

# 交换环上幂等矩阵的对角化与秩不变性研究

赵芮涵

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月20日

## 摘要

满足  $A^2 = A$  的幂等矩阵是线性代数、模论与环论交叉领域的核心研究对象, 其代数结构、变换性质与不变量特征始终是代数学基础研究的重要方向。在实数域、复数域及一般数域范畴内, 幂等矩阵的理论体系已趋于完善: 所有幂等矩阵均可实现对角化, 其相似标准型唯一由矩阵秩确定, 且与线性空间投影算子形成一一对应关系。当研究范畴从经典数域拓展至一般交换幺环后, 域内天然成立的诸多结论不再具备普适性, 矩阵对角化的存在性、秩概念的合理界定、相似变换下的不变性, 均与基底环的内部结构(如幂等元分布、理想构造、模的自由性)深度绑定。本文以交换幺环为核心研究框架, 结合抽象代数中模论基础、理想理论与环的分类知识, 系统开展幂等矩阵的拓展性研究。首先梳理交换环、环上矩阵、幂等元、模与直和分解等前置理论, 夯实全文逻辑基础; 其次推导交换环内幂等矩阵的基础运算性质、正交构造规律与多项式特征, 剖析幂等矩阵与补幂等矩阵、正交幂等矩阵族的内在关联; 依托自由模直和分解定理, 阐释幂等矩阵的投影本质, 证明像模与核模的有限生成投射模属性; 进一步聚焦对角化核心问题, 给出交换环上幂等矩阵可对角化的充要条件, 结合主理想整环、局部环、多项式环、整数环等典型环类, 分类论证不同基底环境下的对角化可行性; 严格证明秩在相似变换下的不变性, 厘清秩、迹与幂等矩阵相似分类的对应关系; 同时结合代数编码、算子理论、群表示论、数值计算等应用场景, 具象化幂等矩阵的实用价值; 最后总结核心结论, 展望后续研究方向。

## 关键词

幂等矩阵, 交换幺环, 对角化, 秩不变性, 投射模, 直和分解, 相似标准型, 主理想整环

## Research on Diagonalization and Rank Invariance of Idempotent Matrices over Commutative Rings

Ruihan Zhao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 20, 2026

## Abstract

Idempotent matrices satisfying  $A^2 = A$  are the core research objects in the interdisciplinary fields of linear algebra, module theory and ring theory. Their algebraic structure, transformation properties and invariant characteristics have always been important directions in the basic research of algebra. In the categories of real number field, complex number field and general number fields, the theoretical system of idempotent matrices has been improved: all idempotent matrices can be diagonalized, their similar canonical forms are uniquely determined by the matrix rank, and they form a one-to-one correspondence with linear space projection operators. When the research scope is extended from classical number fields to general commutative rings with identity, many conclusions naturally established in the field are no longer universal. The existence of matrix diagonalization, the reasonable definition of rank, and the invariance under similarity transformation are deeply bound to the internal structure of the base ring (such as idempotent element distribution, ideal structure, and module freeness). Based on the core research framework of commutative rings with identity, combined with the basic knowledge of module theory, ideal theory and ring classification in abstract algebra, this paper carries out expanded research on idempotent matrices systematically. Firstly, it combs the pre-theories such as commutative rings, matrices over rings, idempotent elements, modules and direct sum decomposition to consolidate the logical foundation of the full text. Secondly, it deduces the basic operation properties, orthogonal construction rules and polynomial characteristics of idempotent matrices in commutative rings, and analyzes the internal correlation between idempotent matrices, complementary idempotent matrices and orthogonal idempotent matrix families. Relying on the direct sum decomposition theorem of free modules, it explains the projection essence of idempotent matrices, and proves the finitely generated projective module properties of image modules and kernel modules. It further focuses on the core problem of diagonalization, gives the necessary and sufficient conditions for diagonalization of idempotent matrices over commutative rings, and demonstrates the feasibility of diagonalization under different base environments combined with typical rings such as principal ideal domains, local rings, polynomial rings and integer rings. It strictly proves the invariance of rank under similarity transformation, and clarifies the corresponding relationship between rank, trace and similar classification of idempotent matrices. At the same time, combined with application scenarios such as algebraic coding, operator theory, group representation theory and numerical calculation, it embodies the practical value of idempotent matrices. Finally, it summarizes the core conclusions and prospects the future research directions.

## Keywords

Idempotent Matrix, Commutative Ring with Identity, Diagonalization, Rank Invariance, Projective Module, Direct Sum Decomposition, Similar Canonical Form, Principal Ideal Domain

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

### 1.1. 研究背景与意义

幂等矩阵是代数学中兼具简洁性与深刻性的特殊矩阵类型，其核心定义直观凝练，却承载着线性空间分解、投影变换、模结构刻画等核心代数思想。在本科高等代数教学体系中，数域上的幂等矩阵是讲

解矩阵对角化、极小多项式、线性变换直和分解的经典案例，也是衔接基础线性代数与抽象代数的关键知识点。对于数学与应用数学(师范)专业而言，深入研究幂等矩阵不仅能够夯实专业基础理论，更能提升代数推理、逻辑证明与知识拓展应用的核心能力，契合考研深化学习与学术素养培养的双重需求。

在经典数域框架下，幂等矩阵的研究成果已十分成熟：实数域、复数域、有理数域上的任意幂等矩阵，极小多项式均整除 $x(x-1)$ ，无重根特征保障了矩阵的可对角化属性；其相似标准型为仅含0与1的对角矩阵，对角线上1的个数等价于矩阵的秩，同时幂等矩阵的迹与秩完全相等，成为数值计算与理论推导中的常用结论。但现有教学内容与基础教材大多局限于数域范畴，对更广义的代数结构缺乏延伸探讨。

随着抽象代数理论的发展，环上矩阵理论逐步成为代数学的重要分支。交换幺环作为包含数域、整数环、多项式环、局部环、主理想整环的广义代数体系，能够统一刻画多种数学对象的运算规律。将幂等矩阵从数域推广至交换环，不再是单纯的理论拓展，而是解决复杂代数问题、衔接多分支理论的必要路径。在交换环环境中，数域内的诸多优良性质会发生本质变化：部分环内存在非平凡幂等元，导致对角矩阵的对角元不再局限于0和1；自由模的直和项未必仍是自由模，直接打破了所有幂等矩阵必可对角化的固有认知；环上矩阵秩的定义依托子式理想生成，其判定标准与数域向量组秩存在明显差异。

从理论价值来看，研究交换环上幂等矩阵的对角化与秩不变性，能够完善环上矩阵的基础理论体系，打通矩阵论、模论、环论、同调代数之间的理论壁垒，为幂等算子、对合矩阵、正交投影矩阵等相关研究提供支撑；从应用价值而言，幂等矩阵广泛应用于代数编码理论、信号处理、最小二乘优化、群表示论、算子代数等领域，环上幂等矩阵的结构研究，能够为纠错码构造、信号降噪、多维空间分解等工程应用提供理论依据；从教学价值分析，该研究贴合师范类数学专业的考研方向与学术培养目标，能够将本科阶段的高等代数、近世代数知识融会贯通，形成系统化的代数思维。

## 1.2. 国内外研究现状

国外对环上幂等矩阵的研究起步较早，经典成果集中于模论与环的结构分类领域。Lam TY 在《Lectures on Modules and Rings》[1]中系统阐释了幂等元与投射模、直和分解的关联，明确了幂等矩阵对应自由模直和项的核心结论；Jacobson 在环论专著中深入分析了局部环、主理想整环内幂等元的分布规律，证明了特殊环类中幂等矩阵的对角化可行性[2]；后续国外学者进一步将研究拓展至非交换环、幂等矩阵族、广义幂等算子等方向，形成了完备的高端理论体系[3][4]，但相关文献多为纯抽象推导，缺乏适配本科阶段的通俗化梳理与系统化整合。

国内研究以教材编撰、基础拓展、应用落地为主。聂灵沼、丁石孙在《代数学引论》[5]中铺垫了环上矩阵与幂等元的基础理论；李炯生《矩阵论》[6]细化了数域幂等矩阵的性质与应用；郭聿琦等学者聚焦环上矩阵相似标准型问题，发表了系列深化研究，厘清了特殊交换环内幂等矩阵的分类规则[7]；万哲先将幂等矩阵理论融入代数编码研究，实现了理论与工程应用的结合[8]。整体而言，国内现有研究存在两极分化：基础教材内容局限于数域范畴，拓展性不足；高端学术论文推导晦涩，难以被本科高年级学生理解借鉴，适配师范类考研学习、毕业设计的中等深度系统化论文较为稀缺[7][9]。

## 1.3. 研究内容

本文立足本科数学专业知识体系，以交换幺环为研究全域，开展全方位、分层化的幂等矩阵研究，核心研究内容包括：其一，完善前置预备理论，系统梳理交换幺环、环上矩阵、幂等元、自由模、直和分解、投射模等核心概念，搭建完整的理论框架；其二，推导幂等矩阵的基础运算性质，分析补幂等矩阵、正交幂等矩阵的构造规律与代数特征[4][6]；其三，依托模论核心定理，证明幂等矩阵对应的自由模直和分解，剖析像模与核模的投射属性[1][3]；其四，建立交换环上幂等矩阵可对角化的充要条件，分类讨论

不同典型环类的适配结论[4] [7] [9]; 其五, 严格证明秩的相似不变性, 阐释秩、迹、相似分类的内在关联; 其六, 结合多领域应用场景, 具象化理论价值[6] [8], 同时总结成果并展望后续研究方向。

## 1.4. 论文整体框架

全文共设置九大核心章节: 第一章为引言, 阐述研究背景、现状、内容与创新点; 第二章为预备知识, 罗列全文所需基础定义与前置定理; 第三章分析幂等矩阵的基础代数性质; 第四章依托模论探究直和分解结构与投射模属性; 第五章重点论证对角化充要条件与典型环类结论[2] [4] [7]; 第六章证明秩的不变性及相关衍生规律; 第七章分类剖析不同交换环上幂等矩阵的标准型; 第八章结合实际场景阐述应用价值; 第九章总结全文核心结论, 展望后续研究方向。整体框架层层递进, 理论推导由浅入深, 实现基础概念 - 性质推导 - 核心定理 - 分类拓展 - 实际应用的完整闭环。

## 2. 预备知识

本章系统罗列全文涉及的基础定义、核心引理与前置结论, 所有内容均取自经典代数教材, 统一符号规范与理论口径, 保障后续推导逻辑自洽、通俗易懂, 降低跨知识点理解门槛。本文若无特殊说明, 所有研究的环均为有单位元的交换环(交换幺环), 所有矩阵均为环上有限阶方阵, 所有模均为环上有限生成模。

### 2.1. 交换幺环与典型环类

**定义 2.1** 设非空集合  $R$  上定义加法与乘法两种二元运算, 满足: 加法构成交换群; 乘法满足结合律与交换律; 乘法对加法满足分配律; 存在元素  $1 \in R$ , 使得对任意  $a \in R$ , 有  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ , 则称  $R$  为交换幺环, 元素  $1$  称为单位元。

常见典型交换幺环分类:

1. 数域: 有理数域  $\mathbb{Q}$ 、实数域  $\mathbb{R}$ 、复数域  $\mathbb{C}$ , 所有数域均为特殊的交换幺环, 且仅有两个幂等元  $0, 1$ ;
2. 整数环  $\mathbb{Z}$ : 全体整数关于普通加法与乘法构成的环, 是最基础的主理想整环;
3. 多项式环  $F[x]$ : 数域  $F$  上一元多项式全体构成的环, 属于主理想整环;
4. 局部环: 仅有唯一极大理想的交换幺环, 环内幂等元仅有  $0, 1$ ;
5. 剩余类环  $\mathbb{Z}_n$ : 整数模  $n$  剩余类构成的环, 当  $n$  为合数时存在非平凡幂等元。

**定义 2.2** 设  $R$  为交换幺环, 元素  $e \in R$  若满足  $e^2 = e$ , 则称  $e$  为  $R$  中的幂等元。若  $e = 0$  或  $e = 1$ , 称  $e$  为平凡幂等元; 否则称为非平凡幂等元。幂等元的分布直接决定环上幂等矩阵的对角化结构。

### 2.2. 环上矩阵与幂等矩阵

**定义 2.3** 设  $R$  为交换幺环, 记号  $M_{n \times m}(R)$  表示所有元素取自  $R$  的  $n$  行  $m$  列矩阵构成的集合; 特别地,  $M_n(R) = M_{n \times n}(R)$  为  $n$  阶方阵集合, 关于矩阵加法、乘法构成含单位元的环, 称为矩阵环。

矩阵的加法、数乘、乘法运算沿用经典线性代数规则, 运算结果仍属于环上矩阵; 单位矩阵  $I_n \in M_n(R)$  为主对角线全为 1、其余元素全为 0 的方阵, 是矩阵环的单位元; 零矩阵  $O$  为所有元素全为 0 的方阵。

**定义 2.4** 设  $A \in M_n(R)$ , 若满足矩阵乘法等式:

$$A^2 = A.$$

即矩阵自身平方等于自身, 则称  $A$  为  $R$  上的  $n$  阶幂等矩阵。

幂等矩阵是环内幂等元在矩阵环中的直接推广: 一阶幂等矩阵等价于环内幂等元, 高阶幂等矩阵可视为幂等元的结构化拓展。

### 2.3. 矩阵相似与对角化

**定义 2.5** 设  $A, B \in M_n(R)$ , 若存在可逆矩阵  $P \in M_n(R)$  (存在  $P^{-1} \in M_n(R)$  使得  $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ ), 满足:

$$B = PAP^{-1}$$

则称矩阵  $A$  与  $B$  在环  $R$  上相似, 记为  $A \sim B$ 。

相似关系是矩阵环上的等价关系, 满足自反性、对称性、传递性, 能够将复杂矩阵划归为简洁的标准型, 是研究矩阵结构的核心工具。

**定义 2.6** 若方阵  $A \in M_n(R)$  与某个对角矩阵  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  相似, 则称  $A$  在  $R$  上可对角化。

对于幂等矩阵, 若可对角化, 则对角元必然为环内幂等元: 由  $\Lambda^2 = \Lambda$ , 可得  $\lambda_i^2 = \lambda_i (\forall i)$ , 即每个对角元均为幂等元。

### 2.4. 环上矩阵的秩

数域中矩阵秩可通过向量组极大线性无关组定义, 而一般交换环内无通用的线性无关定义, 因此采用子式理想界定秩:

**定义 2.7** 设  $A \in M_{n \times m}(R)$ , 对任意正整数  $k$ , 取  $A$  的所有  $k$  阶子式, 由全体  $k$  阶子式生成  $R$  中的理想。若存在最大的正整数  $r$ , 使得  $r$  阶子式生成的理想包含单位元 (存在可逆  $r$  阶子式), 且所有  $r+1$  阶子式全为 0, 则称  $r$  为矩阵  $A$  的秩, 记为  $\text{rank}(A)$ 。

在数域、主理想整环等优良环类中, 该秩定义与经典向量组秩完全等价, 保障了理论的延续性。

### 2.5. 模、自由模与直和分解

**定义 2.8** 设  $R$  为交换幺环, 加法交换群  $M$  若存在数乘运算  $R \times M \rightarrow M$ , 满足数乘分配律、结合律与单位元数乘性质, 则称  $M$  为  $R$ -模。数域上的线性空间是特殊的  $R$ -模。

**定义 2.9** 若  $R$ -模  $M$  存在一组基, 使得模内任意元素均可唯一表示为基元素的线性组合, 则称  $M$  为自由  $R$ -模; 有限秩自由模可表示为  $R^n = (a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in R$ 。

**定义 2.10** 设  $M_1, M_2$  为  $R$ -模  $M$  的子模, 若  $M = M_1 + M_2$ , 且  $M_1 \cap M_2 = 0$ , 则称  $M$  为  $M_1$  与  $M_2$  的直和, 记为  $M = M_1 \oplus M_2$ 。

**定义 2.11** 若  $R$ -模  $P$  是某个自由模的直和项, 则称  $P$  为投射模。自由模一定是投射模, 但投射模未必是自由模 (仅特殊环类中二者等价)。

### 2.6. 像模与核模

**定义 2.12** 设  $A \in M_n(R)$ , 对应自由模  $R^n$  上的模同态  $\varphi(x) = Ax$ , 定义:

1. 核模:  $\text{Ker}(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$ , 为同态零化子构成的子模;
2. 像模:  $\text{Im}(A) = \{Ax | x \in R^n\}$ , 为同态值域构成的子模。

核模与像模是刻画矩阵对应模同态结构的核心子模, 也是分析幂等矩阵分解性质的关键载体。

## 3. 幂等矩阵的基础代数性质

本章依托预备知识, 严格推导交换幺环上幂等矩阵的基础运算规律、互补构造特征与多项式属性, 所有推导均采用纯代数演算, 逻辑严谨、步骤详实, 同时区分通用环性质与数域特殊性质, 明确一般与特殊的边界。

### 3.1. 补幂等矩阵的核心性质

**定理 3.1** 设  $A \in M_n(R)$  为交换幺环  $R$  上的幂等矩阵, 则补矩阵  $I - A$  也是幂等矩阵, 且满足正交运算关系:

$$A(I - A) = O, (I - A)A = O$$

**证明:** 直接展开矩阵平方运算验证幂等性:

$$(I - A)^2 = (I - A)(I - A) = I \cdot I - I \cdot A - A \cdot I + A^2$$

由于  $R$  为交换幺环, 矩阵乘法满足单位元性质  $IA = AI = A$ , 结合幂等定义  $A^2 = A$ , 代入得:

$$(I - A)^2 = I - A - A + A = I - A$$

因此  $I - A$  满足幂等矩阵定义。

再验证正交性:

$$A(I - A) = AI - A^2 = A - A = O$$

$$(I - A)A = IA - A^2 = A - A = O$$

定理得证。

该性质揭示了幂等矩阵的互补对称特征: 任意一个投影幂等矩阵, 都对应另一个正交的补投影矩阵, 二者相互零化, 为后续直和分解提供了直接的代数依据。在数域中,  $A$  对应于子空间投影,  $I - A$  对应正交补空间投影, 正是该定理的几何具象化。

### 3.2. 正交幂等矩阵的合成性质

**定义 3.1** 设  $A, B \in M_n(R)$  均为幂等矩阵, 若满足  $AB = BA = O$ , 则称  $A$  与  $B$  为正交幂等矩阵。

**定理 3.2** 若  $A, B$  是交换幺环上的正交幂等矩阵, 则其和  $A + B$  仍为幂等矩阵。

**证明:** 展开平方运算:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

由幂等性  $A^2 = A, B^2 = B$ , 由正交性  $AB = BA = O$ , 代入化简:

$$(A + B)^2 = A + O + O + B = A + B$$

故  $A + B$  为幂等矩阵。

**推论 3.1** 有限个两两正交的幂等矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , 其和  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  仍是幂等矩阵。

该推论可通过数学归纳法轻松证明, 是构造复杂幂等矩阵、拆分对角幂等矩阵的重要工具: 任意含多个幂等对角元的对角矩阵, 均可拆解为两两正交的一阶幂等矩阵之和。

### 3.3. 幂等矩阵的多项式特征与极小多项式

**定理 3.3** 设  $A$  为交换幺环上的幂等矩阵, 则矩阵多项式满足: 对任意整数  $k \geq 1$ , 有  $A^k = A$ 。

**证明:** 采用数学归纳法。当  $k = 1$  时,  $A^1 = A$ , 显然成立; 当  $k = 2$  时, 由幂等定义  $A^2 = A$ , 成立。

假设  $k = m (m \geq 2)$  时  $A^m = A$  成立, 则  $k = m + 1$  时:

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

由归纳法, 对所有正整数  $k$ , 结论恒成立。

该性质说明幂等矩阵的高次幂无新增结构，所有幂次均回归自身，极大简化了矩阵多项式的运算复杂度。

在多项式视角下，幂等矩阵满足方程  $A^2 - A = O$ ，即多项式  $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$  是  $A$  的零化多项式。由此可得：

**定理 3.4** 幂等矩阵的极小多项式  $m(x)$  在多项式环  $R[x]$  中整除  $x(x-1)$ 。

在数域中， $x(x-1)$  为互素一次因式乘积，无重根，这是数域幂等矩阵必可对角化的多项式根源；而在一般交换环中，多项式因式分解不唯一，重根判定失效，极小多项式无法直接推导对角化，这也是环上幂等矩阵对角化受限的核心原因。

### 3.4. 幂等矩阵的可逆性分析

**定理 3.5** 设  $A \in M_n(R)$  为幂等矩阵，若  $A$  可逆，则必有  $A = I$ 。

**证明：** 已知  $A$  可逆，存在  $A^{-1}$  使得  $A^{-1}A = I$ 。由  $A^2 = A$ ，两边左乘  $A^{-1}$ ：

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = I$$

结论成立。

同理可证：若非零幂等矩阵不可逆，则其补矩阵  $I - A$  也不可逆(平凡情形除外)。该性质说明：除单位矩阵外，所有非平凡幂等矩阵均为奇异矩阵，天然对应空间的投影压缩，无逆变换。

## 4. 幂等矩阵与自由模的直和分解

本章是全文的核心理论支撑，依托模论基础，揭示幂等矩阵的本质是自由模的投影分解算子，严格证明像模与核模的直和关系，剖析投射模属性，从根源上解释环上幂等矩阵的结构特征。

### 4.1. 核心直和分解定理

**定理 4.1** 设  $R$  为交换幺环， $A \in M_n(R)$  为幂等矩阵，对应自由模  $R^n$  上的模同态  $\varphi(x) = Ax$ ，则自由模可分解为像模与核模的直和：

$$R^n = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$$

**证明：** 分两步证明，先证  $R^n = \text{Im}(A) + \text{Ker}(A)$ ，再证  $\text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = 0$ 。

第一步：任意取  $x \in R^n$ ，对元素做恒等拆分：

$$x = Ax + (I - A)x$$

记  $x_1 = Ax, x_2 = (I - A)x$ 。显然  $x_1 \in \text{Im}(A)$ ；验证  $x_2 \in \text{Ker}(A)$ ：

$$Ax_2 = A(I - A)x = (A - A^2)x = Ox = 0$$

因此任意元素均可表示为像模元素与核模元素之和，即  $R^n = \text{Im}(A) + \text{Ker}(A)$ 。

第二步：任取  $y \in \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A)$ ，由  $y \in \text{Im}(A)$ ，存在  $z \in R^n$  使得  $y = Az$ ；由  $y \in \text{Ker}(A)$ ，得  $Ay = 0$ 。代入得：

$$Ay = A(Az) = A^2z = Az = y = 0$$

因此交集仅有零元素。

综上，满足直和定义，定理得证。

该定理是幂等矩阵最本质的代数刻画：每一个幂等矩阵，唯一对应自由模的一个直和分解；反之，自由模的任意一个直和分解，都唯一确定一个幂等投影矩阵。二者是一一对应的等价关系。

## 4.2. 像模与核模的投射模属性

**定理 4.2** 设  $A$  为交换幺环  $R$  上的幂等矩阵, 则  $\text{Im}(A)$  与  $\text{Ker}(A)$  均为有限生成投射  $R$ -模。

**证明:** 由定理 4.1,  $\text{Im}(A)$  与  $\text{Ker}(A)$  均为有限秩自由模  $R^n$  的子模, 且满足  $R^n = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$ 。根据投射模的定义: 自由模的任意直和项均为投射模。因此两个子模均为投射模。

同时,  $R^n$  是有限生成模, 其直和项必然有限生成, 故二者为有限生成投射模。

该结论直接打通幂等矩阵与同调代数的关联: 投射模的自由性, 直接决定幂等矩阵能否对角化。在主理想整环、局部环中, 有限生成投射模必为自由模; 而在一般交换环中, 投射模未必自由, 这就是部分环上幂等矩阵无法对角化的根本原因。

## 4.3. 直和分解的唯一性分析

**推论 4.1:** 由幂等矩阵诱导的自由模直和分解是唯一的, 即一个幂等矩阵仅能对应一组像模与核模的直和拆分; 反之, 一组直和拆分仅能构造唯一的幂等投影矩阵。

唯一性保障了幂等矩阵结构的稳定性: 矩阵的代数特征与模的分解特征严格绑定, 不会因表述方式变化而改变, 为后续秩不变性、相似分类提供了唯一性支撑。

## 5. 幂等矩阵的对角化条件与分类论证

对角化是简化矩阵结构、实现标准化分类的核心手段, 本章区分通用交换环与典型特殊环, 给出严谨的对角化充要条件, 层层剖析不同基底环境下的结论差异。

### 5.1. 对角化的结构内涵

若幂等矩阵  $A$  可对角化, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得:

$$PAP^{-1} = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

其中  $e_i^2 = e_i$ , 即所有对角元均为环内幂等元。

1. 当环仅有平凡幂等元  $0, 1$  时, 对角标准型简化为  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $1$  的个数等于矩阵秩;
2. 当环存在非平凡幂等元时, 对角元可包含任意幂等元, 标准型更复杂。

### 5.2. 通用交换环上可对角化充要条件

**定理 5.1** 交换幺环  $R$  上的幂等矩阵  $A$  可对角化, 当且仅当  $\text{Im}(A)$  与  $\text{Ker}(A)$  均为自由  $R$ -模。

**证明:**

**必要性:** 若  $A$  可对角化, 则其相似对角矩阵对应的像模与核模均为自由模; 相似变换保持模的同构性, 故原矩阵的像模、核模必为自由模。

**充分性:** 若  $\text{Im}(A)$  与  $\text{Ker}(A)$  均为自由模, 分别取两组基, 拼接构成  $R^n$  的一组整体基; 以该组基构造可逆过渡矩阵  $P$ , 通过基变换实现矩阵对角化, 最终得到以幂等元为对角元的对角矩阵。定理得证。

结合定理 4.2 可知: 幂等矩阵的像模、核模天然就是投射模, 对角化的本质就是投射模升级为自由模。

### 5.3. 典型环类的对角化专项结论

#### 5.3.1. 主理想整环

**定理 5.2** 主理想整环上所有有限生成投射模均为自由模, 因此主理想整环上的任意幂等矩阵均可对角化。

**证明概要:** 设  $R$  为主理想整环,  $P$  为有限生成投射  $R$ -模。由投射模定义,  $P$  是某有限秩自由  $R$ -模  $F$

的直和项，即存在模  $Q$  使得  $F = P \oplus Q$ 。主理想整环上有限生成模的结构定理表明：有限生成模可分解为循环模的直和，而投射模无挠元，故  $P$  必同构于有限秩自由  $R$ -模，即有限生成投射模是自由模。

整数环  $\mathbb{Z}$ 、数域多项式环  $F[x]$  均为典型主理想整环，其上幂等矩阵必相似于仅含 0 与 1 的对角矩阵，标准型由秩唯一确定。数域是主理想整环的特例，经典高数结论在此得到严格推广。

### 5.3.2. 局部环

**定理 5.3** 局部环仅有平凡幂等元，且有限生成投射模必自由，故局部环上所有幂等矩阵均可对角化，标准型为  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ 。

证明概要：设  $(R, \mathfrak{m})$  为局部环， $P$  为有限生成投射  $R$ -模。由 Nakayama 引理，若  $P/\mathfrak{m}P$  是  $R/\mathfrak{m}$  上的有限维线性空间，取其一组基的提升生成  $P$ ，可证生成元线性无关；结合投射模性质，该生成元组构成  $P$  的一组基，故  $P$  是自由  $R$ -模。同时局部环的极大理想唯一性决定其幂等元仅有 0 与 1，因此对角化后标准型为 0-1 对角矩阵。

局部环的极大唯一性限制了幂等元的生成，保障了对角标准型的简洁性。

### 5.3.3. 一般交换环

在含非平凡幂等元的一般交换环(如合数剩余类环)中，投射模未必自由，幂等矩阵不一定可对角化；即便可对角化，对角元也会出现非平凡幂等元，无法简化为 0-1 对角矩阵。

## 6. 秩的相似不变性与衍生性质

秩是幂等矩阵最核心的数值不变量，本章严格证明相似变换保秩，阐释秩与迹的关联，明确秩对幂等矩阵相似分类的决定性作用。

### 6.1. 秩的相似不变性定理

**定理 6.1** 设  $A, B \in M_n(R)$  为交换环上相似的幂等矩阵，则  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。

证明：矩阵相似依托可逆矩阵实现，可逆矩阵的乘积变换不会改变矩阵各阶子式生成的理想：高阶可逆子式仍保持可逆，零子式仍保持零化。环上矩阵秩由最大可逆子式阶数界定，因此相似矩阵的秩必然相等。

该定理说明：秩是幂等矩阵相似等价类的固有标识，不会因基变换、相似变换发生改变。

### 6.2. 秩与迹的关联规律

**定义 6.1** 方阵的迹为主对角线所有元素之和，记为  $\text{tr}(A)$ 。

**定理 6.2:** 在数域、主理想整环、局部环中，可对角化幂等矩阵满足  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ 。

证明：对角化后矩阵对角元仅有 0 与 1，迹等于 1 的个数，恰好等价于秩；相似变换保迹、保秩，故原矩阵秩与迹相等。

该规律广泛应用于数值计算、统计投影分析，是快速判定幂等矩阵秩的简便方法。

### 6.3. 秩作为完全分类不变量

**定理 6.3:** 在主理想整环、局部环中，两个同阶幂等矩阵相似的充要条件是秩相等。

即：秩唯一决定幂等矩阵的相似标准型，只要秩相同，矩阵即可通过可逆变换相互转化，实现完全分类。

## 7. 典型环上幂等矩阵的标准化构型

本章整合前文结论，分类给出不同交换环内幂等矩阵的最终标准型，形成系统化的构型总结。

## 7.1. 数域

所有幂等矩阵  $\sim \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 个}}, 0, \dots, 0 \right)$ ,  $r = \text{rank}(A)$ 。

## 7.2. 整数环/多项式环

同数域标准型, 均可对角化, 秩定标准型。

## 7.3. 局部环

标准型为 0-1 对角矩阵, 无复杂幂等元。

## 7.4. 一般交换环

可对角化矩阵的对角元为环内幂等元, 无统一简洁标准型; 不可对角化矩阵无最简对角构型。

## 8. 实际应用场景分析

### 8.1. 数值线性代数

幂等矩阵对应投影算子, 支撑最小二乘拟合、信号降噪、多维空间降维[5]。

### 8.2. 代数编码理论

依托环上幂等矩阵构造纠错码生成矩阵与校验矩阵, 优化码字分解[7]。

### 8.3. 群表示论

利用正交幂等元拆分群表示, 拆解不可约子表示, 实现表示空间直和分解[2]。

### 8.4. 师范教学应用

该理论可拓展高等代数课堂内容, 丰富考研代数证明题型, 提升抽象思维教学深度[1]。

## 9. 结论与展望

### 9.1. 核心结论总结

1. 交换幺环上幂等矩阵必存在补幂等矩阵, 正交幂等矩阵之和仍为幂等矩阵, 高次幂恒等于自身;
2. 幂等矩阵等价于自由模直和分解, 像模与核模为有限生成投射模;
3. 幂等矩阵可对角化的充要条件是像模、核模为自由模, 主理想整环、局部环内全能对角化;
4. 秩在相似变换下恒定, 优良环类中秩可完全划分幂等矩阵的相似类。

### 9.2. 未来研究展望

后续可拓展研究非交换环幂等矩阵、广义幂等矩阵、幂等矩阵族的联合分解、幂等矩阵与对合矩阵的关联结构, 进一步丰富环上矩阵理论体系。

## 参考文献

- [1] Lam, T.Y. (1999) Lectures on Modules and Rings. Springer.
- [2] Matsumura, H. (1989) Commutative Ring Theory. Cambridge University Press.
- [3] Rotman, J.J. (2009) An Introduction to Homological Algebra. 2nd Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/b98977>

- 
- [4] Brown, W.C. (1993) *Matrices over Commutative Rings*. Marcel Dekker.
  - [5] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2000.
  - [6] 李炯生. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
  - [7] 郭聿琦, 岑嘉评. 环上矩阵相似标准型的若干研究[J]. 数学进展, 2012, 41(2): 129-160.
  - [8] 万哲先. 代数编码理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
  - [9] 王芳贵. 交换环上矩阵的对角化与标准型[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2005, 42(3): 441-445.