Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 88-95**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155210

关于不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$

曾　爽

西南大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2026年4月13日；录用日期：2026年5月7日；发布日期：2026年5月14日

摘　要

本文运用同余式、递推序列和Pell方程等方法，对不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$展开研究，证明了该方程共有16组整数解，且不存在正整数解。

关键词

不定方程，整数解，递归序列，平方剩余

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$

Shuang Zeng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 14, 2026

Abstract

In this paper, we use Pell equation, quadratic residue, recursive sequence and other methods to study the Diophantine equation, $5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$. It proves that this equation has exactly 16 integer solutions and no positive integer solutions.

Keywords

Diophantine Equation, Inter Solution, Recursive Sequence, Squared Residual

文章引用: 曾爽. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 88-95.
DOI: 10.12677/aam.2026.155210

1. 引言与结论

对形如 $px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$)的不定方程，这类方程兼具连续整数乘积与参数约束的双重特征，既与经典的丢番图方程问题密切相关，也反映了特定参数条件下整数解分布的复杂性，其正整数解的研究长期受到数论领域的关注[1]-[11]，现已有一些重要结论。1971 年 Cohn 运用 Pell 方程、二次平方剩余、递归序列等方法，证明了 $p=1,q=2$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$ [1]；1991 年罗明证明了 $p=1,q=7$ 时，仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$ [2]；2025 年李翰证明了当 $p=5,q=11$ 时，仅有 16 组整数解，没有正整数解[11]。但当 $p=5,q=22$ 时虽然其形式与前述已解决情形相近，但该组参数并不能直接套用已有论证，需要重新寻找满足该组参数方程的同余排斥结构，所以此不定方程正整数解的问题仍未解决。因此本文将在以前的基础上讨论 $p=5,q=22$ 时的情形，证明了：

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

没有正整数解。

2. 预备知识

化简(1)得：

$$25[x(x+3)][(x+1)(x+2)]=110[y(y+3)][(y+1)(y+2)]$$

$$25(x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1)=110(y^2+3y+1-1)(y^2+3y+1+1)$$

$$25(x^2+3x+1)^2-25=110(y^2+3y+1)^2-110$$

由此得到如下形式：

$$[5(x^2+3x+1)]^2-110(y^2+3y+1)^2=-85 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-110y^2=-85$ 的全部整数解由以下两个结合类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{110}=\pm(5+\sqrt{110})(u_n+v_n\sqrt{110})=\pm(5+\sqrt{110})(21+2\sqrt{110})^n, n\in\mathbb{N}^*,$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{110}=\pm(-5+\sqrt{110})(u_n+v_n\sqrt{110})=\pm(-5+\sqrt{110})(21+2\sqrt{110})^n, n\in\mathbb{N}^*,$$

其中 $5+\sqrt{110}$ 是方程 $x^2-110y^2=-85$ 的最小整数解， $21+2\sqrt{110}$ 是 Pell 方程 $x^2-110y^2=1$ 的基本解。

易知 $\overline{y}_n=y_{-n}$， 且方程(2)的解需要满足以下两个式子

$$(2y+3)^2=4y_n+5,$$

$$(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5.$$

故 $y_n\ge -1$、 $\overline{y}_n\ge -1$， 并且方程 $x^2-110y^2=-85$ 的两个结合类都只取正好，于是方程(2)的解需要满足

$$(2y+3)^2 = \pm 4y_n + 5 \tag{3}$$

不难推出以下关系式成立：

$$y_{n+1} = 42y_n - y_{n-1},\ y_0 = 1, y_1 = 31 \tag{4}$$

$$u_{n+1} = 42u_n - u_{n-1},\ u_0 = 1, u_1 = 21 \tag{5}$$

$$v_{n+1} = 42v_n - v_{n-1},\ v_0 = 0, v_1 = 2 \tag{6}$$

$$v_{2n} = u_n^2 + 110v_n^2 = 2u_n^2 - 1, v_{2n} = 2u_n v_n \tag{7}$$

$$y_n = u_n + 5v_n \tag{8}$$

$$u_{n+2km} \equiv (-1)^k u_n \pmod{u_m} \tag{9}$$

$$v_{n+2km} \equiv (-1)^k v_n \pmod{v_m} \tag{10}$$

$$y_{n+2km} \equiv (-1)^k y_n \pmod{u_m} \tag{11}$$

以下的内容将证明(3)式仅在 $n = -2, -1, 0$ 时成立，进而求得方程(2)的全部整数解，最后得到方程(1)的全部整数解。

3. 分类讨论

3.1. 当 $(2y+3)^2 = 4y_n + 5$ 时

引理 1 设 $2 \mid m, m > 0$，则 $\left(\dfrac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\dfrac{u_m \pm 4v_m}{7}\right)$。

证明 当 $2 \mid m, m > 0$ 时，由(5)式知 $2 \mid u_m$，由(7)式知

$$u_{2m} = 2u_m^2 - 1 \equiv 1 \pmod 8,$$

故

$$\left(\frac{-1}{u_{2m}}\right) = 1, \left(\frac{2}{u_{2m}}\right) = 1, \left(\frac{5}{u_{2m}}\right) = 1,$$

因为，$2 \mid m$，故有 $u_m \equiv 1 \pmod 4$，从而 $\left(\dfrac{-1}{u_m}\right) = 1$，由(8)式可推出

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) &= \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 40u_m v_m + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) \\
&= \left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m \pm 4v_m}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{u_{2m}}{u_m \pm 4v_m}\right) \\
&= \left(\frac{u_m^2 + 110v_m^2 - (u_m \pm 4v_m)(u_m \mp 4v_m)}{u_m \pm 4v_m}\right) \\
&= \left(\frac{126v_m^2}{u_m \pm 4v_m}\right) \\
&= \left(\frac{2}{u_m \pm 4v_m}\right)\left(\frac{9}{u_m \pm 4v_m}\right)\left(\frac{7}{u_m \pm 4v_m}\right) \\
&= \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{7}\right).
\end{aligned}$$

引理 2 若 $4y_n+5$ 是平方数，则

$$n\equiv -2,-1,0\left(\bmod 2^3\times 3\times 5\right).$$

证明 对序列 $\{4y_n+5\}$ 取不同模的方法来证明。

mod19，排除 $n\equiv 1,2\left(\bmod 5\right)$，因为此时 $4y_n+5\equiv 1,2$，而 1，2 是 mod19 的平方非剩余，故排除 $n\equiv 1,2\left(\bmod 5\right)$，剩余 $n\equiv 0,3,4\left(\bmod 5\right)$。为节省篇幅，下面不再赘述排除理由。

mod1721，排除 $n\equiv 1,2,3,6\left(\bmod 10\right)$，剩余 $n\equiv 0,4,5,8,9\left(\bmod 10\right)$；

mod151, 20071，排除 $n\equiv 1,2,3,5,6,7,8,9,12\left(\bmod 15\right)$，剩余 $n\equiv 0,4,10,14,15,19,25,28,29\left(\bmod 30\right)$；

mod809, 3929，排除 $n\equiv 4,10,14,25\left(\bmod 30\right)$，剩余 $n\equiv 0,15,19,28,29\left(\bmod 30\right)$；

mod61，排除 $n\equiv 19\left(\bmod 60\right)$，剩余 $n\equiv 0,15,28,29,30,45,49,58,59\left(\bmod 60\right)$；

mod599, 641, 839, 29921，排除 $n\equiv 15,28,29,30,45,49,58,59,75,88,89,90,105,109\left(\bmod 120\right)$，剩余 $n\equiv 0,60,118,119\left(\bmod 120\right)$；

下面，利用计算的方法接着排除 $n\equiv 60\left(\bmod 120\right)$，令 $n=120k+60$。若 $k=2k_1$，则 $n=240k_1+60$，那么 $n\equiv 12\left(\bmod 48\right)$，对序列 $\{4y_n+5\}$ 取 mod817 可排除 $n\equiv 12\left(\bmod 48\right)$ 的情形；若 $k=2k_1+1$，那么 $n\equiv 36\left(\bmod 48\right)$，对序列 $\{4y_n+5\}$ 取 mod490 同样可排除 $n\equiv 36\left(\bmod 48\right)$ 的情形。所以排除 $n\equiv 60\left(\bmod 120\right)$。

综上所述，

$$n\equiv -2,-1,0\left(\bmod 2^3\times 3\times 5\right)。$$

引理 3 设

$$n\equiv 0\left(\bmod 2^3\times 3\times 5\right),$$

当且仅当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 是平方数。

证明 设 $n\neq 0$，令

$$n=(4k\pm 1)\times 2\times 3\times 5\times 2^t\ (t\geq 2)。$$

现取 m 为 2^t、5×2^t、3×2^t、$3\times 5\times 2^t$ 之一，由引理 1 和(8)、(11)可推出

$$4y_n+5=4u_n+20v_n+5\equiv \pm 20v_m+5\left(\bmod u_{2m}\right),$$

故

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{7}\right)。$$

对 $\{u_m+4v_m\}$ 取 mod 7，得到的两个剩余序列周期均为 4，再对 $\{2^t\}$ 取 mod 4，得到的剩余周期为 1。

情况 1 对于序列 $\{u_m+4v_m\}$

取 $m=3\times 2^t$，此时 $m\equiv 3\left(\bmod 4\right)$，$u_m+4v_m\equiv 6\left(\bmod 7\right)$，故对所有 m 均有

$$\left(\frac{u_m+4v_m}{7}\right)=-1,$$

进而

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=-1,$$

所以 $4y_n+5$ 为非平方数。

情况 2 对于序列$\{u_m-4v_m\}$

取$m=5\times 2^t$，此时$m\equiv 1(\bmod 4)$，$u_m-4v_m\equiv 6(\bmod 7)$，故对所有$m$均有

$$\left(\frac{u_m+4v_m}{7}\right)=-1,$$

进而

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=-1,$$

所以$4y_n+5$为非平方数。

因此当且仅当$n=0$时，$4y_n+5=3^2$为平方数。

引理 4 设

$$n\equiv -1\left(\bmod 2^3\times 3\times 5\right),$$

则当且仅当$n=-1$时，$4y_n+5$是平方数。

证明 设$n\neq -1$，令

$$n=-1+(4k\pm 1)\times 2\times 3\times 5\times 2^t\ (t\geq 2)。$$

由(11)式可知，

$$4y_n+5=4y_{-1+2\times(4k\pm 1)\times 3\times 5\times 2^t}+5\equiv -4y_{-1}+5\equiv -39(\bmod u_m),$$

其中$y_{-1}=31$，m为2^t、5×2^t、3×2^t、$3\times 5\times 2^t$中的任意一个。

因为$2\mid m$，此时$u_m\equiv 1(\bmod 4)$，又由(5)易推出$u_m\equiv 1(\bmod 3)$，则

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-39}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{13}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{13}\right)。$$

对u_m取$\bmod 13$，剩余序列周期为 14，对序列$\{2^t\}$取$\bmod 14$，剩余序列周期为 3。

令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0(\bmod 3),\\ 3\times 2^t & t\equiv 1(\bmod 3),\\ 5\times 2^t & t\equiv 2(\bmod 3).\end{cases}$$

Table 1. The situation of $u_m(\bmod 13)$

表 1. $u_m(\bmod 13)$的情况

$t\geq 2(\bmod 3)$	0	1	2
$m(\bmod 14)$	8	6	6
$u_m(\bmod 13)$	5	5	5

表 1 中所有的u_m均为$\bmod 13$的平方剩余，故

$$\left(\frac{u_m}{13}\right)=-1,$$

进而，

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$$

从而当且仅当 $n=-1$ 时，$4y_n+5=7^2$ 为平方数。

引理 5 设

$$n\equiv -2\left(\bmod 2^3\times 3\times 5\right),$$

则当且仅当 $n=-2$ 时，$4y_n+5$ 是平方数。

证明 设 $n\neq -2$，令

$$n=-2+\left(4k\pm 1\right)\times 2\times 3\times 5\times 2^t\ \left(t\geq 2\right)。$$

由(11)式可知，

$$4y_n+5=4y_{-2+2\times(4k\pm1)\times3\times5\times2^t}+5\equiv -4y_{-2}+5\equiv -1839\left(\bmod u_m\right),$$

其中 $y_{-2}=461$，m 为 2^t、5×2^t、3×2^t、$3\times 5\times 2^t$ 中的任意一个。

因为 $2\mid m$，此时 $u_m\equiv 1\left(\bmod 4\right)$，又由(5)易推出 $u_m\equiv 1\left(\bmod 3\right)$，则

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-1839}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{613}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{613}\right)。$$

对 u_m 取 $\bmod 613$，剩余序列周期为 614，对序列 $\left\{2^t\right\}$ 取 $\bmod 614$，剩余序列周期为 102。令

$$m=\begin{cases}3\times 2^t & t\equiv 13,29,30,33,34,39,54,55,57,69,78,81,85,94\left(\bmod 102\right),\\ 5\times 2^t & t\equiv 1,11,21,23,24,25,28,31,32,36,48,51,58,66,\\ & \quad 72,73,74,86,90,99\left(\bmod 102\right),\\ 3\times 5\times 2^t & t\equiv 3,15,35,38,49,50,52,75\left(\bmod 102\right),\\ 2^t & t\equiv \text{其他}\left(\bmod 102\right).\end{cases}$$

则对所有的 u_m 均为 $\bmod 613$ 的平方非剩余，故

$$\left(\frac{u_m}{613}\right)=-1,$$

进而，

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$$

从而当且仅当 $n=-2$ 时，$4y_n+5=43^2$ 为平方数。

3.2. 当 $\left(2y+3\right)^2=4\overline{y}_n+5$ 时

引理 6 当且仅当 $n=0$ 时，$4\overline{y}_n+5$ 是平方数。

证明 因为

$$\left(2y+3\right)^2=4\overline{y}_n+5=-4y_n+5\geq 0,$$

解得 $y_n\leq 1$，由(4)知 $y_0=1$，且 $\left\{y_n\right\}$ 是增序列，又因为 $-4y_0+5=1^2$，所以当且仅当 $n=0$ 时，$4\overline{y}_n+5$ 是平方数，结论成立。

4. 定理证明

定理 不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$$

的全部整数解为：

$$(x,y)=(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0),(0,-3),(-1,-3),(-2,-3),(-3,-3),$$
$$(0,-1),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-2),(-1,-2),(-2,-2),(-3,-2),$$

不存在正整数解。

证明 由引理 3 知 $(2y+3)^2=4y_0+5=3^2$，解得 $y=0$ 或者 $y=-3$，相对应的整数解为

$$(-3,-3),(-2,-3),(-1,-3),(0,3),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0).$$

由引理 4 知 $(2y+3)^2=4y_{-1}+5=7^2$，解得 $y=2$ 或者 $y=-5$，将 y 的值带入方程(2)，得 $\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2=13225$，即 $x^2+3x+1=\pm 23$，此时 x 没有整数解。

由引理 5 知 $(2y+3)^2=4y_{-2}+5=43^2$，解得 $y=20$ 或者 $y=-23$，将 y 的值带入方程(2)，得 $\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2=23377225$，即 $x^2+3x+1=\pm 967$，此时 x 没有整数解。

由引理 6 知 $(2y+3)^2=-4y_0+5=1^2$，解得 $y=-1$ 或者 $y=-2$，相对应的整数解为

$$(-3,-2),(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-1).$$

综上所述，该不定方程有 16 组整数解，没有正整数解，证毕。

5. 结论

本文以不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=22y(y+1)(y+2)(y+3)$$

研究首先将原方程转化为

$$\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2-110\left(y^2+3y+1\right)^2=-85$$

的形式，明确其解与 Pell 方程 $x^2-110y^2=-85$ 两个结合类之间的结构关系，建立了相关序列 $\{y_n\}$ 的递推关系

$$y_{n+1}=42y_n-y_{n-1}\ \left(y_0=1,y_1=31\right)$$

及相关同域性质；随后通过多轮模运算与引理证明，逐步排除非解情形，最终证实该方程共存在 16 组整数解，分别为

$$(x,y)=(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0),(0,-3),(-1,-3),(-2,-3),(-3,-3),$$
$$(0,-1),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-2),(-1,-2),(-2,-2),(-3,-2),$$

且不存在正整数解。本文的核心贡献在于填补了特定参数组合下同类不定方程的研究空白。对于形如

$$px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$$

其中 $(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$ 的不定方程，此前学界已在 $p=1,q=2$、$p=1,q=7$、$p=5,q=11$ 等参数下取得求解成果，但 $p=5,q=22$ 的情形长期未得到解决。本文通过严谨的推导与验证，明确了该参数组合下方程的解的数量与具体形式，进一步完善了此类不定方程的解谱，为今后可进一步研究该类不定方程正整数解的存在性与判定准则提供关键的基础结论。

参考文献

[1] Cohn, J.H.E. (1971) The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$. *Pacific Journal of Mathematics*, **37**, 331-335. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.331

[2] 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 1-8.

[3] 段辉明, 杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2009, 32(1): 60-63.

[4] 郭凤明, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(5): 101-105.

[5] 王聪. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=30y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2016, 33(1): 29-32.

[6] 张配, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=39y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2017, 19(3): 120-122.

[7] 李妮. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2017, 34(4): 41-45.

[8] 卢安然. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(11): 265-270.

[9] 张艺宝. 关于不定方程 $5x(x1)(x2)(x3)=42y(y1)(y2)(y3)$ [J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2105-2109.

[10] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 15-29.

[11] 李涵. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 199-204.