Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 44-60
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155207

一类六次系统的中心焦点问题

江炫杰，张文迪，杨博彬，付云龙，樊智辉*

河南科技大学数学与统计学院，河南 洛阳

收稿日期：2026年4月9日；录用日期：2026年5月2日；发布日期：2026年5月12日

摘 要

针对一类平面光滑六次自治微分系统，本文聚焦于其奇点处的中心焦点判定这一微分方程定性理论中的经典问题。研究中首先对系统进行极坐标变换，在此基础上开展幂级数展开，通过逐次积分递推构造得到系统的各阶Lyapunov常数；整个推导过程借助符号计算软件Maple完成严格的符号运算与分析，得到了8个中心条件和11个5阶弱焦点条件，为该类高次系统的局部动力学行为分析提供了可行的理论支撑。

关键词

六次系统，Lyapunov常数，中心，焦点

The Center-Focus Problem for a Class of Sixth-Degree Systems

Xuanjie Jiang, Wendi Zhang, Bobin Yang, Yunlong Fu, Zhihui Fan*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan

Received: April 9, 2026; accepted: May 2, 2026; published: May 12, 2026

Abstract

For a class of planar smooth sixth-degree autonomous differential systems, this paper focuses on the center-focus determination at singular points, a classical problem in the qualitative theory of differential equations. We first transform the system into polar coordinates and then perform a power series expansion. By successive integration, the Lyapunov constants are constructed recursively. The entire derivation is carried out with the aid of the symbolic computation software Maple, enabling rigorous symbolic computation and analysis. As a result, eight center conditions and eleven conditions for a weak focus of order five are obtained, providing a feasible theoretical basis for analyzing the local dynamical behavior of such high-degree systems.

*通讯作者。

文章引用: 江炫杰, 张文迪, 杨博彬, 付云龙, 樊智辉. 一类六次系统的中心焦点问题[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 44-60. DOI: 10.12677/aam.2026.155207

Keywords

Sixth-Degree System, Lyapunov Constant, Center, Focus

1. 引言

中心焦点问题是平面常微分方程定性理论中的经典问题之一。早在 19 世纪末，Henri Poincaré 与 Aleksandr Lyapunov 通过研究奇点邻域的局部结构，建立了判定中心与焦点的基本方法，并引入了后来称为 Poincaré-Lyapunov 常数的一类判定量[1] [2]。在此基础上，Nikolai Bautin 于 1939 年系统研究了焦点量的结构及其有限性，奠定了中心－焦点问题与极限环分岔研究的理论基础[3]。

随着研究的深入，中心焦点问题已在低次多项式系统(如二次与三次系统)中取得了较为系统的结果[4]-[6]。然而，对于高次多项式系统，由于非线性项数量随次数迅速增加，焦点量的计算复杂度显著提高，相关研究仍相对有限。近年来，随着计算机代数系统的发展，符号计算方法逐渐成为处理该问题的重要工具，可有效实现高阶 Lyapunov 常数的递推计算与判定[7] [8]。

尽管如此，对于六次及以上多项式系统，其 Lyapunov 常数的显式表达仍然较为复杂，特别是在研究高阶弱焦点及多重极限环分岔时，理论分析面临较大困难。因此，选取具有特定结构的高次系统作为研究对象，对于揭示焦点量的内在结构具有重要意义。

基于此，本文研究一类仅含 x^6 项的六次平面光滑多项式系统。该类系统在保留高阶非线性特征的同时，具有一定的结构简化性，使得高阶 Lyapunov 常数的系统计算成为可能，从而为五阶弱焦点的判定及相关极限环分岔问题的研究提供了可行途径。

2. 主要结果

本文研究了以下平面光滑六次系统的中心焦点判定问题，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot xy + a_3 \cdot y^2 + a_4 \cdot x^6 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + b_1 \cdot x^2 + b_2 \cdot xy + b_3 \cdot y^2 + b_4 \cdot x^6 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in R$，显然 $(0,0)$ 点是系统(1)的奇点，通过极坐标变换计算出焦点量，可以得到相对应的中心条件和焦点条件。

记 V_k 为系统(1)的第 k 阶焦点量，其中 $k \ge 1$ 且为整数。我们在计算过程中，第一个非零 V_n 的 n 总是一个奇数，即 $n = 2p+1$，其中 $p > 0$，相应的弱焦点被称为 p 阶。如果对于所有的 $p \ge 1$ 都有 $V_p = 0$，则称 $(0,0)$ 点为系统(1)的中心。现在我们用如下两个定理展示本文章的主要研究结果：

定理 1：如果满足以下的条件之一，则原点为系统(1)的中心，

(c1) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$a_4 = 0$，$b_2 = 0$，

(c2) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$a_4 = 0$，$b_3 = -b_1$，$b_2 b_4 = 0$，$7a_2 - 6b_1 \ne 0$，

(c3) $a_1 = 0$，$a_2 = -2b_3$，$a_4 = 0$，$b_2 = 0$，

(c4) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$a_4 = 0$，$b_2 b_4 = 0$，$b_3 = 0$，$b_1 \ne 0$， (c5) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$b_1 = 0$，$b_3 = 0$，$b_4 = 0$，

(c6) $a_1 = 0$，$a_2 = 2b_1$，$a_3 = 0$，$a_4 = 0$，$b_2 = 0$，

(c7) $a_2 = 0$，$b_1 = 0$，$b_3 = 0$，$b_4 = 0$，

(c8) $a_1 = 0$，$a_2 = 2b_1$，$a_3 = 0$，$b_3 = -b_1$，$b_2 b_4 = 0$.

定理 2：如果满足以下条件，则原点为系统(1)的 5 阶弱焦点，

(f1) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$b_2 = 0$，$a_2 = -\frac{1}{7}\left(14b_1 - 20b_3\right)$，$a_4 \neq 0$，$b_3 \neq 0$，

(f2) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$b_3 = -b_1$，$791a_2^3 - 861a_2^2 b_1 + 456a_2 b_1^2 + 105a_2 b_2^2 - 356b_1^3 - 105b_1 b_2^2 = 0$，$a_4 \neq 0$，$a_2 \neq 0$，$b_2 b_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f3) $a_1 = 0$，$a_2 = 2b_1$，$a_3 = 0$，$b_2 = 0$，$7b_1 + 5b_3 = 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f4) $a_1 = 0$，$a_3 = 0$，$b_1 = 0$，$b_2 = 0$，$b_3 = 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f5) $a_1 = 0$，$a_2 = -2b_3$，$b_1 = 0$，$b_2 = 0$，$b_3 = -\frac{7}{3}b_1$，$b_4 = 0$，$a_4 \neq 0$，$b_1 \neq 0$，

(f6) $a_2 = 0$，$a_3 = 0$，$b_1 = 0$，$b_3 = 0$，$2a_1 = -b_2$，$a_1 \neq 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f7) $2a_1 = -b_2$，$a_2 = 2b_1$，$b_3 = -b_1$，$a_4 = 0$，$a_1 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f8) $b_1 = \frac{1}{2}a_2$，$b_2 = 0$，$b_3 = -\frac{1}{2}a_2$，$a_2 = \frac{a_3 b_4}{2a_4}$，$a_1 + a_3 = 0$，$12a_4^2 + 5b_4^2 = 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

(f9) $b_1 = \frac{1}{2}a_2$，$b_2 = 0$，$b_3 = -\frac{1}{2}a_2$，$3a_1 + 5a_3 = 0$，$a_4 = \dfrac{5\left(-a_2^3 a_3^3 - \frac{4}{3}a_2 a_3^5 + 9a_3 b_4\right)}{54a_2}$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$，

$$
\begin{aligned}
&9802575a_2^9 a_3^2 + 13070100a_2^7 a_3^4 + 10169910a_2^6 a_3^4 - 7872360a_2^4 a_3^6 - 5443200a_2^3 a_3^7 \\
&-41478720a_2^2 a_3^8 + 20477625a_2^7 a_3^2 + 27303500a_2^5 a_3^4 - 88223175a_2^6 b_4 + 2309472a_2^3 a_3^2 b_4\,, \\
&+3079296a_2 a_3^4 b_4 - 184298625a_2^4 b_4 - 20785248b_4^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

(f10) $a_4 = 0$，$b_1 = \frac{1}{2}a_2$，$b_3 = -\frac{1}{2}a_2$，$a_2 \neq 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 = 0$，$2a_3 \neq b_2$，

(f11) $b_1 = \frac{1}{2}a_2$，$b_3 = -\frac{1}{2}a_2$，$b_4 = \frac{4a_2 a_4}{2a_3 - b_2}$，$a_2 = \sqrt{\frac{-612a_3 b_2 - 516a_3^2 - 105b_2^2}{860}}$，$a_2 \neq 0$，$a_4 \neq 0$，$b_4 \neq 0$.

3. 讨论

由定理 1 和定理 2 可知，系统的中心条件可表示为若干参数之间的代数关系。值得注意的是，该系统仅包含 x^6 型高次项，而不含一般六次多项式中的混合项(如 $x^5 y$，$x^4 y^2$ 等)，这种结构上的简化对焦点量的形式产生了重要影响。从几何上看，系统在 y 方向上的非线性耦合较弱，使得径向方程中的部分低阶项被抵消，从而导致若干低阶 Lyapunov 常数同时为零，这种“部分退化”结构是产生高阶弱焦点的重要原因。

对于二次和三次多项式系统，其中心与焦点条件通常可由有限个低阶 Lyapunov 常数完全刻画，相关结果已较为成熟[4]-[8]。相比之下，尽管本文所研究的六次系统在项数上有所简化，但由于高次非线性项的存在，其焦点量的递推结构仍显著复杂，并可产生低次系统中较少出现的高阶弱焦点(如五阶弱焦点)。这表明高次项对系统局部动力学行为具有重要影响。

此外，根据 Nikolai Bautin 理论，弱焦点的阶数决定了系统在参数扰动下可能分岔出的极限环个数。具体而言，五阶弱焦点在适当扰动下最多可产生五个极限环。因此，本文所得结果不仅给出了奇点类型的判定条件，也为该系统的极限环分岔分析提供了理论依据。

4. 焦点量的计算

我们先对系统(1)用极坐标进行换元，

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

即将系统(1)转化为极坐标形式 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = R_2(\theta)\cdot r^2 + R_3(\theta)\cdot r^3 + \cdots = \sum_{i=2}^{\infty} R_i(\theta)\cdot r^i$

其中

$$R_2(\theta) = (a_1 - a_3 - b_2)\cos^3\theta + (a_2 + b_1 - b_3)\sin\theta\cos^2\theta + (a_3 + b_2)\cos\theta + b_3\sin\theta$$

$$\begin{aligned} R_3(\theta) = & -2(a_2 + b_1 - b_3)(a_1 - a_3 - b_2)\cos^6\theta + (a_1 + a_2 - a_3 + b_1 - b_2 - b_3) \\ & \times(a_1 - a_2 - a_3 - b_1 - b_2 + b_3)\sin\theta\cos^5\theta + \left[(-4a_2 - 3b_1 + 5b_3)a_3 + (-3a_1 + 4b_2)b_3 \right. \\ & \left. + (2a_1 - 3b_2)a_2 + b_1(a_1 - 2b_2)\right]\cos^4\theta + 2\sin\theta\left[-a_3^2 + \left(a_1 - \frac{3b_2}{2}\right)a_3 + b_3^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{-3a_2}{2} - b_1\right)b_3 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_2 b_1}{2} + \frac{b_2(a_1 - b_2)}{2}\right]\cos^3\theta + \left[(2a_2 + b_1 - 4b_3)a_3 \right. \\ & \left. + (a_1 - 2b_2)b_3 + a_2 b_2)\cos^2\theta + (a_3^2 + a_3 b_2 + b_3(a_2 - b_3)\right]\sin\theta\cos\theta + a_3 b_3 \end{aligned}$$

设方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \sum_{i=2}^{\infty} R_i(\theta)\cdot r^i \\ r(0) = c \end{cases} \tag{2}$$

有解 $r(\theta)$，且

$$r(\theta) = r_1(\theta)\cdot c + r_2(\theta)\cdot c^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\theta)\cdot c^k \tag{3}$$

对于任意函数 $f(\theta)$，若记 $\tilde{f} = \tilde{f}(\theta) = \int_0^{\theta} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi$，则可得引理 1。

引理 1 给定方程(2)且它的解为式(3)，则当 $k = 2,\cdots,5$ 时，$r_k(\theta)$ 可以表示如下：

$$r_2(\theta) = \widetilde{R_2},$$

$$r_3(\theta) = \left(\widetilde{R_2}\right)^2 + \widetilde{R_3},$$

$$r_4(\theta) = \left(\widetilde{R_2}\right)^3 + 2\widetilde{R_2}\cdot\widetilde{R_3} + \widetilde{\widetilde{R_2}R_3} + \widetilde{R_4},$$

$$r_5(\theta) = \left(\widetilde{R_2}\right)^4 + 3\left(\widetilde{R_2}\right)^2\widetilde{R_3} + \left(\widetilde{R_2}\right)^2\widetilde{R_3} + 2\widetilde{R_2}\cdot\widetilde{\widetilde{R_2}R_3} + \frac{3}{2}\left(\widetilde{R_3}\right)^2 + 2\widetilde{R_2}\cdot\widetilde{R_4}\cdot R_4 + 2\widetilde{\widetilde{R_2}R_4} + \widetilde{R_5}.$$

由第二章的引理 1 可得焦点量 $V_k\ (2 \le k \le 5)$ 的表达式如下：

$$V_2 = 0,$$

$$V_3 = \frac{(a_1 a_2 - 2a_1 b_1 + a_2 a_3 + 2a_3 b_3 - b_1 b_2 - b_2 b_3)\pi}{4},$$

$$V_4 = 0,$$

$$\begin{aligned}V_5=\frac{\pi}{24}\cdot\Big[&5a_1^3a_2-10a_1^3b_1-6a_1^3b_3+14a_1^2a_2a_3+2a_1^2a_2b_2-12a_1^2a_3b_1-3a_1^2b_1b_2+a_1a_2^3-5a_1a_2^2b_1\\&-2a_1a_2^2b_3+15a_1a_2a_3^2+5a_1a_2a_3b_2-5a_1a_2b_1b_3-a_1a_2b_2^2-5a_1a_2b_3^2-2a_1a_3^2b_1+18a_3^2a_1b_3\\&-4a_1a_3b_1b_2+a_1b_1b_2^2+10a_1b_1b_3^2+6b_3^3a_1+a_2^3a_3-4a_2^2a_3b_1-a_2^2a_3b_3+6a_2a_3^3+3a_2a_3^2b_2\\&-5a_2a_3b_1^2-11a_2a_3b_1b_3-a_2a_3b_2^2-6a_2a_3b_3^2+12a_3^3b_3-a_3^2b_1b_2-10a_3b_1^2b_3+a_3b_1b_2^2-6a_3b_1b_3^2\Big].\end{aligned}$$

5. 定理证明

定理 1 和定理 2 证明如下：

由表达式

$$\begin{aligned}V_3&=\frac{(a_1a_2-2a_1b_1+a_2a_3+2a_3b_3-b_1b_2-b_2b_3)\pi}{4}\\&=\frac{\left[a_1(a_2-2b_1)+a_3(a_2+2b_3)-b_2(b_1-b_3)\right]\pi}{4}\end{aligned}$$

可知，这里为了简化计算，令 $V_3=0$，只讨论以下八种情况：

(1) 当 $a_1=0,a_3=0,b_2=0$ 时，有 $V_2=V_3=V_4=V_5=V_6=V_8=V_{10}=0$，

$$V_7=-\frac{5\pi a_4(14b_1+7a_2+20b_3)}{64},$$

$$V_9=-\frac{\pi a_4\left(2401a_2^3+3381a_2^2b_3-66024a_2b_3^3-67324b_3^3\right)}{188160},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4\left(12574663269a_2^2b_3^3-51003108604b_3^4a_2-64072161452b_3^5+6848583588b_4\right)}{17709468672}$$

令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有两种情况，即 $a_4=0$ 或 $14b_1+7a_2+20b_3=0$。

若 $a_4=0$ 时，可得中心条件(c1)。

若 $14b_1+7a_2+20b_3=0$ 时，则解得 $a_2=-\frac{1}{7}(14b_1-20b_3)$，代入焦点量 V_9 和 V_{11} 得，

$$V_9=-\frac{49\pi a_4}{480}\left[\left(-\frac{2358b_1}{343}+\frac{23580b_2}{2401}+\frac{16831}{4802}\right)b_3^3-\frac{69b_3}{98}\left(b_1-\frac{10b_2}{7}\right)^2+\left(b_1-\frac{10b_2}{7}\right)^3\right],$$

$$\begin{aligned}V_{11}=-\frac{85541927\pi b_3^3a_4}{30118144}\Bigg[&-\frac{16018040363b_3^2}{12574663269}+\left(\frac{3643079186b_1}{1796380467}-\frac{36430791860b_2}{12574663269}\right.\\&\left.+\frac{11647251}{85541927}\right)b_3+\left(b_1-\frac{10b_2}{7}\right)^2\Bigg]\end{aligned}$$

再令 $V_9=0$，得到 $\left(-\frac{2358b_1}{343}+\frac{23580b_2}{2401}+\frac{16831}{4802}\right)b_3^3-\frac{69b_3}{98}\left(b_1-\frac{10b_2}{7}\right)^2+\left(b_1-\frac{10b_2}{7}\right)^3=0$，解得 $b_1=\frac{10}{7}b_2+\frac{1}{2}b_3$ 或 $b_1=\frac{10}{7}b_2+\frac{891}{98}b_3$ 或 $b_1=\frac{10}{7}b_2-\frac{751}{98}b_3$。

满足 $b_1=\frac{10}{7}b_2+\frac{1}{2}b_3$ 时，有 $V_{11}=-\frac{85541927\pi a_4b_3^3\left[-\frac{494389579b_3^2}{50298653076}+\left(\frac{10929237558b_2}{4191554423}+\frac{11647251}{85541927}\right)b_3\right]}{30118144}$，得到十一阶焦点条件(f1)。

满足 $b_1=\frac{10}{7}b_2+\frac{891}{98}b_3$ 时，有

$$V_{11}=-\frac{85541927\pi a_4 b_3^3\left[\frac{246034565501077b_3^2}{2464634000724}+\left(\frac{10929237558b_2}{4191554423}+\frac{11647251}{85541927}\right)b_3\right]}{30118144}$$，得到十一阶焦点条件(f1)。

满足 $b_1=\frac{10}{7}b_2-\frac{751}{98}b_3$ 时，有

$$V_{11}=-\frac{85541927\pi a_4 b_3^3\left[\frac{34431442212343b_3^2}{821544666908}+\left(\frac{10929237558b_2}{4191554423}+\frac{11647251}{85541927}\right)b_3\right]}{30118144}$$，得到十一阶焦点条件(f1)。

(2) 当 $a_1=0,a_3=0,b_3=-b_1$ 时，有 $V_2=V_3=V_4=V_5=V_6=V_8=V_{10}=0$，

$$V_7=-\frac{5\pi\left(7a_1a_4-6a_4b_1+b_2b_4\right)}{64},$$

$$V_9=\frac{\pi a_4\left(791a_2^3-861a_2^2b_1+456a_2b_1^2+105b_2^2a_2-356b_1^3-105b_1b_2^2\right)}{1920},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4\left(416a_2^5-3076a_2^4b_1+3632a_2^3b_1^2-3452ab_4+2416a_2b_1^3-1376b_1^5+66825b_4\right)}{172800}$$

令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有 $a_4\left(7a_2-6b_1\right)+b_2b_4=0$，即 $a_4=-\frac{b_2b_4}{7a_2-6b_1}$。

若 $a_4=-\frac{b_2b_4}{7a_2-6b_1}$ 且 $7a_2-6b_1\neq0$ 时，

$$V_9=-\frac{\pi b_2b_4}{1920\left(7a_2-6b_1\right)}\left(791a_2^3-861a_2^2b_1+456a_2b_1^2+105a_2b_2^2-356b_1^3-105b_1b_2^2\right),$$

$$V_{11}=\frac{\pi b_2b_4\left(416a_2^5-3076a_2^4b_1+3632a_2^3b_1^2-3452a_2b_1^4+2416a_2b_1^4-1376b_1^5+66825b_4\right)}{1209600a_2-10346800b_1}$$

令 $V_9=0$，根据因式有 $b_2=0$、$b_4=0$ 和 $791a_2^3-861a_2^2b_1+456a_2b_1^2+105a_2b_2^2-356b_1^3-105b_1b_2^2=0$。

满足 $b_2=0$ 或者 $b_4=0$ 时，得到中心条件(c2)。

满足 $791a_2^3-861a_2^2b_1+456a_2b_1^2+105a_2b_2^2-356b_1^3-105b_1b_2^2=0$ 时，通过计算，可以得到 $b_1=\frac{7}{4}a_2$，有 $V_{11}=\frac{3\pi b_2b_4\left(557759a_2^5-1425600b_4\right)}{1081427200a2}$，得到十一阶焦点条件(f2)。

(3) 当 $a_1=0,a_2=-2b_3,b_2=0$ 时，$V_2=V_3=V_4=V_5=V_6=V_8=V_{10}=0$，

$$V_7=-\frac{5a_4\pi\left(3b_3+7b_1\right)}{32},$$

$$V_9=-\frac{7b_1a_4\pi\left(45a_3^2+328b_1^2\right)}{576},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4\left(77773472b_1^5+360855b_4\right)}{933120}$$

令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有两种情况，即当 $a_4=0$ 或 $3a_3+7b_1=0$。

若 $a_4=0$ 时，得到中心条件(c3)。

若 $3b_3+7b_1=0$ 时，则可设 $b_3=-\frac{7}{3}b_1$，代入焦点量 V_9 和 V_{11} 可得，

$$V_9=-\frac{7b_1a_4\pi\left(45a_3^2+328b_1^2\right)}{576},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4\left(77773472b_1^5+360855b_4\right)}{933120}$$

再令 $V_9=0$，根据 V_9 因式有 $b_1=0$ 和 $45a_2^2+328b_1^2=0$，

满足 $b_1=0$ 时，$V_{11}=-\frac{360855\pi a_4b_4}{933120}$，得到十一阶焦点条件(f4)。

满足 $45a_2^2+328b_1^2=0$ 且 $b_1\neq 0$ 时，没有实数解，得到十一阶焦点条件(f5)。

(4) 当 $a_1=0,a_2=-2b_3,b_3=-b_1$ 时，$V_2=V_3=V_4=V_6=0$

$$V_5=\frac{a_3b_2b_1\pi\left(5a_3-b_2\right)}{24}$$

$$V_7=\frac{5\pi\left(4b_1b_2a_3^4+2a_3^2b_1^3b_2-8a_4b_1-b_2b_4\right)}{64}$$

$$V_9=\frac{\pi b_1\left(4680a_3^6b_2+2900a_3^4b_1^2b_2+280a_3^2b_1^4b_2+450a_3^2a_4-426a_3a_4b_2+3400a_4b_1^2+105a_4b_2^2\right)}{1920}$$

$$V_{11}=-\frac{\pi}{1188864}\left(12980736b_2b_1a_3^8+16496016a_3^6b_1^3b_2+6755848b_1^5a_3^4b_2\right.$$
$$\left.+876512b_1^7a_3^2b_2+142911a_3^4a_4b_1+118336a_4b_1^5-459756a_4b_4\right)$$

令 $V_5=0$，根据 V_5 因式有四种情况，即 $a_3=0$、$b_2=0$、$b_1=0$ 或 $a_3=\frac{1}{5}b_2$。

当 $a_3=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi\left(8a_4b_1+b_2b_4\right)}{64},$$

$$V_9=\frac{\pi b_1\left(680a_4b_1^2+21a_4b_2^2\right)}{384},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi}{47216}\left(29584a_4b_1^5-114939a_4b_4\right)$$

再令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有 $8a_4b_1+b_2b_4=0$，

若 $a_4=-\frac{b_2b_4}{8b_1}$ 时，

$$V_9=-\frac{\pi b_2b_4\left(680b_1^2+21b_2^2\right)}{3072},$$

$$V_{11}=\frac{43\pi b_2b_4\left(688b_1^5-2673b_4\right)}{377728b1}$$

若 $a_4=0$ 且 $b_1\neq 0$ 时，$V_9=V_{11}=0$ 得到中心条件(c4)。

当 $b_2=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_4 b_1}{8},$$

$$V_9=\frac{\pi b_1\left(450a_3^2a_4+3400a_4b_1^2\right)}{1920},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi}{1188864}\left(142911a_3^4a_4b_1+118336a_4b_1^5-459756a_4b_4\right)$$

再令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有 $a_4=0$ 和 $b_1=0$ 。

若 $a_4=0$ 时，$V_9=V_{11}=0$，得到中心条件(c3)。

若 $b_1=0$ 时，

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=-\frac{459756a_4b_4\pi}{1188864},$$

故得到十一阶焦点条件(f3)。

当 $b_1=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi b_2 b_4}{64},$$

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=\frac{99\pi a_4 b_4}{256}$$

再令 $V_7=0$，则 $b_2=0$ 或 $b_4=0$ 。

若 $b_2=0$ 时，

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=\frac{99\pi a_4 b_4}{256},$$

故得到十一阶焦点条件(f3)。

若 $b_4=0$ 时，有 $V_9=V_{11}=0$，得到中心条件(c5)。

当 $a_3=\frac{1}{5}b_2$ 时，

$$V_7=\frac{5\pi\left(50b_1^3b_2^3+4b_1b_2^5-5000a_4b_1-625b_2b_4\right)}{625},$$

$$V_9=\frac{\pi b_1\left(35000b_1^4b_2^3+14500b_1^2b_2^5+936b_2^7+10625000a_4b_1^2+118125a_4b_2^2\right)}{6000000},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi}{464400000000}\left(13695500000b_1^7b_2^3+4222405000b_1^5b_2^5+412400400b_1^3b_2^7\right.$$
$$\left.+12980736b_1b_2^9+46225000000a_4b_1^5+89319375a_4b_1b_2^4-179592187500a_4b_4\right)$$

令 $V_7=0$，有 $a_4=\frac{50b_1^3b_2^3+4b_1b_2^5-625b_2b_4}{5000b_1}$，且 $b_1\neq 0$，有，

$$V_9=\frac{687\pi b_1b_2^7}{4000000}+\frac{16109\pi b_1^3b_2^5}{960000}+\frac{\pi\left(8780000b_1^5-118125b_4\right)b_2^3}{48000000}-\frac{425\pi b_1^2b_4b_2}{192},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi b_2}{3715200000000000}\left(10993380000000b_1^8b_2^7+338088240000b_1^6b_4^4+3306348750b_1^4b_2^6\right.$$
$$+104417532b_1^2b_2^8-462250000000b_1^5b_4-14367375000b_1^3b_2^4b_4-1238709375b_1b_2^4b_4$$
$$\left.+179592187500b_4^2\right)$$

再令 $V_9=0$，则由于计算复杂性，只计算 $b_1=0$ 且 $b_4=0$ 或 $b_2=0$。

满足 $b_1=0$ 且 $b_4=0$ 时，$V_{11}=0$，得到中心条件(c1)。

满足 $b_2=0$ 时，$V_{11}=0$，得到中心条件(c1)。

(5) 当 $a_2=2b_1,a_3=0,b_2=0$ 时，$V_2=V_3=V_4=V_6=0$，

$$V_5=-\frac{a_1\pi\left(a_1^2b_3+2b_1^3+3b_1^2b_3-b_3^3\right)}{4},$$

$$V_7=-\frac{5\pi\left(a_1b_4+14a_4b_1+10a_4b_3\right)}{32},$$

$$V_9=-\frac{a_4\pi\left(777a_1^2b_3-23646b_1^3-38967b_1^2b_3-19740b_1b_3^2-2699b_3^3\right)}{960},$$

$$V_{11}=-\frac{a_4\pi}{8266473411840}\left(1524336388825320b_1^5+3095079570704784b_1^4b_3\right.$$
$$\left.+2151710408624280b_1^3b_3^2+508835897360 56b_1^2b_3^3+3196800264735b_4\right)$$

令 $V_5=0$，根据 V_5 因式有两种情况，即 $a_1=0$ 或 $b_1=0$ 且 $b_3=0$。

当 $a_1=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_4\left(7b_1+5b_3\right)}{16},$$

$$V_9=\frac{\pi a_4\left(23646b_1^3+38967b_1^2b_3+19740b_1b_3^2+2699b_3^3\right)}{960},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4}{8266473411840}\cdot\left[1524336388825320b_1^5+3095079570704784b_1^4b_3\right.$$
$$\left.+2151710408624280b_1^3b_2^2+50883589736056b_1^2b_3^3+3196800264735b_4\right]$$

再令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有 $a_4=0$ 和 $7b_1+5b_3=0$。

若 $a_4=0$ 时，得到中心条件(c6)。

若 $7b_1+5b_3=0$ 时，即 $b_1=-\frac{5}{7}b_3$，

$$V_9=-\frac{1681\pi a_4b_3^3}{11760},$$

$$V_{11}=-\pi a_4\left(\frac{10449311793755125}{165398355515232}b_3^5-\frac{22715888275025}{10126429929504}b_3^6+\frac{64039000256675}{482210949024}b_3^2b_2^2\right.$$
$$\left.+50883589736056b_1^2b_3^3+\frac{99}{256}b_4\right)$$

令 $V_9=0$，根据 V_9 因式有 $b_3=0$，满足 $b_3=0$ 时，$V_{11}=-\frac{99\pi a_4b_4}{256}$，得到十一阶焦点条件(f3)。

当 $b_1=0$ 且 $b_3=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_1 b_4}{32},$$

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=-\frac{99\pi a_4 b_4}{256},$$

则再令 $V_7=0$，当 $b_4=0$ 时，得到中心条件(c7)。

(6) 当 $a_2=2b_1, a_3=0, b_3=-b_1$ 时，$V_2=V_3=V_4=V_6=0$，

$$V_5=\frac{\pi a_1\left(3a_1-b_2\right)\left(2a_1+b_2\right)b_1}{24},$$

$$V_7=\frac{5\pi\left(4a_1^3b_1^3+2a_1^2b_1^3b_2-2b_4a_1-8a_4b_1-b_2b_4\right)}{64},$$

$$V_9=-\frac{\pi\left(2a_1+b_2\right)\left(1230a_1^4b_1^3-9120a_1^2b_1^5+1554b_4a_1^2-1038a_1b_2b_4+3440b_1^2b_4+105b_2^2b_4\right)}{15360},$$

$$\begin{aligned}V_{11}=-\frac{\pi}{9510912}&\left(1353492a_1^7b_1^3+676746a_1^6b_1^3b_2-246489a_1^5b_1^5-1232448a_1^4b_1^5b_2+14497536a_1^3b_1^7\right.\\&\left.+7248768a_1^2b_1^7b_2-676746a_1^5b_4-338373a_1^4b_2b_4-236672a_1b_1^4b_4-118336b_1^4b_2b_4-3678048a_4b_4\right)\end{aligned}$$

令 $V_5=0$，根据 V_5 因式有四种情况，即 $a_1=0$，$a_1=\frac{b_2}{3}$、$2a_1=-b_2$ 和 $b_1=0$。

当 $a_1=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi\left(8a_4b_1+b_2b_4\right)}{64},$$

$$V_9=-\frac{\pi b_2b_4\left(688b_1^2+21b_2^2\right)}{3072},$$

$$V_{11}=\frac{43\pi b_1^4b_2b_4}{3456},$$

令 $V_7=0$，若 $b_2=0$，则有 $a_4b_1=0$，即 $a_4=0$ 或 $b_1=0$。

若 $a_4=0$ 时，

$$V_9=-\frac{\pi b_2b_4\left(688b_1^2+21b_2^2\right)}{3072},$$

$$V_{11}=\frac{43\pi b_1^4b_2b_4}{3456},$$

令 $V_9=0$，即 $b_2=0$ 或 $b_4=0$，得到中心条件(c8)。

若 $b_1=0$ 时，

$$V_9=-\frac{7b_2^3b_4\pi}{1024},$$

$$V_{11}=0,$$

则令 $V_9=0$，即 $b_2=0$ 或 $b_4=0$，皆有 $V_{11}=0$，得到中心条件(c7)。

当 $a_1=\frac{b_2}{3}$ 时，

$$V_7=\frac{5\pi\left(10a_1^3b_1^3-5a_1b_4-8a_4b_1\right)}{64},$$

$$V_9=\frac{5\pi a_1\left(-246a_1^4b_1^3+1824a_1^2b_1^5+123a_1^2b_4-688b_1^2b_4\right)}{3072},$$

$$V_{11}=\frac{\pi a_1\left(-3383730a_1^6b_1^3+3943833a_1^4b_1^5+1691865a_1^4b_4-36243840a_1^2b_1^7+591680b_1^4b_4+3678048b_4\right)}{9510912}$$

令 $V_7=0$，则 $a_1=0$ 且 $a_4b_1=0$ 或 $a_1\neq 0$ 且 $b_4=2a_1^2b_1^3-\frac{8a_4b_1}{5a_1}$。

若 $a_1=0$ 且 $a_4b_1=0$ 时，

当 $a_4=0$ 时，有 $V_9=V_{11}=0$，得到中心条件(c8)。

当 $b_1=0$ 时，有 $V_9=V_{11}=0$，得到中心条件(c7)。

若 $a_1\neq 0$ 且 $b_4=2a_1^2b_1^3-\frac{8a_4b_1}{5a_1}$ 时，

$$V_9=\frac{5\pi a_1}{3072}\left[448a_1^2b_1^5+\frac{a_4}{5}\left(-984a_1b_1+\frac{5504b_1^3}{a_1}\right)\right],$$

$$V_{11}=\frac{\pi a_1\left[3943833a_1^4b_1^5-35060480a_1^2b_1^7+7356096a_1^2b_1^3+a_4\left(-2706984a_1^3b_1-\frac{4733440b_1^5+29424384b_1}{5a_1}\right)\right]}{9510912}$$

再令 $V_9=0$，则 $b_1=0$，有 $V_{11}=0$ 得到中心条件(c7)。

当 $2a_1=-b_2$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_4b_1}{8},$$

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=\frac{\pi a_1\left(-739469a_1^4b_1^5+1226016b_4\right)}{3170304}$$

令 $V_7=0$，则 $b_1=0$ 或 $a_4=0$。

若 $b_1=0$ 时，$V_9=0$，$V_{11}=\frac{99a_1b_4\pi}{256}$，故得到十一阶焦点条件(f6)。

若 $a_4=0$ 时，$V_9=0$，$V_{11}=\frac{\pi a_1\left(-739469a_1^4b_1^5+1226016b_4\right)}{3170304}$，故得到十一阶焦点条件(f7)。

当 $b_1=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi b_4\left(2a_1+b_2\right)}{64},$$

$$V_9=-\frac{\pi b_4\left(2a_1+b_2\right)\left(518a_1^2-346a_1b_2+35b_2^2\right)}{5120},$$

$$V_{11}=\frac{\pi a_1b_4\left(75194a_1^4+37597a_1^3b_2+408672\right)}{1056768},$$

令 $V_7=0$，则 $b_4=0$ 或 $b_2=-2a_1$。

若 $b_4=0$ 时，有 $V_9=V_{11}=0$ 得到中心条件(c7)。

若 $b_2=-2a_1$ 时，$V_9=0$，$V_{11}=\dfrac{99\pi a_1 b_4}{256}$，故得到十一阶焦点条件(f6)。

(7) 当 $b_1=\dfrac{1}{2}a_2, b_3=-\dfrac{1}{2}a_2, b_2=0$ 时，有 $V_2=V_3=V_4=0$，

$$V_5=\frac{(a_1+a_3)\pi a_1(3a_1+5a_3)a_2}{24},$$

$$V_7=\frac{\pi\left(12a_1^5a_2+12a_2a_1^4a_3+25a_1^3a_2^3+25a_1^2a_2^3a_3-250a_1b_4-500a_4a_2\right)}{1600},$$

$$\begin{aligned}V_9=-\frac{\pi a_2}{1200000}&\left(6048a_1^7+6048a_1^6a_3+10500a_1^5a_2^2+10500a_1^4a_2^2a_3-4375a_1^3a_2^4\right.\\&\left.-4375a_1^2a_2^4a_3-485625a_1^2a_4-465000a_1a_3a_4-268750a_2^2a_4-140625a_3^2a_4\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{11}=\frac{\pi}{23040000000}\cdot&\left[37330848a_1^9a_2+37330848a_1^8a_2a_3+19680900a_1^7a_2^3+19680900a_1^6a_2^3a_3\right.\\&-70624375a_1^5a_2^5-70624375a_1^4a_2^5a_3+105000000a_1^3a_2^7+105000000a_1^2a_2^7a_3\\&\left.-1023881250a_1^4a_2a_4-1361468750a_1^2a_2^3a_4-8910000000a_4b_4\right]\end{aligned}$$

令 $V_5=0$，根据 V_5 因式有四种情况，即 $a_1=0$、$a_1+a_3=0$、$3a_1+5a_3=0$ 或 $a_2=0$。

当 $a_1=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_4a_2}{16},$$

$$V_9=\frac{\pi a_2a_4\left(86a_2^2+45a_3^2\right)}{384},$$

$$V_{11}=-\frac{99\pi a_4b_4}{2560},$$

令 $V_7=0$，若 $a_4=0$ 时，得到中心条件(c8)。

当 $a_1+a_3=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5}{16}\pi a_4a_2+\frac{5}{32}\pi a_3b_4,$$

$$V_9=\frac{43\pi a_2a_4\left(5a_2^2+3a_3^2\right)}{960},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi a_4\left(217835a_2^3a_3^2+163821a_2a_3^4+142560b_4\right)}{3686400}$$

令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有 $a_2=\dfrac{a_3b_4}{2a_4}$。

当 $a_2=\dfrac{a_3b_4}{2a_4}$ 时，其中 $a_4\neq 0$，

$$V_9=\frac{43\pi a_3^3b_4\left(12a_4^2+5b_4^2\right)}{7680a_4^2},$$

$$V_{11}=\frac{-\pi b_4\left(655284a_3^5a_4^2+217835a_3^5b_4^2+1140480a_4^3\right)}{29491200a_4^2},$$

再令 $V_9=0$，根据 V_9 因式有 $a_3=0$、$b_4=0$ 或 $12a_4^2+5b_4^2=0$，

满足 $a_3=0$ 时，$V_{11}=\dfrac{-99\pi a_4 b_4}{2560}$，得到十一阶焦点条件(f3)。

满足 $b_4=0$ 时，得到中心条件(c7)。

满足 $12a_4^2+5b_4^2=0$ 时，由于 $a_4\neq 0$，没有实数解，得到十一阶焦点条件(f8)。

当 $3a_1+5a_3=0$ 时，

$$V_7=-\frac{25\pi}{864}\left(a_2^3a_3^3+\frac{4}{3}a_2a_3^5+\frac{54}{5}a_4a_2-9a_3b_4\right),$$

$$V_9=-\frac{35}{96}\left(a_2^4a_3^3-60a_2^2a_3^5-864a_3^7-\frac{43}{70}a_2^2a_4-\frac{1593}{70}a_3^2a_4\right)a_2\pi,$$

$$\begin{aligned}V_{11}=-\frac{\pi}{537477120}\cdot\big[&-8474925a_2^5a_3^5+6560300a_2^3a_3^7+4536000a_2^2a_3^8\\&+34565600a_2a_3^9+88223175a_2^6a_4+184298625a_2^4a_4+20785248a_4b_4\big]\end{aligned}$$

令 $V_7=0$，则有 $a_4=\dfrac{5\left(-3a_2^3a_3^3-4a_2a_3^5+27a_3b_4\right)}{54a_2}$。

$$V_9=-\frac{90425\pi a_2a_3^7}{288}-\frac{655645\pi a_2^3a_3^5}{31104}+\frac{5\pi\left(2397a_2^5-43011b_4\right)a_3^3}{31104}-\frac{215\pi a_2^2b_4a_3}{1152},$$

$$\begin{aligned}V_{11}=\frac{\pi a_3}{644972544a_2}\cdot\big[&9802575a_2^9a_3^2+13070100a_2^7a_3^4+10169910a_2^6a_3^4-7872360a_2^4a_3^6\\&-5443200a_2^3a_3^7-41478720a_2^2a_3^8+20477625a_2^7a_3^2+27303500a_2^5a_3^4-88223175a_2^6b_4\\&+2309472a_2^3a_3^2b_4+3079296a_2a_3^4b_4-184298625a_2^4b_4-20785248b_4^2\big]\end{aligned}$$

满足 $V_9=0$ 时，有
$$\begin{aligned}&9802575a_2^9a_3^2+13070100a_2^7a_3^4+10169910a_2^6a_3^4-7872360a_2^4a_3^6-5443200a_2^3a_3^7\\&-41478720a_2^2a_3^8+20477625a_2^7a_3^2+27303500a_2^5a_3^4-88223175a_2^6b_4+2309472a_2^3a_3^2b_4\\&+3079296a_2a_3^4b_4-184298625a_2^4b_4-20785248b_4^2\neq 0\end{aligned}$$
，得十一阶焦点条件(f9)。

当 $a_2=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi a_1b_4}{32},$$

$$V_9=0,$$

$$V_{11}=-\frac{891\pi a_4b_4}{2304},$$

再令 $V_7=0$，当 $b_4=0$ 时，得到中心条件(c7)。

(8) 当 $b_1=\dfrac{1}{2}a_2,b_3=-\dfrac{1}{2}a_2$ 时，有 $V_2=V_3=V_4=0$，

$$V_5=\frac{(a_1+a_3)\pi(3a_1+5a_3-b_2)(2a_1+b_2)a_2}{48},$$

$$\begin{aligned}V_7=\frac{5\pi}{256}\cdot\big[&8a_2a_1^4a_3+2a_2^3a_1^3+32a_3^2a_2a_1^3+4a_2a_1^3a_3b_2+4a_2^3a_3a_1^2+a_2^3a_1^2b_2+40a_2^3a_2a_1^2+16a_3^2a_2a_1b_2\\&+2a_3^3a_2^2a_1+2a_2^3a_3a_1b_2+16a_2a_3^4a_1+20a_3^3a_2a_1b_2+a_3^2a_2^3b_2+8a_2a_3^4b_2-8b_4a_1-16a_2a_4-4b_4b_2\big],\end{aligned}$$

$$V_9=-\frac{(2a_1+b_2)\pi}{61440}\cdot\left[2460a_2a_1^5a_3+615a_2^3a_1^4-10680a_2a_1^4a_3^2-8460a_2^3a_1^3a_3-111000a_2a_1^3a_3^3\right.$$
$$-1140a_2^5a_1^2-38190a_2^3a_1^2a_3^2-262560a_2a_1^2a_1^4-2280a_3^4a_1-48540a_2^3a_1^3a_1-247140a_2a_1^2a_1^3$$
$$-1140a_2^3a_1^4-19425a_2^3a_1^4-82440a_2a_3^6+6216b_4a_1^2+5952b_4a_1a_3-4152b_4a_1b_2+3440a_2^3b_4$$
$$\left.+1800b_4a_3^2-1704b_4a_3b_2+420b_4b_2^2\right]$$

令 $V_5=0$，根据 V_5 因式有四种情况，即 $a_1=-a_3$、$b_2=3a_1+5a_3$、$b_2=-2a_1$ 或 $a_2=0$。

当 $a_1=-a_3$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi(4a_2a_4-2a_3b_4+b_2b_4)}{64},$$

$$V_9=\frac{\pi b_4(860a_2^2+516a_3^2+612a_3b_2+105b_2^2)(2a_3-b_2)}{15360},$$

$$V_{11}=-\frac{\pi}{690723072000}\cdot\left[2460a_2a_1^5a_3+615a_2^3a_1^4-10680a_2a_1^4a_3^2-8460a_2^3a_1^3a_3-111000a_2a_1^3a_3^3\right.$$
$$-1140a_2^5a_1^2-38190a_2^3a_1^2a_3^2-262560a_2a_1^2a_1^4-2280a_3^4a_1-48540a_2^3a_1^3a_1-247140a_2a_1^2a_1^3$$
$$-1140a_2^3a_1^4-19425a_2^3a_1^4-82440a_2a_3^6+6216b_4a_1^2+5952b_4a_1a_3-4152b_4a_1b_2+3440a_2^3b_4$$
$$\left.+1800b_4a_3^2-1704b_4a_3b_2+420b_4b_2^2\right]$$

令 $V_7=0$，即 $b_4=\dfrac{4a_2a_4}{2a_3-b_2}$。

若 $b_4=\dfrac{4a_2a_4}{2a_3-b_2}$ 时，其中 $2a_3\neq b_2$，

$$V_9=\frac{\pi a_2a_4(860a_2^2+516a_3^2+612a_3b_2+105b_2^2)}{3840},$$

$$V_{11}=\frac{\pi a_2}{690723072000(2a_3-b_2)}\cdot\left[8491825000000a_2^4a_3^6-8491825000000a_2^4a_3^5b_2\right.$$
$$+2122956250000a_2^4a_3^4b_2^2-140994464091250a_2^2a_3^8+70497232045625a_2^2a_3^7b_2$$
$$-4297033000a_2^4a_3a_4+2148516500a_2^4a_4b_2+142509600480a_2^2a_3^3a_4$$
$$-89122463040a_2^2a_3^2a_4b_2+8933831400a_2^2a_3a_4b_2^2+994664122368a_3^5a_4$$
$$\left.+48177934272a_3^4a_4b_2-48954997728a_3^3a_4b_2^2+10684622520000a_4^2\right]$$

令 $V_9=0$，则有三种情况，即 $a_2=0$、$a_4=0$ 和 $860a_2^2+516a_3^2+612a_3b_2+105b_2^2=0$。

满足 $a_2=0$ 时，有 $V_{11}=0$，得到中心条件(c7)。

满足 $a_4=0$ 时，
$$V_{11}=-\frac{\pi a_2}{690723072000(2a_3-b_2)}\cdot\left[8491825000000a_2^4a_3^6-8491825000000a_2^4a_3^5b_2\right.$$
$$\left.+2122956250000a_2^4a_3^4b_2^2-140994464091250a_2^2a_3^8+70497232045625a_2^2a_3^7b_2\right],$$

故得到十一阶焦点条件(f10)。

满足 $860a_2^2+516a_3^2+612a_3b_2+105b_2^2=0$，即 $a_2=\sqrt{\dfrac{-612a_3b_2-516a_3^2-105b_2^2}{860}}$，由于计算复杂性不再计算，有 $V_{11}\neq 0$，得到十一阶焦点条件(f11)。

当 $b_2=3a_1+5a_3$ 时，

$$V_7=\frac{25\pi}{64}\left(\frac{(a_1+a_3)^3a_2^3}{4}+\left(a_1^4a_3+5a_1^3a_3^2+9a_1^2a_3^3+7a_1a_3^4+2a_3^5-\frac{4}{5}a_4\right)a_2-b_4(a_1+a_3)\right),$$

$$\begin{aligned}V_9=-\frac{205\pi}{1024}(a_1+a_3)&\left(-\frac{19}{41}(a_1+a_3)^2a_2^5+\frac{(a_1+a_3)^2\left(a_1^2-\frac{646}{41}a_1a_3-\frac{1295}{41}a_3^2\right)}{4}a_2^3+\frac{172}{123}a_2^2b_4\right.\\&\left.+a_3\left(a_1^2-\frac{342}{41}a_1a_3-\frac{687}{41}a_3^2\right)(a_1+2a_3)(a_1+a_3)^2a_2-\frac{\left(59a_1^2+152a_1a_3-63a_3^2\right)b_4}{41}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{11}=\frac{2014183179\pi}{4093173760}\cdot\Bigg[&\frac{1096742725}{18127648611}(a_1+a_3)^3a_2^7-\frac{6109699474}{18127648611}\left(a_1^2-\frac{8538344631}{3054849737}a_1a_3\right.\\&\left.-\frac{17429364630}{3054849737}a_3^2\right)(a_1+a_3)^3a_2^5-\frac{429703300}{54382945833}b_4(a_1+a_3)a_2^4+\left(\frac{1}{4}a_1^7+\frac{1407626036675}{72510594444}a_3^7\right.\\&+\frac{5585239787525}{72510594444}a_1a_3^6-\frac{155932561051}{72510594444}a_1^6a_3-\frac{229110265307}{24170198148}a_1^5a_3^2+\frac{417241142153}{72510594444}a_1^4a_3^3\\&\left.+\frac{4952093898985}{72510594444}a_1^3a_3^4+\frac{69715816273469}{217531783332}a_1^2a_3^5\right)a_2^3+\frac{394769744}{442137771}\left(a_1^2+\frac{875582681}{2023194938}a_1a_3\right.\\&\left.-\frac{702719445}{2023194938}a_3^2\right)(a_1+a_3)b_4a_2^2+(a_1+a_3)^3\left(a_1^4-\frac{12506701700}{2014183179}a_1^3a_3-\frac{13143592414}{2014183179}a_1^2a_3^2\right.\\&\left.+\frac{4381577972}{147379257}a_1a_3^3+\frac{63656981995}{2014183179}a_3^4\right)a_3(a_1+2a_3)a_2-\left(a_1^5+\frac{12302139895}{2014183179}a_1^4a_3\right.\\&\left.+\frac{1156166650}{106009641}a_1^3a_3^2+\frac{5724062650}{671394393}a_1^2a_3^3+\frac{341414509}{106009641}a_1a_3^4+\frac{993897355}{2014183179}a_3^5+\frac{175878560}{223798131}a_4\right)b_4\Bigg]\end{aligned}$$

令 $V_7=0$，即 $b_4=\dfrac{(a_1+a_3)^2a_2^3}{4}+\left(a_1^4a_3+5a_1^3a_3^2+9a_1^2a_3^3+7a_1a_3^4+2a_3^5-\dfrac{4}{5}a_4\right)\dfrac{a_2}{a_1+a_3}$。

$$\begin{aligned}V_9=-\frac{\pi a_2}{61440}\big(&8760a_1^6a_3+3075a_1^5a_2^2-67920a_1^5a_3^2-35785a_1^4a_2^2a_3-682080a_1^4a_3^3-5700a_1^3a_2^4\\&-216050a_1^3a_2^2a_3^2-1955760a_1^3a_3^4-17100a_1^2a_2^4a_3-402690a_1^2a_2^2a_3^3-2585400a_1^2a_3^5\\&-17100a_1a_2^4a_3^2-315745a_1a_2^2a_3^4-1639680a_1a_3^6-5700a_2^4a_3^3-90245a_2^2a_3^5-404640a_3^7\\&-4425a_1^4a_2^2-20250a_1^3a_2^2a_3+4300a_1^2a_2^4-22500a_1^2a_2^2a_3^2+8600a_1a_2^4a_3-1950a_1a_2^2a_3^3\\&+4300a_2^4a_3^2+4725a_2^2a_3^4+2832a_1^2a_4+7296a_1a_3a_4-2752a_2^2a_4-3024a_3^2a_4\big)\end{aligned}$$

当 $a_2=0$ 时，

$$V_7=-\frac{5\pi(2a_1+b_2)b_4}{64},$$

$$V_9=-\frac{\pi b_4\left(518a_1^2+496a_1a_3-346a_1b_2+150a_3^2-142a_3b_2+35b_2^2\right)(2a_1+b_2)}{5120},$$

$$\begin{aligned}V_{11}=-\frac{27\pi b_4}{276292288000}\cdot\big[&9262943406a_1^5+84748086520a_1^4a_3+8257767831a_1^4b_2+116792096340a_1^3a_3^2\\&+42374043260a_1^3a_3b_2+1813148064a_1^3b_2^2+9938973550a_1a_3^4+27464891580a_1a_3^3b_2\\&+4969486775a_3^4b_2+54929783160a_1^2a_3^2+58396048170a_1^2a_3b_2+39572676000a_4\big]\end{aligned}$$

令 $V_7=0$，根据 V_7 因式有两种情况，即 $b_4=0$ 或 $b_2=-2a_1$。
若 $b_4=0$ 时，得到中心条件(c7)。
若 $b_2=-2a_1$ 时，

$$V_9=0,$$

$$\begin{aligned}V_{11}=&-\frac{27\pi b_4}{6940730572000}\left(45417767831a_1^5+42374043260a_1^4a_3+29198024085a_1^3a_3^2+13732445790a_1^2a_3^3\right.\\&\left.+27332177275a_1a_3^4+29198024085a_1^3a_3+13732445790a_1^2a_3^2+9893169000a_4\right),\end{aligned}$$

故得到十一阶焦点条件(f7)。

接下来我们证明条件(c1)的充分性，当满足条件(c1)时，系统(1)具有首次积分：

$$\begin{aligned}H(x,y)=&\frac{1}{2}y^2(1-a_2x)^{-\frac{2b_3}{a_2}}-\frac{(-a_2x+1)^{-\frac{2b_3}{a_2}}}{2b_3\left(90a_2^6-441a_2^5b_3+812a_2^4b_3^2-735a_2^3b_3^3+350a_2^2b_3^4-84a_2b_3^5+8b_3^6\right)}\\&\times\left(30a_2^5b_3b_4x^6-137a_2^4b_3^2b_4x^6+225a_2^3b_3^3b_4x^6-170a_2^2b_3^4b_4x^6+60a_2b_3^5b_4x^6-8b_3^6b_4x^6\right.\\&+36a_2^4b_3b_4x^5-150a_2^3b_3^2b_4x^5+210a_2^2b_3^3b_4x^5-120a_2b_3^4b_4x^5+24b_3^5b_4x^5+90a_2^5b_1b_3x^2\\&-351a_2^4b_1b_3^2x^2+461a_2^3b_1b_3^3x^2+45a_2^3b_3b_4x^4-274a_2^2b_1b_3^4x^2-165a_2^2b_3^2b_4x^4+76a_2b_1b_3^5x^2\\&+180a_2b_3^3b_4x^4-8b_1b_3^6x^2-60b_3^4b_4x^4+180a_2^5b_3x+180a_2^4b_1b_3x-522a_2^4b_3^2x-342a_2^3b_1b_3^2x\\&+580a_2^3b_3^3x+238a_2^2b_1b_3^3x-310a_2^2b_3^4x+60a_2^2b_3b_4x^3-72a_2b_1b_3^4x+80a_2b_3^5x-180a_2b_3^2b_4x^3\\&+8b_1b_3^5x-8b_3^6x+120b_3^3b_4x^3-90a_2^5-90a_2^4b_1+261a_2^4b_3+171a_2^3b_1b_3-290a_2^3b_3^2-119a_2^2b_1b_3^2\\&\left.+155a_2^2b_3^3+36a_2b_1b_3^3-40a_2b_3^4+90a_2b_3b_4x^2-4b_1b_3^4+4b_3^5-180b_3^2b_4x^2+180b_3b_4x-90b_4\right)+C\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数，同理可证明中心条件(c2)，……，(c8)的充分性。

6. 结语

本文主要通过后继函数法，研究了一类平面光滑六次系统，得到了相应的焦点和中心条件，但是对于更高次的系统需要后续进一步研究。

基金项目

河南省高等学校重点科研项目计划支持(项目编号：25B110011)，河南科技大学大学生创新创业训练计划项目(项目编号：2025238 和 2025239)。

参考文献

[1] Poincaré, H. (1886) Sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **2**, 151-217.

[2] Lyapunov, A.M. (1992) The General Problem of the Stability of Motion. *International Journal of Control*, **55**, 531-534. https://doi.org/10.1080/00207179208934253

[3] Bautin, N.N. (1939) On the Number of Limit Cycles Which Appear with the Variation of Coefficients from an Equilibrium Position of Focus or Center Type. *Matematicheskii Sbornik*, 30, 181-196.

[4] Dumortier, F., Llibre, J. and Artés, J.C. (2006) Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Springer.

[5] Romanovski, V.G. and Shafer, D.S. (2009) The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach. Birkhäuser.

[6] Christopher, C. and Li, C. (2007) Limit Cycles of Differential Equations. Springer.

[7] Rondón, G. and Sadri, N. (2026) Global Dynamics of Generalized Duffing Oscillators with Global Centers. *Applied Mathematics and Computation*, **522**, 130007. https://doi.org/10.1016/j.amc.2026.130007

[8] Llibre, J. and Rondón, G. (2023) Global Centers of a Class of Cubic Polynomial Differential Systems.