子(1.1)和(1.4)得

$$\int_\Omega \rho u \cdot \nabla u \cdot u = \int_\Omega \frac{1}{2} \rho u \cdot \nabla u^2 = -\int_\Omega \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho u) \cdot u^2 = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_t |u|^2 \tag{1.12}$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u = \int_\Omega \Delta d \cdot \nabla d \cdot u + \int_\Omega \nabla \left(\frac{|\nabla d|^2}{2} \right) \cdot u = \int_\Omega \nabla d \cdot \Delta d \cdot u \tag{1.13}$$

即：

$$\int_\Omega \left(\rho u_t \cdot u + \frac{1}{2} \rho_t |u|^2 \right) - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega \partial_i d^k \partial_j d^k \partial_i u^j \tag{1.14}$$

将式子(3.1.1)乘以 $|u|^2$，在 Ω 上积分，可得

$$\int_\Omega \rho_t |u|^2 + (u \cdot \nabla \rho) |u|^2 = 0$$

所以，上述式子可改写为

$$\int_\Omega \left(\rho u_t \cdot u + \frac{1}{2} \rho_t u^2 \right) - \mu \int_\Omega \nabla u \cdot u = \lambda \int_\Omega (u \cdot \nabla d) \cdot \Delta d,$$

综合上述式子得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \rho |u|^2 + \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega (u \cdot \nabla d) \Delta d = 0 \tag{1.15}$$

其次，用 $-\Delta d + f(d)$ 与式子(1.3)做向量积，并在 Ω 上积分，可得：

$$\int_\Omega (d_t + u \cdot \nabla d)(-\Delta d + f(d)) = \upsilon \int_\Omega (\Delta d - f(d))(-\Delta d + f(d)) + \int_\Omega (d \times \Delta d)(-\Delta d + f(d))$$

其中：

$$(d \times \Delta d)(-\Delta d + f(d)) = 0$$

且 $|d| = 1$ 时，有：

$$\int_\Omega (d_t + u \cdot \nabla d)(-\Delta d + f(d)) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |\nabla d|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega F(d) - \int_\Omega (u \cdot \nabla d) \Delta d, \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |\nabla d|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega F(d) + \upsilon \int_\Omega |\Delta d - f(d)|^2 = \int_\Omega (u \cdot \nabla d) \Delta d \tag{1.17}$$

将(1.15)和(1.17)相加，并利用(1.4)和边界条件得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \frac{\lambda}{2} |\nabla d|^2 + \lambda F(d) \right) + \int_\Omega \lambda \upsilon |\Delta d - f(d)|^2 + \int_\Omega \mu |\nabla u|^2 = 0. \tag{1.18}$$

鉴于上式可以反映系统能量的耗散特性，则称上式为系统(1.1)~(1.4)的基本能量不等式。

本文结构安排如下：第 2 小节给出本文所需的预备知识；第 3 小节构造近似解；第 4 小节将近似解趋向极限.从而达到下面定理，系统(1.1)~(1.4)全局弱解的存在性。

定理 1.1 假设(H1)~(H3)成立，且初值 (ρ_0, u_0, d_0) 满足条件(1.5)~(1.7)，则系统(1.1)~(1.4)存在全局弱解 (ρ, u, d)，对于任意

$$T \in (0,\infty)$$

$$\rho \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)$$

$$u \in L^{2}\left(0,T;H^{1}(\Omega)\right)\cap L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)$$

$$d \in L^{2}\left(0,T;H^{2}(\Omega)\right)\cap L^{\infty}\left(0,T;H^{1}(\Omega)\right)$$

2. 预备知识

引理 2.1 [1]

假设初值(ρ_0,u_0,d_0)满足条件(1.5)~(1.7)，则存在一个正时间T使得系统(1.1)~(1.4)在中存在唯一弱解。

引理 2.2 [6] (Gagliardo-Nirenberg 不等式)

对于任意$q\in[2,\infty)$，$r\in(2,\infty)$以及$s\in(1,\infty)$，假设$f\in H^1\left(R^2\right)$以及$g\in L^s\left(R^2\right)\cap D^{1,r}\left(R^2\right)$，则存在依赖$q,r$于以及$s$的正常数$C$，满足如下

$$\|f\|_{L^q\left(R^2\right)}^{q} \le C\|f\|_{L^2\left(R^2\right)}^{2}\|\nabla f\|_{L^2\left(R^2\right)}^{q-2}$$

$$\|g\|_{C\left(\overline{R^2}\right)} \le C\|g\|_{L^s\left(R^2\right)}^{s(r-2)/(2r+s(r-2))}\|\nabla g\|_{L^r\left(R^2\right)}^{2r/(2r+s(r-2))}$$

引理 2.3 [7]

设$Y=\left\{V\in L^{\alpha_0}\left(0,T;X_0\right),V_t\in L^{\alpha_1}\left(0,T;X_1\right)\right\}$具有范数$\|V\|_Y=\|V\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)}+\|V_t\|_{L^{\alpha_1}(0,T;X_1)}$，其中$X_0\subset X\subset X_1$都是 Hilber 空间。假设$X_0\to X\to X_1$的嵌入都是连续的，并且从$X_0$到$X$的嵌入是紧嵌入。这里的$\alpha_0,\alpha_1>1$，则从$Y$到$L^{\alpha_0}\left(0,T;X_0\right)$的嵌入是紧嵌入。

引理 2.4 [8] (Grönwall 不等式)

(微分形式)令$\eta(\cdot)$是$[0,T]$上的非负绝对连续函数，满足对$t\in[0,T]$几乎处处满足微分不等式

$$\eta'(t)\le\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$$

其中$\phi(t)$和$\psi(t)$是$[0,T]$上的非负可和函数。则

$$\eta(t)\le \mathrm{e}^{\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

(积分形式)设c为常数，$b(t)$，$u(t)$为区间$[0,T]$内的非负连续函数，满足

$$u(t)\le c+\int_0^t b(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, t\in[0,T]$$

则$u(t)$满足

$$u(t)\le c\cdot\exp+\left(\int_0^t b(\tau)\mathrm{d}\tau\right), t\in[0,T]$$

3. 近似解的构造

首先，在初值条件(1.5)~(1.7)和边界条件(1.8)~(1.10)下求解方程组

$$\rho_t+u\cdot\nabla\rho=\varepsilon\Delta\rho \tag{3.1}$$

$$\rho\left(u_t+u\cdot\nabla u\right)+\nabla P+\varepsilon\left(\nabla\rho\cdot\nabla u+\Delta\rho u\right)=\mu\Delta u-\lambda\nabla\cdot\left(\nabla d\odot\nabla d\right) \tag{3.2}$$

$$d_t+u\cdot\nabla d=\gamma\left(\Delta d-f(d)\right)+d\times\Delta d \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{3.4}$$

引理 3.1 [9]

假设 u 是一个给定的向量函数，满足

$$u \in C\left(\left[0,T\right],\left(C^2\left(\bar{\Omega}\right)\right)^3\right) \text{ 且 } \nabla \cdot u = 0\text{，} \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

则初边值问题在 $\left[0,T\right]\times\Omega$ 上有唯一的经典解使得对于任意的 $t \in \left[0,T\right]$， $\rho\left(t\right) \in C^{2+\delta}\left(\bar{\Omega}\right)$。

证明： 由最大值原理和(1.5)，对于任意的 $t \in \left[0,T\right]$， $x \in \Omega$ 可得出：

$$\underline{\rho} \le \rho\left(x,t\right) \le \bar{\rho} \tag{3.5}$$

用 $-\Delta\rho$ 与(3.1)做向量积，并在 Ω 上积分，可得：

$$\int_\Omega \rho_t \Delta\rho + \int_\Omega u \cdot \nabla\rho\Delta\rho = \int_\Omega \varepsilon\Delta\rho\Delta\rho$$

即：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\Delta\rho\right|^2 + \varepsilon\int_\Omega \left|\Delta\rho\right|^2 = \int_\Omega \left(u\cdot\nabla\rho\right)\Delta\rho \tag{3.6}$$

从而有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla\rho\right|^2 + \varepsilon\int_\Omega \left|\Delta\rho\right|^2 \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|u\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_\Omega \left|\nabla\rho\right|^2 \tag{3.7}$$

由 Grönwall 不等式，可得

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega \left|\nabla\rho\right|^2 + \int_0^T \int_\Omega \left|\Delta\rho\right|^2 \le C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\left\|u\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right) \tag{3.8}$$

令方程组(3.1)，(1.5)，(1.8)对应于 $u = u^1$ 及 $u = u^2$ 的两个解分别为 ρ^1,ρ^2。将两式相减，并与 $-\Delta\left(\rho^1-\rho^2\right)$ 做向量积，再积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2 + 2\varepsilon\int_\Omega \left|\Delta\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2 \\ &\le 2\int_\Omega \left|u^1-u^2\right|\cdot\left|\nabla\rho^1\right|\cdot\left|\Delta\left(\rho^1-\rho^2\right)\right| + 2\int_\Omega \left|u^2\right|\left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|\cdot\left|\Delta\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|\end{aligned} \tag{3.9}$$

进而有：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2 \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left|u^1-u^2\right|^2\left|\nabla\rho^1\right|^2 + \left|u^2\right|^2\left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2 \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega \left|\nabla\rho^1\right|^2 + \left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega \left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2\right) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega \left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2\end{aligned} \tag{3.10}$$

所以，我们可得出

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega \left|\nabla\left(\rho^1-\rho^2\right)\right|^2 \le TC\sup_{0\le t\le T}\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \tag{3.11}$$

这里，$C=C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$ 贯彻于全文，对于这些有界变量均用 C 来代表。

由此，我们得出如下引理。

引理 3.2

假设初值 ρ_0 满足条件(1.5)，对于方程(3.1)，一定存在映射 $\tilde{T}=\tilde{T}(u)$

$$\tilde{T}:C\left([0,T];\left(C^2(\bar{\Omega})^2\right)\cap\{u|\nabla\cdot u=0\}\right)\mapsto C\left([0,T];C^{2+\delta}(\bar{\Omega})\right)$$

满足如下结论：

(1) $\rho=\tilde{T}(u)$ 是(3.1)，(1.5)，(1.8)的唯一经典解

(2) $\underline{\rho}\le\tilde{T}(u)(x,t)\le\bar{\rho},\forall(x,t)\in\Omega\times[0,T]$ (3.12)

(3) $\sup\limits_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|\nabla\tilde{T}(u)\right|^2+\int_0^T\int_\Omega\left|\Delta\tilde{T}(u)\right|^2\le C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$ (3.13)

(4) $\left\|\tilde{T}(u^1)-\tilde{T}(u^2)\right\|_{C([0,T];w^{1,2}(\Omega))}\le\tilde{T}C\left\|u^1-u^2\right\|_{C([0,T];L^\infty(\Omega))}$ (3.14)

这里 $C=C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$。

证明：下面，我们再用 $-\Delta d$ 与(3.3)做向量积，并在 Ω 上积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla d|^2+\gamma\int_\Omega|\Delta d|^2=\gamma\int_\Omega f(d)\cdot\Delta d+\int_\Omega(u\cdot\nabla d)\Delta d \tag{3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla d|^2+\gamma\int_\Omega|\Delta d|^2\le 2\gamma|\Omega|\cdot\|f\|_{L^\infty}^2+\frac{2}{\gamma}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla d|^2 \tag{3.16}$$

由 Grönwall 不等式，可得

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega|\nabla d|^2+\int_0^T\int_\Omega|\Delta d|^2\le C\left(T,\varepsilon,\rho_0,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right) \tag{3.17}$$

令方程组(3.3)，(1.7)，(1.10)对应于 $u=u^1$ 及 $u=u^2$ 的两个解分别为 d^1,d^2。将两式相减，并与 (d^1-d^2) 做向量积，再积分，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+2\gamma\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2\\&=-2\gamma\int_\Omega G\left(d^1,d^2\right)\left|d^1-d^2\right|^2-2\int_\Omega\left(\left(u^1-u^2\right)\cdot\nabla d^1\right)\left(d^1-d^2\right)-2\int_\Omega u^2\cdot\nabla\left(d^1-d^2\right)\left(d^1-d^2\right)\end{aligned}$$

由(3.17)进一步，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+\gamma\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2\\&\le C\int_\Omega\left(1+\left|u^2\right|^2\right)\left|d^1-d^2\right|^2+\int_\Omega\left|u^1-u^2\right|^2\left|\nabla d^1\right|^2\\&\le C\left(1+\left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega\left|\nabla d^1\right|^2\\&\le C\left(1+\left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+C\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\end{aligned}$$

所以，我们可得出：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2\le C\sup_{0\le t\le T}\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \tag{3.18}$$

这里 $C=C\left(T,d_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$。

再将两式的差与做向量积，并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2+\gamma\int_\Omega\left|\Delta\left(d^1-d^2\right)\right|^2\\&=\gamma\int_\Omega G\left(d^1,d^2\right)\left(d^1-d^2\right)\cdot\Delta\left(d^1-d^2\right)+\int_\Omega\left(\left(u^1-u^2\right)\cdot\nabla d^1\right)\Delta\left(d^1-d^2\right)+u^2\cdot\nabla\left(d^1-d^2\right)\Delta\left(d^1-d^2\right)\end{aligned}$$

结合(3.17)及(3.18)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2+\gamma\int_\Omega\left|\Delta\left(d^1-d^2\right)\right|^2\\&\le C\int_\Omega\left|d^1-d^2\right|^2+C\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega\left|\nabla d^1\right|^2+C\left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2\\&\le C\left(T,d_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)\sup_{0\le t\le T}\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2+C\left\|u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2\end{aligned}$$

同理可得：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|\nabla\left(d^1-d^2\right)\right|^2+\int_0^T\int_\Omega\left|\Delta\left(d^1-d^2\right)\right|^2\le TC\sup_{0\le t\le T}\left\|u^1-u^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \tag{3.19}$$

这里 $C=C\left(T,d_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$。

由此，我们得出如下引理。

引理 3.3

假设初值 d_0 满足(1.7)，对于方程(3.3)，一定存在映射 $\tilde{R}=\tilde{R}(u)$

$$\tilde{R}:C\left(\left[0,T\right];\left(C^2\left(\bar{\Omega}\right)^2\right)\cap\left\{u\middle|\nabla\cdot u=0\right\}\right)\mapsto C\left(\left[0,T\right];C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)\right)$$

满足如下结论：

(1) $d=\tilde{R}(u)$ 是(3.3)，(1.7)，(1.1)的一个光滑解

(2) $$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|\nabla\tilde{R}(u)\right|^2+\int_0^T\int_\Omega\left|\Delta\tilde{R}(u)\right|^2\le C\left(T,d_0,\left\|u\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right) \tag{3.20}$$

(3) $$\left\|\tilde{R}\left(u^1\right)-\tilde{R}\left(u^2\right)\right\|_{C\left(\left[0,T\right];W^{1,2}(\Omega)\right)}+\left\|\tilde{R}\left(u^1\right)-\tilde{R}\left(u^2\right)\right\|_{L^2\left(\left[0,T\right];W^{2,2}(\Omega)\right)}\le\tilde{T}C\left\|u^1-u^2\right\|_{C\left(\left[0,T\right];L^\infty(\Omega)\right)} \tag{3.21}$$

这里 $C=C\left(T,d_0,\left\|u^1\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\left\|u^2\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)$。

运用不动点方法：

设 $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^\infty$ 为 $\bar{u}\subset L^2\left(\Omega,R^2\right)$ 的一个标准正交基，并且满足下面式子

$$\Delta\varphi_i+\nabla P_i=-\lambda_i\varphi_i,\quad \varphi_i\big|_{\partial\Omega}=0,$$

其中 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots$，且当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\infty$。易知，这是 Stokes 算子满足 Dirichlet 边界条件的特征函数所组成的 H 中的标准正交基。

在有限维的函数空间 $X_n=span\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^n$ 中，令 $v=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi_i(x)\in X_n$，则得

$$\|v\|_{X_n}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\,2},$$

并且有

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|\varphi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{1\le i\le n} \|\varphi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= C_1(n)\|v\|_{X_n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\int_\Omega v \cdot \Delta v \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \lambda_i \varphi_i(x) + \alpha_i \nabla P_i(x)\right) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \\ &\le \lambda_n \|v\|_{X_n}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \varphi_i(x) + \alpha_i \nabla P_i(x)\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^2 + \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla P_i(x)\right|^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(\lambda_i^2 + n\int_\Omega \left|\nabla P_i(x)^2\right|\right) \\ &= C(n)\|v\|_{X_n}^2\end{aligned}$$

由此，我们所求的近似解 $u_n \in C([0,T];X_n)$，对于 $\forall t \in [0,T]$ 及 $\psi \in X_n$，满足下式

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \rho(t) u_n(t) \cdot \psi - \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot \psi \\ &= \int_0^t \int_\Omega \left[\mu \Delta u_n - \nabla \cdot (\rho u_n \otimes u_n) - \lambda \Delta d \cdot \nabla d - \varepsilon \nabla \rho \cdot \nabla u_n\right] \cdot \psi\end{aligned}$$

我们需先引入可逆算子 $\mu[\rho]$；且有

$$\mu[\rho]: X_n \mapsto X_n^{\,*}, \langle \mu[\rho]v, w\rangle = \int_\Omega \rho v \cdot w,$$

则有

$$\left\|\mu^{-1}[\rho]\right\|_{L\left(X_n^*, X_n\right)} \le \left(\inf_{x\in\Omega} \rho(x)\right)^{-1},$$

$$\left\|\mu[\rho]v\right\|_{X_n^*} = \sup_{w\in X_n} \frac{\left|\int_\Omega \rho v \cdot w\right|}{\|v\|_{X_n}} \le C_1(n)\|\rho v\|_{L^1(\Omega)},$$

$$\left\|\mu[\rho]\right\|_{L\left(X_n, X_n^*\right)} = \sup_{v\in X_n} \frac{\left\|\mu[\rho]v\right\|_{X_n^*}}{\|v\|_{X_n}} \le C_1^2(n)\|\rho\|_{L^1(\Omega)},$$

此外，有不等式：

DOI: 10.12677/aam.2026.155242

$$\begin{aligned}
&\left\|\mu^{-1}\left[\rho^{1}\right]-\mu^{-1}\left[\rho^{2}\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\\
&=\left\|\mu^{-1}\left[\rho^{2}\right]\left(\mu\left[\rho^{2}\right]-\mu\left[\rho^{1}\right]\right)\mu^{-1}\left[\rho^{1}\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\\
&\le\left\|\mu^{-1}\left[\rho^{2}\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\left\|\mu^{-1}\left[\rho^{1}\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\left\|\mu\left[\rho^{2}\right]-\mu\left[\rho^{1}\right]\right\|_{L\left(X_n,X_n^*\right)}\\
&\le C_1^2(n)\left(\inf_{x\in\Omega}\rho^1(x)\right)^{-1}\left(\inf_{x\in\Omega}\rho^2(x)\right)^{-1}\left\|\rho^1-\rho^2\right\|_{L^1(\Omega)}\\
&\le C(n,n)\left\|\rho^1-\rho^2\right\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

于是有：

$$u_n(t)=\mu^{-1}[\rho]\left(\left(\rho_0u_0\right)^*+\int_0^t N\left[\rho(s),d(s),u_n(s)\right]\mathrm{ds}\right),$$

其中对于 $\forall\psi\in X_n$ ，有

$$\left\langle N\left[\rho,d,u_n\right],\psi\right\rangle=\int_\Omega\left[\mu\Delta u_n-\nabla\cdot\left(\rho u_n\otimes u_n\right)-\lambda\Delta d\cdot\nabla d-\varepsilon\nabla\rho\cdot\nabla u_n\right]\cdot\psi.$$

令 $\rho=\tilde{T}(u_n),d=\tilde{R}(u_n)$ ，则有 $u_n\in C\left([0,T];X_n\right)$ ，且

$$u_n(t)=\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n)\right]\left(\left(\rho_0u_0\right)^*+\int_0^t N\left[\tilde{T}(u_n),\tilde{R}(u_n),u_n\right]\right)$$

从而：

$$\begin{aligned}
&\left\|w_n(t)\right\|_{C([0,T];X_n)}\\
&=\left\|\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n)\right]\left(\left(\rho_0u_0\right)^*+\int_0^t N\left[\tilde{T}(u_n),\tilde{R}(u_n),u_n\right]\right)\right\|_{C([0,T];X_n)}\\
&=\sup_{0\le t\le T}\left\|w_n(t)\right\|_{X_n}\\
&\le\sup_{0\le t\le T}\left\|\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n)\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\left\|\left(\rho_0u_0\right)^*\right\|_{X_n^*}\\
&\quad+\sup_{0\le t\le T}\left\|\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n)\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)}\left\|\int_0^t N\left[\tilde{T}(u_n),\tilde{R}(u_n),u_n\right]\right\|_{X_n^*}\\
&\le\sup_{0\le t\le T}\left(\inf_{x\in\Omega}\tilde{T}(u_n)(x)\right)^{-1}\cdot C_1(n)\left\|\rho_0u_0\right\|_{L^1(\Omega)}\\
&\quad+\sup_{0\le t\le T}\left(\inf_{x\in\Omega}\tilde{T}(u_n)(x)\right)^{-1}\cdot\left[C_1(n)\left(\int_0^T\int_\Omega\mu\left|\Delta u_n\right|+\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\cdot\left(\tilde{T}(u_n)u_n\otimes u_n\right)\right|\right)\right.\\
&\quad\left.+\int_0^T\int_\Omega\lambda\left|\Delta\tilde{R}(u_n)\cdot\nabla\tilde{R}(u_n)\right|+\int_0^T\int_\Omega\varepsilon\left|\nabla\tilde{T}(u_n)\cdot\nabla u_n\right|\right]\\
&\le\frac{1}{\underline{\rho}}C_1(n)\left\|\rho_0u_0\right\|_{L^1(\Omega)}+\frac{1}{\underline{\rho}}\left[\mu T|\Omega|^{\frac{1}{2}}C_1(n)\sup_{0\le t\le T}\left(\int_\Omega\left|\Delta u_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\quad+C(n)\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\tilde{T}(u_n)\right|\left|u_n\right|^2+\left|\tilde{T}(u_n)\right|\left|\nabla u_n\right|\left|u_n\right|\\
&\quad+T^{\frac{1}{2}}\lambda C(n)\left(\int_0^T\int_\Omega\left|\Delta\tilde{R}(u_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{0\le t\le T}\left(\int_\Omega\left|\nabla\tilde{R}(u_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\left.+\varepsilon C(n)\left(\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\tilde{T}(u_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left|\nabla\tilde{T}(u_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\underline{\rho}} C_1(n)\|\rho_0 u_0\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{\underline{\rho}}\Big[\mu T|\Omega|^{\frac{1}{2}} C(n)\|u_n\|_{C([0,T];X_n)} \\
&\quad + TC\left(T,\varepsilon,\rho_0,n,\|u_n\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)\|u_n\|^2_{C([0,T];X_n)} \\
&\quad + \varepsilon TC(n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}\bar{\rho}\|u_n\|_{C([0,T];X_n)} + \varepsilon T^{\frac{1}{2}} C\left(T,d_0,n,\|u_n\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right)\Big] \\
&\le \frac{1}{\underline{\rho}} T^{\frac{1}{2}} C\left(T,\varepsilon,\rho_0,d_0,n,\lambda_n,\|u_n\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right) + \frac{1}{\underline{\rho}} C_1(n)\|\rho_0 u_0\|_{L^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

所以必存在 $T_1(n) > 0$，使得 $\|w_n\|_{C([0,T];X_n)} \le k$，对于一切 $\|u_n\|_{C([0,T];X_n)} \le k$ 均成立，其中 k 是大于 $\frac{1}{\underline{\rho}} C_1(n)\|\rho_0 u_0\|_{L^1(\Omega)}$ 的正常数。

令 $\|u_n^1\|_{C([0,T];X_n)}$ 和 $\|u_n^2\|_{C([0,T];X_n)}$ 均小于 k，所以，我们可推出下面估计：

$$
\begin{aligned}
&\|w_n^1 - w_n^2\|_{C([0,T];X_n)} + \sup_{0\le t\le T}\left\|\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n^1)\right] - \mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n^2)\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)} \left\|(\rho_0 u_0)^* + \int_0^T N_2\right\|_{X_n^*} \\
&\le \sup_{0\le t\le T}\left\|\mu^{-1}\left[\tilde{T}(u_n^1)\right]\right\|_{L\left(X_n^*,X_n\right)} \left\|\int_0^T N_1 - N_2\right\|_{X_n^*} \\
&\le C(n,\underline{\rho}) \sup_{0\le t\le T}\left\|\tilde{T}(u_n^1) - \tilde{T}(u_n^2)\right\|_{L^1(\Omega)} \left\|\int_0^T N_1 - N_2\right\|_{X_n^*} \\
&\le TC(T,\varepsilon,k,n,\underline{\rho})\|u_n^1 - u_n^2\|_{C([0,T];X_n)} \left\|\int_0^T N_1 - N_2\right\|_{X_n^*}
\end{aligned}
$$

由 $\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}$ 的定义，有下面推导

$$
\int_0^T\int_\Omega \mu\left|\Delta\left(u_n^1 - u_n^2\right)\right| \le \mu T|\Omega|^{\frac{1}{2}} C_2(n)\|u_n^1 - u_n^2\|_{C([0,T];X_n)}
$$

由(3.3.14)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\left(\tilde{T}(u_n^1) - \tilde{T}(u_n^2)\right)\right||u_n^1|^2 \\
&\le T|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_n^1\|^2_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \sup_{0\le t\le T}\left(\int_\Omega\left|\nabla\left(\tilde{T}(u_n^1) - \tilde{T}(u_n^2)\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le TC(T,n,\varepsilon,k)\|u_n^1 - u_n^2\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\left(\tilde{T}(u_n^1) - \tilde{T}(u_n^2)\right)\right||\nabla u_n^1||u_n^1| \\
&\le T\|u_n^1\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \sup_{0\le t\le T}\left(\int_\Omega\left|\tilde{T}(u_n^1) - \tilde{T}(u_n^2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla u_n^1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le TC(T,n,\varepsilon,k)\|u_n^1 - u_n^2\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\left(\left(\tilde{T}\left(u_n^1\right)-\tilde{T}\left(u_n^2\right)\right)u_n^1\otimes u_n^1\right)\right| \\
&\le C\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\left(\tilde{T}\left(u_n^1\right)-\tilde{T}\left(u_n^2\right)\right)\right|\left|u_n^1\right|^2+C\int_0^T\int_\Omega\left|\tilde{T}\left(u_n^1\right)-\tilde{T}\left(u_n^2\right)\right|\left|\nabla u_n^1\right|\left|u_n^1\right| \\
&\le TC\left(T,n,\varepsilon,k\right)\left\|u_n^1-u_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

再由(3.3.10)和(3.3.14)可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\cdot\left(\tilde{T}\left(u_n^2\right)\left(u_n^1-u_n^2\right)\right)\otimes u_n^1+\tilde{T}\left(u_n^2\right)u_n^2\otimes\left(u_n^1-u_n^2\right)\right| \\
&\le TC\left(T,\rho_0,\varepsilon,n,k\right)\left\|u_n^1-u_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

并且由(3.3.20)和(3.3.21)可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\tilde{R}\left(u_n^1\right)\cdot\Delta\left(\tilde{R}\left(u_n^1\right)-\tilde{R}\left(u_n^2\right)\right)\right|+\left|\nabla\left(\tilde{R}\left(u_n^1\right)-\tilde{R}\left(u_n^2\right)\right)\cdot\Delta\tilde{R}\left(u_n^2\right)\right| \\
&\le TC\left(T,d_0,n,k\right)\left\|u_n^1-u_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

由(3.1.13)和(3.1.14)及(3.2.25)可推出

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\left(\tilde{T}\left(u_n^1\right)-\tilde{T}\left(u_n^2\right)\right)\cdot\nabla u_n^1\right|+\left|\nabla\tilde{T}\left(u_n^2\right)\cdot\nabla\left(u_n^1-u_n^2\right)\right| \\
&\le TC\left(T,\rho_0,d_0,n,k,\varepsilon\right)\left\|u_n^1-u_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}
\end{aligned}
$$

综合上述推导，我们有

$$
\left\|w_n^1-w_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}\le TC\left(T,n,\varepsilon,\rho_0,d_0,k\right)\left\|u_n^1-u_n^2\right\|_{C([0,T];X_n)}
$$

在 Banach 空间 $C\left(\left[0,T\right];X_n\right)$ 上依据标准的不动点方法，在很小的区间 $\left[0,T\left(n\right)\right]$，$T\left(n\right)\le T$ 时存在局部解 ρ_n,u_n,d_n。接下来，我们证明对于 $\forall n$，$T\left(n\right)=T$，即证明 $\left\|\rho_n u_n\right\|_{L^1(\Omega)}$ 在整个时间区间 $\left[0,T\left(n\right)\right]$ 上始终小于 k。

将(3.1.2)关于 t 作微分，再将 $\psi=u_n\left(t\right)$ 代入，可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{2}\rho_n\left|u_n\right|^2+\frac{\lambda}{2}\left|\nabla d_n\right|^2+\lambda F\left(d_n\right)+\int_\Omega\mu\left|\nabla u_n\right|^2+\lambda\nu\left|\Delta d_n-f\left(d_n\right)\right|^2=0.
$$

将(3.1.1)乘以 ρ_n，并在 Ω 上积分，可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\rho_n\right|^2+2\varepsilon\int_\Omega\left|\nabla\rho_n\right|^2\left(t\right)=0.
$$

结合以上各式，可得

$$
\sup_{0\le t\le T(n)}\int_\Omega\rho_n\left|u_n\right|^2\left(t\right)\le 4\lambda\left|\Omega\right|\left\|F\right\|_{L^\infty}+\int_\Omega\rho_0\left|u_0\right|^2+\lambda\left|\nabla d_0\right|^2=M,
$$

和

$$
\sup_{0\le t\le T(n)}\int_\Omega\rho_n^2=\int_\Omega\rho_0^2.
$$

再由于

$$
\int_\Omega\rho_n\left|u_n\right|\le\left|\Omega\right|^{\frac{1}{4}}\left(\int_\Omega\rho_n\left|u_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\rho_n^2\right)^{\frac{1}{4}}
$$

则有

$$\sup_{0\le t\le T(n)}\frac{1}{\underline{\rho}}C_1(n)\|\rho_n u_n\|_{L^1(\Omega)}\le\frac{1}{\underline{\rho}}C_1(n)|\Omega|^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\rho_0^2\right)^{\frac{1}{4}}+1=k.$$

所以，多次利用不动点方法，对于所有固定的 n，有 $T(n)$ 可能到 T。从而，可得下列与 n 无关的一系列估计：

$$0<\underline{\rho}\le\rho_n\le\overline{\rho} \tag{3.22}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega\rho_n|u_n|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{3.23}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega|\rho_n|^2\le C(\rho_0) \tag{3.24}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega|\nabla d_n|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{3.25}$$

$$\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_n|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{3.26}$$

$$\varepsilon\int_0^T\int_\Omega|\nabla\rho_n|^2\le C(\rho_0) \tag{3.27}$$

$$\int_0^T\int_\Omega|\nabla d_n|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0,T) \tag{3.28}$$

4. 定理 1.1 的证明

本节，在 $n\to\infty$ 时，对初边值问题(3.1)~(3.4)及(1.5)~(1.10)的解 (ρ_n,u_n,d_n) 取极限。利用引理 3.3，可得弱解 (ρ,u,d) 存在，并且满足下述估计：

$$0<\underline{\rho}\le\rho\le\overline{\rho} \tag{4.1}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega\rho|u|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{4.2}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega|\rho|^2\le C(\rho_0) \tag{4.3}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega|\nabla d|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{4.4}$$

$$\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0) \tag{4.5}$$

$$\varepsilon\int_0^T\int_\Omega|\nabla\rho|^2\le C(\rho_0) \tag{4.6}$$

$$\int_0^T\int_\Omega|\nabla d|^2\le C(\rho_0,u_0,d_0,T) \tag{4.7}$$

并且存在 $q>1$，使得 $\rho_t,\Delta\rho\in L^q((0,T)\times\Omega)$，对于等式(3.11)在 $(0,T)\times\Omega$ 上几乎处处满足。对于上述估计，在 $\varepsilon\to0$ 时，取极限可得解 $\rho_\varepsilon,u_\varepsilon,d_\varepsilon$，从而定理 1.1 得证。

参考文献

[1] Wang, G. and Guo, B. (2017) Existence and Uniqueness of the Weak Solution to the Incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz Model in 2-Dimension. *Acta Mathematica Scientia*, **37**, 1361-1372. https://doi.org/10.1016/s0252-9602(17)30078-4

[2] 黄丙远，黄金锐，奚悦. 二维不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 方程组的整体强解[J]. 华南师范大学学报

(自然科学版), 2017, 49(6): 113-118.

[3] Liu, H. and Gao, H. (2021) Existence of Strong Solutions for the Generalized Nonhomogeneous Navier–stokes–landau–lifshitz System. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 47. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01481-2

[4] Liu, H., Sun, C. and Xin, J. (2021) Well-Posedness for the Generalized Navier-Stokes-Landau-Lifshitz Equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 32. https://doi.org/10.1007/s00033-020-01467-6

[5] 申会玲. 二维不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程的整体弱解的存在性[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2022, 21(1): 47-52.

[6] Xu, X. and Zhang, Z. (2012) Global Regularity and Uniqueness of Weak Solution for the 2-D Liquid Crystal Flows. *Journal of Differential Equations*, **252**, 1169-1181. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.028

[7] Temam, R. (1977) Navier-Stokes Equations (Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2). North Holland.

[8] Ding, S.J., Huang, J.R. and Liu, X.E. (2012) Robin Boundary Value Problem for One-Dimensional Landau-Lifshitz Equations. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **28**, 2033-2066. https://doi.org/10.1007/s10114-012-0016-4

[9] 刘新, 张建文, 任永华. 三维变密度不可压缩 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 方程组的整体强解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2024, 40(3): 465-474.