Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 472-483
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155244

围长为6平面图的限制森林分解

吴正国

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2026年4月21日；录用日期：2026年5月15日；发布日期：2026年5月26日

摘　要

图G的(F_i',F_j')-分解是指把$V(G)$分成两个非空的集合V_1和V_2，使得$G[V_1]$和$G[V_2]$分别是每个连通分支边数至多为i和j的森林。令$\mathcal{G}_6$表示所有围长$g\geq 6$的平面图。本文，我们证明了若$G\in\mathcal{G}_6$且G中6-圈与7^--圈不相邻，则G有(F_6',F_6')-分解。

关键词

森林分解，围长，权转移，平面图

Partitioning Planar Graphs with Girth at Least 6 into Restricted Forest

Zhengguo Wu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: April 21, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

An (F_i',F_j')-partition of a graph G is the partition of $V(G)$ into two non-empty subsets V_1 and V_2, so that $G[V_1]$ and $G[V_2]$ are both forests whose components have edges at most i and j, respectively. Let $\mathcal{G}_6$ denote the family of planar graphs with girth at least 6. In this paper, we prove that if $G\in\mathcal{G}_6$ and no adjacent 6- and 7^--cycles in G, then G admits an (F_6',F_6')-partition.

文章引用: 吴正国. 围长为 6 平面图的限制森林分解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 472-483.
DOI: 10.12677/aam.2026.155244

Keywords

Forest Partition, Girth, Discharging Method, Planar Graph

1. 引言

用 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 表示 m 个图类，若能将 G 的顶点集合 $V(G)$ 划分为 m 个互不相同的子集 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，使得对于每个 $1\le i\le m$，都有 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 属于图类 G_i，那么称 G 有一个 $(G_1,G_2,\cdots,G_m)$-分解。

本文用 I,F,F_d,F_d',O_k 和 P_k 分别表示空图，森林，最大度为 d 的森林，每个连通分支边数至多为 d 的森林，每个连通分支顶点数至多为 k 的图类和每个连通分支顶点数至多为 k 的路的图类。令 G 为一个图，若能将图 G 画在平面上，使得它的任意两条边仅在顶点处相交，则称 G 为可平面图，可平面图的上述特定嵌入称为平面图。我们用 $V(G)$，$E(G)$ 和 $F(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集和面集。用 $g(G)$ 表示 G 中最短圈的长度，称其为 G 的围长。记所有围长至少为 k 的平面图类为 $\mathcal{G}_k$。

围长限制条件下平面图的森林分解问题，一直是研究的热点。1968 年，Chartrand 等[1]证明了所有平面图都有 (F,F,F)-分解。Poh [2]在 1990 年证明了所有平面图都有 (F_2,F_2,F_2)-分解。那么满足什么条件的平面图会有 (F_i,F_j)-分解呢？学者们对围长限制条件下平面图的 (F_i,F_j)-分解进行了许多研究。Chen 等[3]-[5]分别证明了 $\mathcal{G}_5$ 有 (F_3,F_5)-分解，(F_4,F_4)-分解，以及 (F_2,F_6)-分解。Chappell 等[6]证明了 $\mathcal{G}_6$ 有 (F_2,F_2)-分解。Borodin 等[7]找到了一个图 $G\in\mathcal{G}_6$ 使得 G 无 (F_0,F_d)-分解。Chen 等[8]证明了 $\mathcal{G}_6$ 有 (F_1,F_4)-分解，并猜想 $\mathcal{G}_6$ 有 (F_1,F_3)-分解。Chen 等[9]证明了 $\mathcal{G}_7$ 有 (F_0,F_4)-分解，$\mathcal{G}_8$ 有 (F_0,F_2)-分解。Esperet 等[10]找到了一个 $G\in\mathcal{G}_9$ 且 G 无 (F_0,F_1)-分解。Kim 等[11]证明了 $\mathcal{G}_{11}$ 有 (F_0,F_1)-分解。Borodin 等[12]证明了 $\mathcal{G}_{12}$ 有 (F_0,F_1)-分解。Borodin 等[13]证明了 $\mathcal{G}_{14}$ 有 (F_0,F_1)-分解。Glebov 等[14]证明了 $\mathcal{G}_{16}$ 有 (F_0,F_1)-分解。

更进一步，有学者对每个连通分支顶点数限制的森林分解进行研究。2011 年，Borodin 等[15]证明了 $\mathcal{G}_7$ 有 (P_3,P_3)-分解。随后 Borodin 等[16]进一步将结果改进到 $\mathcal{G}_7$ 有 (P_2,P_2)-分解。2017 年，Axenocivh 等[17]证明了 $\mathcal{G}_6$ 有 (P_{15},P_{15})-分解。2020 年，Choi 等[18]证明了 $\mathcal{G}_9$ 有 (F_0,O_9)-分解和 $\mathcal{G}_{10}$ 有 (F_0,P_3)-分解。2021 年，Tian 等[19]证明了 9-圈不相交的 $\mathcal{G}_9$ 有 (F_0,O_6)-分解。随后，Cranston 等[20]将上述结果改进到 $\mathcal{G}_9$ 有 (F_0,O_3)-分解，并且证明了 $\mathcal{G}_8$ 有 (F_0,O_4)-分解和 $\mathcal{G}_7$ 有 (F_0,O_6)-分解。2023 年，Liu 等[21]证明了无相交 i-圈和 j-圈的 $\mathcal{G}_6$ 有 (P_3,P_3)-分解，其中 $i\in\{6,7\}$ 且 $j\in\{6,7,8,9\}$。

定理 1 令 $G\in\mathcal{G}_6$。若 G 中不含相邻的 6-圈和 7^--圈，则 G 有 (F_6',F_6')-分解。

2. 符号说明

本文我们仅考虑有限简单平面图。对于一个图 G，用 $d(v)$ 表示 v 的度数，并分别用 k-点，k^+-点和 k^--点，表示 $d(v)=k$，$d(v)\ge k$，$d(v)\le k$。用 $N(v)$ 表示点 v 邻点集合。我们将 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别称作 G 的最小度和最大度。对于 $f\in F(G)$，面 f 的度数是指它边界上边的数量(割边算两次)，记为 $d(f)$。同样地，分别用 k-面，k^+-面和 k^--面，表示 $d(f)=k$，$d(f)\ge k$，$d(f)\le k$。如果面 f 的边界按顺时针排列为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$，那么记为 $f=[v_1v_2\cdots v_n]$。称 f 为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$-面当且仅当对于每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有 $d(v_i)=a_i$。用 $n_k(f)$ 表示 f 上 k-点的数量。用 i^j-面 f 表示满足 $i\le d(f)\le j$ 的面的全体。若两个圈有一个公共点，则称它们相交；若两个圈有一条公共边，则称它们相邻。

我们用 $P[v_1v_2\cdots v_m]$ 来表示图 G 中由点 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 导出的一条路，一般地，简写成 $P[v_1,v_m]$。用 $\left|P[v_1,v_m]\right|$ 表示路 $P[v_1,v_m]$ 的长度。令 $f=[v_1v_2\cdots v_m]$，用 $P_f[v_i,v_j]$ 表示在面 f 上按顺时针方向从 v_i 到 v_j 的一条路。用 $n_k(P)$ 表示 P 上 k-点的数量。同样地，我们用 $n_k(v)$ 表示 v 相邻 k-点的数量。如果一个 3^+-点 v 关联一个面 f 或路 P 那么称 v 不在 f 或 P 上的邻点 u 为 v 的外邻点。若 $d(u)=k$，则称 u 为 v 的外 k-邻点。对于 $G'\subset G$ 的一个 (F_4',F_4')-分解 $\{F_A',F_B'\}$。如果 $\upsilon\in F_X'$，那么我们就称它为 F_X'-点，其中 $X\in\{A,B\}$ 若 $x\in N(v)$ 则称 F_X'-点 $\mathcal{X}$ 是 v 的一个 F_X'-邻点。

3. 定理 1 的证明

假设定理 1 不成立。令 $G=(V,E,F)$ 为满足定理 1 条件的点数最少的反例，其中 F 为 G 的一个平面嵌入。显然，G 是连通图。下面，我们首先研究 G 的结构性质，然后用权转移方法得到矛盾，从而定理 1 成立。

3.1. 结构性质

本小节，我们将研究 G 的一些结构性质。

引理 1 $\delta(G)\geq 2$

证明 反设 G 存在 1-点 v 相邻点 u, 令 $G'=G-v$。根据 G 的极小性，G' 有 1 个 (F_6',F_6')-分解 $\{F_A',F_B'\}$ 若 u 属于 F_A'，则把 v 放入 F_B'。否则把 v 放入 F_A'。无论哪种情况，都可得到 G 的 1 个 (F_6',F_6')-分解，矛盾。引理 1 证毕。 □

引理 2 若 v 是 7^--点，则 $n_{3+}(v)\geq 2$。

证明 反设 v 至多相邻 1 个 3^+-点。令 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 为 v 的邻点，其中 $m\leq 7$。不妨令 $d(v_i)=2$，其中 $i\in\{2,3,\cdots,m\}$。令 $G'=G-\{v,v_2,v_3,\cdots,v_m\}$。根据 G 的极小性，G' 有 1 个 (F_6',F_6')-分解 $\{F_A',F_B'\}$。令 v_i' 为 v_i 的另 1 个邻点。若 $v_i'\in F_A'$，则把 v_i 放入 F_B'。否则把 v_i 放入 F_A'。若 $v_1\in F_A'$，则把 v 放入 F_B'。否则把 v 放入 F_A'。一共放置了 m 个点，并且它们不构成圈，则新产生的连通分支边数至多有 $m-1<6$ 条。从而得到 G 的 1 个 (F_6',F_6')-分解，矛盾。引理 2 证毕。 □

推论 1 G 不含相邻 2-点。

引理 3 若 $\left|P[v_1,v_m]\right|\leq 6$ 且 $d(v_1)=d(v_m)=2$, 则 $n_{4^+}(P)\geq 1$。

证明 令 $P[v_1v_2\cdots v_m]$ 为满足上述条件的路。不妨令 $d(v_i)\geq 3$，其中 $2\leq i\leq m$ 且 $m\leq 7$；否则，可以找到 1 条更短的路 $P'\in P[v_1v_2\cdots v_m]$ 满足上述条件。反设对于任意的 $2\leq i\leq m-1$，都有 $d(v_i)=3$。令 $G'=G-\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，根据 G 的极小性，可以得到 G' 的 1 个 (F_6',F_6')-分解 $\{F_A',F_B'\}$ 若 $x\in\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 有 1 个 F_A'-邻点，则把 x 放入 F_B'。否则把 x 放入 F_A'。一共放置了 m 个点，并且它们不构成圈，则新产生的连通分支边数至多有 $m-1\leq 6$ 条。从而得到 G 的 1 个 (F_6',F_6')-分解，矛盾。引理 3 证毕。 □

引理 4 假设 $\left|P[v_1,v_m]\right|\leq 5$，其中 $d(v_1)=d(v_m)=2$ 且 $n_{4^+}(P)=1$ 若 $P[v_1,v_m]$ 上有 1 个 4-点 v_i 则 v_i 的外邻点均为 3^+-点。

证明 令 $P[v_1v_2\cdots v_m]$ 为满足上述条件的路。不妨令 $d(v_i)\geq 3$，其中 $2\leq i\leq m$ 且 $m\leq 6$；否则，可以找到 1 条更短的路 $P'\in P[v_1v_2\cdots v_m]$ 满足上述条件。反设 v_i 有外 2-邻点，令作 v_i'。构造 $G'=G-\{v_1,v_2,\cdots,v_m,v_i'\}$ 根据 G 的极小性，可以得到 G' 的 1 个 (F_6',F_6')-分解 $\{F_A',F_B'\}$ 若 $x\in\{v_1,v_2,\cdots,v_m,v_i'\}$ 有 1 个 F_A' 邻点，则把 x 放入 F_B' 否则把 x 放入 F_A' 一共放置了 $m+1$ 个点，并且它们不构成圈，则新产生的连通分支边数至多有 $m\leq 6$ 条。从而得到 G 的 1 个 (F_6',F_6')-分解，矛盾。引理 4 证毕。 □

引理 5 若 6^8-面 f 上存在 1 个 2-点，则 $n_{4^+}(f)\geq 1$。

证明 令 $f=[v_1v_2\cdots v_m]$ 为 6^8-面，其中 $6\le m\le 8$。反设 $f=[v_1v_2\cdots v_m]$ 上不存在 4^+-点。不妨令 $d(v_1)=2$。构造 $G'=G-\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。根据 G 的极小性，可以得到 G' 的 1 个 (F_6',F_6')-分解 $\{F_A',F_B'\}$。若 $x\in\{v_2,v_3,\cdots,v_m\}$ 有 1 个 F_A'-邻点，则把 x 放入 F_B'。否则把 x 放入 F_A'。一共放置了 $m-1$ 个点，并且它们不构成圈，则新产生的连通分支边数至多有 $m-2\le 6$ 条。下面考虑放置点 v_1。

若点 v_i 属于 F_A'，其中 $2\le i\le m$。则把 v_1 放至 F_B' 即可。若存在 $v_i\in\{v_2,v_3,\cdots,v_m\}$ 属于 F_B'，则把 v_1 放至 F_A'。显然新产生的连通分支一定是无圈的，并且在 f 上至多有 $m-1$ 个点属于 F_A'，则新产生的连通分支边数至多有 $m-2\le 6$ 条。从而得到 G 的 1 个 (F_6',F_6')-分解，矛盾。引理 5 证毕。 □

3.2. 权转移过程

下面将通过权转移得到矛盾．首先定义 $V(G)\cup F(G)$ 上的初始权函数 ω：对于任意 $v\in V(G)$，$\omega(v)=2d(v)-5$；对于任意 $f\in F(G)$，$\omega(f)=\frac{1}{2}d(f)-5$。由握手引理 $\sum_{v\in V(G)}d(v)=2|E(G)|$ 和连通平面图的欧拉公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$ 可得

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-5)+\sum_{f\in F(G)}\left(\frac{1}{2}d(f)-5\right)=-10.$$

在权转移过程中，权总和始终保持不变。接下来，我们将定义合适的权转移规则，进而将初始权 ω 通过权规则转化到最终权 ω^*，使得对于任意的 $x\in V(G)\cup F(G)$，有 $\omega^*(x)\ge 0$，从而得到

$$0\le\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\omega^*(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\omega(x)=-10,$$

由此产生矛盾，因而定理 1 成立。

接下来，用 $\tau(x\to y)$ 表示 x 转给 y 的权值，其中 $x,y\in V(G)\cup F(G)$。如果路上的点按顺时针排列为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$，那么称路为 $(b_1,b_2,\cdots,b_m)$-路当且仅当对于每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有 $d(v_i)=b_i$。若一条边的两个端点 v_1 和 v_2 满足 $d(v_i)=k_i$，则称为 (k_1,k_2)-边，其中 $i\in\{1,2\}$。用 $\tau(P_f[v_i,v_j]\to f)$ 表示路 $P_f[v_i,v_j]$ 上的点转给面 f 的权值总和。用 k_i-点表示相邻 i 个 2-点的 k-点。权转移规则定义如下：

R1 每个 3^+-点给相邻的 2-点转权 $\frac{1}{2}$。

R2 假设 v 是 3-点且关联面 f。

R2.1 若 v 为 3_1-点，则 $\tau(v\to f)=\frac{1}{6}$；

R2.2 若 v 为 3_0-点，则 $\tau(v\to f)=\frac{1}{3}$。

R3 假设 v 是 4-点且关联面 f。

R3.1 若 v 为 4_2-点，则 $\tau(v\to f)=\frac{1}{2}$；

R3.2 若 v 为 4_1-点，则 $\tau(v\to f)=\frac{5}{8}$；

R3.3 若 v 为 4_0-点，则 $\tau(v\to f)=\frac{3}{4}$。

R4 每个 5^+-点给相邻的面转权 $\frac{7}{10}$。

R5 每个 8^+-面通过 $(3^+,3^+)$-边和 $(3^+,2,3^+)$-路给相邻的 6-面转权 $\frac{1}{6}$。

根据 R2-R4，观察到如下结论：

观察 1 假设 $v\in V(G)$ 关联 $f\in F(G)$：

(a) 若 $d(v)\geq 3$，则 $\tau(v\to f)\geq\frac{1}{6}$。

(b) 若 $d(v)\geq 4$，则 $\tau(v\to f)\geq\frac{1}{2}$。

断言 1 对任意 $v\in V(G)$，有 $\omega^*(v)\geq 0$。

证明 根据引理 1，可知 $d(v)\geq 2$。令 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 为 v 的邻点，f 为 v 关联的面，其中 $k=d(v)$。按照 k 的值展开讨论。

当 $k=2$ 时，易知，$\omega(v)=-1$。由引理 2 知，v 至少相邻 2 个 3^+-点，根据 R1，$\tau(v_1\to v)=\tau(v_2\to v)=\frac{1}{2}$。因此，$\omega^*(v)\geq -1+\frac{1}{2}\times 2=0$。

当 $k=3$ 时，易知，$\omega(v)=1$。若 v 为 3_1-点，不妨令 $d(v_1)=2$。则根据 R1 和 R2.1，$\tau(v\to v_1)=\frac{1}{2}$ 并且 $\tau(v\to f)=\frac{1}{6}$。因此，$\omega^*(v)\geq 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\times 3=0$。若 v 为 3_0-点，则根据 R2.2，$\tau(v\to f)=\frac{1}{3}$。因此，$\omega^*(v)\geq 1-\frac{1}{3}\times 3=0$。

当 $k=4$ 时，易知，$\omega(v)=3$ 若 v 为 4_2-点，不妨令 $d(v_1)=d(v_2)=2$ 则根据 R1 和 R3.1，$\tau(v\to v_1)=\tau(v\to v_2)=\frac{1}{2}$ 并且 $\tau(v\to f)=\frac{1}{2}$ 因此，$\omega^*(v)\geq 3-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 4=0.$ 若 v 为 4_1-点，不妨令 $d(v_1)=2$ 则根据 R1 和 R3.2，$\tau(v\to v_1)=\frac{1}{2}$ 并且 $\tau(v\to f)=\frac{5}{8}$ 因此，$\omega^*(v)\geq 3-\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\times 4=0$。若 v 为 4_0-点。则根据 R3.3，$\omega^*(v)\geq 3-\frac{3}{4}\times 4=0$。

当 $5\leq k\leq 7$ 时，由引理 2 可知，v 至多相邻 $d(v)-2$ 个 2-点 v_i，其中 $1\leq i\leq k$。由 R1 和 R4 可知，$\tau(v\to v_i)=\frac{1}{2}$ 并且 $\tau(v\to f)=\frac{7}{10}$。因此，$\omega^*(v)\geq 2d(v)-5-\frac{1}{2}(d(v)-2)-\frac{7}{10}d(v)=\frac{4}{5}d(v)-4\geq 0$。

当 $k\geq 8$ 时，令 $d(v_i)=2$ 其中 $1\leq i\leq k$。由 R1 和 R4 可知，$\tau(v\to v_i)=\frac{1}{2}$ 并且 $\tau(v\to f)=\frac{7}{10}$ 因此，$\omega^*(v)\geq 2d(v)-5-\frac{1}{2}d(v)-\frac{7}{10}d(v)=\frac{4}{5}d(v)-5\geq\frac{7}{5}$。

观察 2 假设 $P_f[v_1,v_m]$ 满足 $d(v_1)=d(v_m)=2$ 并且 $4\leq\left|P_f[v_1,v_m]\right|\leq 5$。如果 $n_{4^+}(P_f[v_1,v_m])=1$ 且 $n_2(P_f[v_1,v_m])=2$，那么 $\tau(P_f[v_1,v_m]\to f)\geq\frac{m}{3}-\frac{19}{30}$。

证明 令 $d(v_i)\geq 4$。假设 $i\in\{2,m-1\}$，不妨令 $i=2$。显然，$n_{3_1}(P_f[v_2,v_m])=1$。若存在 3_1-点 v_j，令 v_j' 为其外 2-邻点，其中 $3\leq j\leq m-2$。显然，$\left|P\left[v_j'v_j\cdots v_m\right]\right|\leq\left|P_f\left[v_1,v_m\right]\right|\leq 5$ 并且 $d(v_j')=d(v_m)=2$。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_j'v_j\cdots v_m\right]\right)=0$，则与引理 3 矛盾。假设 $d(v_i)\geq 5$。由 R4 可知，$\tau(v_i\to f)\geq\frac{7}{10}$。不难发现，$n_{3_0}(P_f[v_2,v_m])=\mathrm{m}-4$，再根据 R2 可得，$\tau(P_f[v_1,v_m]\to f)\geq\frac{7}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times(m-4)=\frac{m}{3}-\frac{7}{15}$。假设 $d(v_i)=4$。显然，$\left|P_f[v_1,v_m]\right|\leq 5$，$d(v_1)=d(v_2)=2$ 并且 $n_{4^+}(P_f[v_1,v_m])=1$，由引理 4 知，v_i 的外邻点都为 3^+-点。由 R3.2 可知，$\tau(v_i\to f)\geq\frac{5}{8}$。不难发现，$n_{3_0}(P_f[v_2,v_m])=\mathrm{m}-4$，再根据 R2 可得，

$$\tau(P_f[v_1,v_m]\to f)=\frac{5}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times(m-4)=\frac{m}{3}-\frac{13}{24}。$$

假设 $i\in\{3,\cdots,m-2\}$。同理可得，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)=n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_m\right]\right)=1$。从而 $P_f\left[v_1,v_m\right]$ 上除了 v_2 和 v_{m-1} 外，其余的 3-点都是 3_0-点。假设 $d\left(v_i\right)\ge 5$。由 R4 可知，$\tau\left(v_i\to f\right)\ge\frac{7}{10}$。不难发现，$n_{3_0}\left(P_f\left[v_2,v_m\right]\right)=m-5$，再根据 R2 可得，$\tau\left(P_f\left[v_1,v_m\right]\to f\right)\ge\frac{7}{10}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times(m-5)=\frac{m}{3}-\frac{19}{30}$。假设 $d\left(v_i\right)=4$。通过引理 4 同理可得，v_i 的外邻点都为 3^+-点。由 R3.3 可知，$\tau\left(v_i\to f\right)\ge\frac{3}{4}$。不难发现，$n_{3_0}\left(P_f\left[v_2,v_m\right]\right)=m-5$，再根据 R2 可得，$\tau\left(P_f\left[v_1,v_m\right]\to f\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times(m-5)=\frac{m}{3}-\frac{7}{12}$。因此，综上所述，我们可以得到 $\tau\left(P_f\left[v_1,v_m\right]\to f\right)\ge\frac{m}{3}-\frac{19}{30}$。观察 2 证毕。 □

断言 2 对任意 $f\in F(G)$，有 $\omega^*(f)\ge 0$。

证明 令 $f=\left[v_1v_2\cdots v_k\right]$，其中 $k=d(f)$。下面按照 k 的值进行讨论。由推论 1 可知，$n_2(f)\le\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$

情况 1：$k=6$。

易知，$\omega(f)=-2$，$n_2(f)\le 3$。

- $n_2(f)=3$。根据推论 1，此时，不妨令 $d\left(v_1\right)=d\left(v_3\right)=d\left(v_5\right)=2$。显然，$P_f\left[v_1,v_3\right],P_f\left[v_3,v_5\right]$ 和 $P_f\left[v_5,v_1\right]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 知，这些路上各存在 1 个 4^+-点 v_i，其中 $i\in\{2,4,6\}$。由观察 1(b)可知，$\tau\left(v_i\to f\right)\ge\frac{1}{2}$。又由 R5 可知，$f$ 通过 $\left(3^+,2,3^+\right)$-路从相邻的 8^+-面获得权值 $\frac{1}{2}$。因此，$\omega^*(f)\ge -2+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}=0$。
- $n_2(f)=2$。根据推论 1，此时，f 为 $\left(2,3^+,2,3^+,3^+,3^+\right)$-面或 $\left(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+\right)$-面。显然，以上 2 种情况都可以在 f 上找到 2 条长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 可得这些路上至少有 1 个 4^+-点。由 R5 可知，f 通过 $\left(3^+,2,3^+\right)$-路和 $\left(3^+,3^+\right)$-边从相邻的 8^+-面获得权值 $\frac{2}{3}$。根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -2+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 2+\frac{2}{3}=0$。
- $n_2(f)=1$。根据引理 5，此时，不妨令 $d\left(v_1\right)=2$，$d\left(v_2\right)\ge 4$ 并且 $d\left(v_i\right)\ge 3$，其中 $3\le i\le 6$。由 R5 可知，f 通过 $\left(3^+,2,3^+\right)$-路和 $\left(3^+,3^+\right)$-边从相邻的 8^+-面获得权值 $\frac{5}{6}$。根据观察 1，$\tau\left(v_i\to f\right)\ge\frac{1}{6}$，$\tau\left(v_2\to f\right)\ge\frac{1}{2}$。因此，$\omega^*(f)\ge -2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 4+\frac{5}{6}=0$。
- $n_2(f)=0$。由 R5 可知，f 通过 $\left(3^+,3^+\right)$-边从相邻的 8^+-面获得权值 1。根据观察 1(a)，$\omega^*(f)\ge -2+\frac{1}{6}\times 6+1=0$。

情况 2：$k=7$。

易知，$\omega(f)=-\frac{3}{2},n_2(f)\le 3.$

- $n_2(f)=3$ 根据推论 1，此时，不妨令 $d\left(v_1\right)=d\left(v_3\right)=d\left(v_5\right)=2$。显然，$P_f\left[v_1,v_3\right],P_f\left[v_3,v_5\right]$ 和 $P_f\left[v_5,v_1\right]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 得，这些路上各存在 1 个 4^+-点。根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$。
- $n_2(f)=2$。根据推论 1，f 上 2-点不相邻。假设 $d\left(v_1\right)=d\left(v_3\right)=2$。显然，$P_f\left[v_1,v_3\right]$ 和 $P_f\left[v_3,v_1\right]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 得，这些路上各存在 1 个 4^+-点。根据观察 1，

$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3=0$。假设 $d(v_1)=d(v_4)=2$。显然，$P_f[v_1,v_4]$ 和 $P_f[v_4,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 得，这些路上各存在 1 个 4^+ -点。根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3=0$。

- $n_2(f)=1$。不妨令 $d(v_1)=2$。由引理 5 知，f 上至少存在 1 个 4^+ -点。
- 若 $n_{4^+}(f)\ge 2$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 4=\frac{1}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=1$。令 $d(v_i)\ge 4$，其中 $2\le i\le 7$。当 $i\in\{3,4,5,6\}$ 时，假设 f 上除 v_2,v_7 外，还存在 3_1 -点 v_j,v_j' 为其 2-邻点。不妨令 $j\in\{3,4,\cdots,i-1\}$。显然，$\left|P\left[v_2v_3\cdots v_j'\right]\right|\le 6$ 并且 $d(v_2)=d(v_j)=2$。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_2v_3\cdots v_j'\right]\right)=0$，与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)=2$。根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 3=\frac{1}{3}$。当 $i\in\{2,7\}$ 时，不妨令 $i=2$。假设 f 上除 v_7 外，还存在 3_1 -点 v_j，令 v_j' 为其 2-邻点，其中 $j\in\{3,4,5,6\}$。显然，$\left|P\left[v_j'v_j\cdots v_7\right]\right|\le 6$ 并且 $d(v_j')=d(v_7)=2$。但是 $n_{4^+}\left(P\left[v_j'v_j\cdots v_7\right]\right)=0$，与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)=1$。根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 4=\frac{1}{2}$。
- $n_2(f)=0$。
- 若 $n_{4^+}(f)\ge 1$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 6=0$。
- 若 $n_{4^+}(f)=0$。假设 $n_{31}(f)\ge 2$，令 v_i 和 v_j 为 3_{1^-} 点，v_i' 和 v_j' 分别为其 2-邻点，不妨令 $i<j$。显然，$P\left[v_i'v_i\cdots v_j'\right]$ 或 $P\left[v_j'v_j\cdots v_i'\right]$ 中至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_i'v_i\cdots v_j'\right]\right)=n_{4^+}\left(P\left[v_j'v_j\cdots v_i'\right]\right)=0$，与引理 3 矛盾。因此，$n_{31}(f)\le 1$。根据 R2，$\omega^*(f)\ge -\frac{3}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 6=\frac{2}{3}$。

情况 3：$k=8$。

易知，$\omega(f)=-1$，$n_2(f)\le 4$。

- $n_2(f)=4$。根据推论 1，此时，不妨令 $d(v_1)=d(v_3)=d(v_5)=d(v_7)=2$。显然，$P_f[v_1,v_3],P_f[v_3,v_5],P_f[v_5,v_7]$ 和 $P_f[v_7,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 得，这些路上各存在 1 个 4^+ -点 v_i，其中 $i\in\{2,4,6,8\}$。由观察 1(b)可知，$\tau(v_i\to f)\ge\frac{1}{2}$。又由 R5 可知，$f$ 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路给相邻的 6-面转权 $\frac{2}{3}$。因此，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 4-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。
- $n_2(f)=3$。根据推论 1，此时，f 为 $(2,3^+,2,3^+,2,3^+,3^+,3^+)$-面或 $(2,3^+,2,3^+,3^+,2,3^+,3^+)$-面。由 R5 可知，$f$ 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路和 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 $\frac{5}{6}$。
- 假设 f 为 $(2,3^+,2,3^+,2,3^+,3^+,3^+)$-面。显然，$P_f[v_1,v_3]$，$P_f[v_3,v_5]$ 和 $P_f[v_5,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 知，这些路上各存在 1 个 4^+ -点。根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 2-\frac{5}{6}=0$。
- 假设 f 为 $(2,3^+,2,3^+,3^+,2,3^+,3^+)$-面。显然，$P_f[v_1,v_3],P_f[v_3,v_6]$ 和 $P_f[v_6,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 知，这些路上各存在 1 个 4^+ -点。根据观察 1，

$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 2-\frac{5}{6}=0$。

- $n_2(f)=2$。根据推论 1，此时，f 为 $(2,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+)$-面，$(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+)$-面或 $(2,3^+,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+)$-面。显然，3 种情况我们都可以在 f 上找到 2 条长度至多为 6 并且 2 个端点为 2-点的路。由引理 3 可得，$n_{4^+}(f)\ge 2$。由 R5 可知，f 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路和 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 1。
- 若 $n_{4^+}(f)\ge 3$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 3-1=0$。
- 若 $n_{4^+}(f)=2$。
- 假设 f 为 $(2,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+)$-面。显然，存在 $d(v_i)\ge 4$，其中 $i\in\{4,5,\cdots,8\}$ 如果 $n_{3_1}(P[v_3,v_1])\ge 3$，令 v_j 为 3_1-点并且 v_j' 为其外 2-邻点，不妨令 $j\in\{4,5,\cdots,i-1\}$ 显然，$\left|P[v_3v_4\cdots v_j']\right|\le 6$ 并且 $d(v_3)=d(v_j')=2$ 但是，$n_{4+}(P[v_3v_4\cdots v_j'])=0$，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(P_f[v_3,v_1])=2$ 根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 2-1=0$。
- 假设 f 为 $(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+)$-面。显然，$P_f[v_1,v_4]$ 和 $P_f[v_4,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 知，这些路上各存在 1 个 4^+-点，即 $\{v_2,v_3\}$，$\{v_5,v_6,v_7,v_8\}$ 中分别存在 1 个 4^+-点。
- 讨论 $P_f[v_1,v_4]$ 给 f 转权的情况．不妨令 $d(v_2)\ge 4$ 若 $d(v_2)\ge 5$，则由 R4 可知，$\tau(v_2\to f)\ge\frac{7}{10}$。若 $d(v_2)=4$。显然，$\left|P_f[v_1,v_4]\right|\le 5$ 并且 $d(v_1)=d(v_4)=2$。由引理 4 知，v_2 为 4_1-点。则由 R3.2 可知，$\tau(v_2\to f)=\frac{5}{8}$ 又由 R2.1 可知，$\tau(v_3\to f)=\frac{1}{6}$ 因此，$\tau(P_f[v_1,v_4]\to f)\ge\frac{5}{8}+\frac{1}{6}=\frac{19}{24}$。
- 讨论 $P_f[v_4,v_1]$ 给 f 转权的情况。显然，$\left|P_f[v_4,v_1]\right|=5$，$d(v_1)=d(v_4)=2$，$n_{4^+}(P_f[v_4,v_1])=1$ 并且 $n_2(P_f[v_4,v_1])=2$。由观察 2 可得，$\tau(P_f[v_4,v_1]\to f)\ge\frac{1}{3}\times 6-\frac{19}{30}=\frac{41}{30}$。

  综上所述，可以得到 $\omega^*(f)=-1+\tau(P_f[v_1,v_4]\to f)+\tau(P_f[v_4,v_1]\to f)-1\ge -1+\frac{19}{24}+\frac{41}{30}-1=\frac{19}{120}$。
- 假设 f 为 $(2,3^+,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+)$-面。显然，$P_f[v_1,v_5]$ 和 $P_f[v_5,v_1]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路．由引理 3 知，$P_f[v_1,v_5]$ 和 $P_f[v_5,v_1]$ 上各存在 1 个 4^+-点。由于对称性，我们只讨论 $P_f[v_1,v_5]$ 给 f 转权的情况．显然，$\left|P_f[v_1,v_5]\right|=4$，$d(v_1)=d(v_5)=2$，$n_{4^+}(P_f[v_1,v_5])=1$ 并且 $n_2(P_f[v_1,v_5])=2$。由观察 2 可得，$\tau(P_f[v_1,v_5]\to f)\ge\frac{1}{3}\times 5-\frac{19}{30}=\frac{31}{30}$。因此，$\omega^*(f)=-1+\tau(P_f[v_1,v_5])+\tau(P_f[v_5,v_1])-1\ge -1+\frac{31}{30}\times 2-1=\frac{1}{15}$。
- $n_2(f)=1$。令 f 为 $(2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+)$-面。由引理 5 可知，$f$ 上至少存在 1 个 4^+-点。又由 R5 可知，f 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路和 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 $\frac{7}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)\ge 3$。则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 4-\frac{7}{6}=0$。
- 若 $n_{4^+}(f)=2$。令 $d(v_i)\ge 4$ 并且 $d(v_j)\ge 4$，其中 $2\le i<j\le 8$。如果 $n_{3_1}(P_f[v_1,v_i])\ge 2$。令 v_k 为 3_1-点并且 v_k' 为其 2-邻点，其中 $3\le k\le i-1$。显然，$\left|P[v_1v_2\cdots v_k']\right|\le 6$ 并且 $d(v_1)=d(v_k')=2$。但是，$n_{4^+}(P[v_1v_2\cdots v_k'])=0$，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(P_f[v_1,v_i])\le 1$。同理可证：$n_{3_1}(P_f[v_i,v_j])\le 1$ 并

且 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_j,v_8\right]\right)\le 1$。根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{3}\times 2-\frac{7}{6}=0$。

- 若 $n_{4^+}(f)=1$。令 $d(v_i)\ge 4$，其中 $2\le i\le 8$。假设 $i\in\{2,8\}$，不妨令 $i=2$。如果 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\le 3$。令 v_j 和 v_k 为 3_1-点，v_j' 和 v_k' 为其 2-邻点，其中 $3\le j<k\le 7$。显然，$P\left[v_j'v_j\cdots v_k'\right]$ 和 $P\left[v_k'v_k\cdots v_1\right]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。但是，这些路上不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\le 2$。假设 $i\in\{3,\cdots,7\}$。如果 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\ge 2$ 或 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)\ge 2$。不妨令 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\ge 2$。令 v_j 为 3_1-点，v_j' 为其 2-邻点，其中 $2\le j\le i-1$ 显然，$\left|P\left[v_1v_2\cdots v_j'\right]\right|\le 6$ 并且 $d(v_1)=d(v_j')=2$。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_1v_2\cdots v_j'\right]\right)=0$，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\le 1$，同理可证，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)\le 1$。根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 4-\frac{7}{6}=0$。
- $n_2(f)=0$。由 R5 可知，f 至多通过 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 $\frac{4}{3}$。
- 若 $n_{4^+}(f)\ge 3$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 5-\frac{4}{3}=0$。
- 若 $n_{4^+}(f)=2$。不妨令 $d(v_1)\ge 4$，$d(v_i)\ge 4$，其中 $2\le i\le 8$。假设 $i\in\{2,8\}$，不妨令 $i=2$。若 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\ge 3$，令 v_{j_1},v_{j_2} 和 v_{j_3} 都为 3_1-点，v_{j_1}',v_{j_2}' 和 v_{j_3}' 分别为其 2-邻点，其中 $3\le j_1<j_2<j_3\le 8$。显然，$P\left[v_{j_1}'v_{j_1}\cdots v_{j_2}'\right]$ 和 $P\left[v_{j_2}'v_{j_2}\cdots v_{j_3}'\right]$ 都满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上不存在 4^+-点，则与引理 3 矛盾。因此，$n_{31}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\le 2$。假设 $i\in\{3,4,\cdots,7\}$。若 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)=2$ 或 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)=2$。不妨令 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)=2$。令 v_j 和 v_k 为 3_1-点，v_j' 和 v_k' 为其 2-邻点，其中 $2\le j<k\le i-1$。显然，$\left|P\left[v_j'v_j\cdots v_k'\right]\right|\le 6$ 并且 $d(v_j')=d(v_k')=2$。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_j'v_j\cdots v_k'\right]\right)=0$，则与引理 3 矛盾。因此，$n_{31}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\le 1$。同理可证，$n_{31}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)\le 1$。则根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 4-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=1$。不妨令 $d(v_1)\ge 4$。如果 $n_{3_1}(f)\ge 3$，令 v_{i_1},v_{i_2} 和 v_{i_3} 都为 3_1-点，v_{i_1}',v_{i_2}' 和 v_{i_3}' 分别为其 2-邻点，其中 $2\le i_1<i_2<i_3\le 8$。显然，$P\left[v_{i_1}'v_{i_1}\cdots v_{i_2}'\right]$ 和 $P\left[v_{i_2}'v_{i_2}\cdots v_{i_3}'\right]$ 都满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)\le 2$。则根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 5-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=0$。如果 $n_{3_1}(f)\ge 2$，令 v_i 和 v_j 都为 3_1-点，v_i' 和 v_j' 分别为其 2-邻点，其中 $1\le i<j\le 8$。显然，$P\left[v_i'v_i\cdots v_j'\right]$ 或 $P\left[v_j'v_j\cdots v_i'\right]$ 至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上都不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)\le 1$。则根据 R2，$\omega^*(f)\ge -1+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 7-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$。

情况 4：$k=9$。

易知，$\omega(f)=-\frac{1}{2}$，$n_2(f)\le 4$。

- $n_2(f)=4$。根据推论 1，此时，不妨令 $d(v_1)=d(v_3)=d(v_5)=d(v_7)=2$。显然，$P_f\left[v_1,v_3\right],P_f\left[v_3,v_5\right],P_f\left[v_5,v_7\right]$ 和 $P_f\left[v_7,v_1\right]$ 都是长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点的路。由引理 3 知，这些路上各存在 1 个 4^+-点。由 R5 可知，f 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路和 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 $\frac{5}{6}$。根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$。

- $n_2(f)=3$。根据推论 1，此时，f 为$\left(2,3^+,2,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面，$\left(2,3^+,2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+\right)$-面或$\left(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,2,3^+,3^+\right)$-面。显然，以上 3 种情况，都可以在 f 上找到 3 条长度至多为 6 并且 2 个端点为 2-点的路。由引理 3 可得，这些路上分别至少存在 1 个 4^+-点，所以 f 上至少有 3 个 4^+-点。由 R5 可知，f 至多通过$\left(3^+,2,3^+\right)$-路和$\left(3^+,3^+\right)$-边给相邻的 6-面转权 1。根据观察 1，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{6}\times 3-1=\frac{1}{2}$。
- $n_2(f)=2$。根据推论 1，此时，f 为$\left(2,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面，$\left(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面或$\left(2,3^+,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面。由 R5 可知，$f$ 至多通过$\left(3^+,2,3^+\right)$-路和$\left(3^+,3^+\right)$-边给相邻的 6-面转权$\frac{7}{6}$。
- 假设 f 为$\left(2,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面。显然，$\left|P_f\left[v_1,v_3\right]\right|\leq 6$ 并且 $d(v_1)=d(v_3)=2$ 由引理 3 得 $d(v_2)\geq 4$ 若 $n_{4^+}(f)\geq 2$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 5-\frac{7}{6}=\frac{1}{6}$。若 $n_{4^+}(f)=1$。假设 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_3,v_1\right]\right)\geq 3$。令 v_i 为3_1 点，v_i' 为其 2-邻点，其中 $5\leq i\leq 8$ 显然，$P\left[v_3v_4\cdots v_i'\right]$ 或 $P\left[v_i'v_i\cdots v_1\right]$ 至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上均不存在 4^+-点，与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_3,v_1\right]\right)\leq 2$。则根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times 4-\frac{7}{6}=\frac{1}{2}$。
- 假设 f 为$\left(2,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面或$\left(2,3^+,3^+,3^+,2,3^+,3^+,3^+\right)$-面。显然，2 种情况都可以在 f 上找到 2 条长度至多为 6 并且 2 个端点都为 2-点的路。由引理 3 可得，这些路上分别至少存在 1 个 4^+-点。因此，根据观察 1，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 5-\frac{7}{6}=\frac{1}{6}$。
- $n_2(f)=1$。不妨令 f 为$\left(2,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+,3^+\right)$-面。由 R5 可知，$f$ 至多通过$\left(3^+,2,3^+\right)$-路和$\left(3^+,3^+\right)$-边给相邻的 6-面转权$\frac{4}{3}$。
- 若 $n_{4^+}(f)\geq 2$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 6-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=1$，令 $d(v_i)\geq 4$，其中 $2\leq i\leq 9$。假设 $i\in\{2,9\}$，不妨令 $i=2$。如果 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\geq 3$。令 v_j 和 v_k 为 3_1-点，v_j' 和 v_k' 为其 2-邻点，其中 $3\leq j<k\leq 8$。显然，$P\left[v_j'v_j\cdots v_k'\right]$ 或 $P\left[v_k'v_k\cdots v_1\right]$ 至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_2,v_1\right]\right)\leq 2$。假设 $i\in\{4,5,6,7\}$。如果 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\geq 2$ 或 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)\geq 2$，不妨令 $n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\geq 2$。令 v_j 为 3_1-点，v_j' 为其 2-邻点，其中 $3\leq j\leq i-1$。显然，$\left|P\left[v_1v_2\cdots v_j'\right]\right|\leq 6$ 并且 $d(v_1)=d(v_j')=2$。但是，$n_{4^+}\left(P\left[v_1v_2\cdots v_j'\right]\right)=0$。那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\leq 1$。同理可证，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_i,v_1\right]\right)\leq 1$。假设 $i\in\{3,8\}$，显然，$n_{3_1}(f)\leq 3$。则根据观察 1(b) 和 R2，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{6}\times 3-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=0$，如果 $n_{3_1}(f)\geq 3$，令 v_i 为3_1-点，v_i' 为其 2-邻点，其中 $3\leq i\leq 8$。显然，$P\left[v_1v_2\cdots v_i'\right]$ 或 $P\left[v_i'v_i\cdots v_1\right]$ 中至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上都没有 4^+-点。那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}\left(P_f\left[v_1,v_i\right]\right)\leq 2$。则根据 R2，$\omega^*(f)\geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{6}\times 2-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$。
- $n_2(f)=0$。由 R5 可知，f 至多通过$\left(3^+,2,3^+\right)$-路和$\left(3^+,3^+\right)$-边给相邻的 6-面转权$\frac{3}{2}$。

- 若 $n_{4^+}(f)\ge 2$，则根据观察 1，$\omega^*(f)\ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 7-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=1$，不妨令 $d(v_1)\ge 4$。如果 $n_{3_1}(f)\ge 3$，令 v_{i_1},v_{i_2} 和 v_{i_3} 都为 3_1-点，v'_{i_1},v'_{i_2} 和 v'_{i_3} 分别为其 2-邻点，其中 $2\le i_1<i_2<i_3\le 9$。显然，$P\left[v'_{i_1}v_{i_1}\cdots v'_{i_2}\right]$ 或 $P\left[v'_{i_2}v_{i_2}\cdots v'_{i_3}\right]$ 至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)\le 2$。则根据观察 1(b)和 R2，$\omega^*(f)\ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{6}\times 2-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$。
- 若 $n_{4^+}(f)=0$，如果 $n_{3_1}(f)\ge 2$，令 v_i 和 v_j 都是 3_1-点，v'_i 和 v'_j 分别为其 2-邻点，其中 $1\le i<j\le 9$。显然，$P\left[v'_iv_i\cdots v'_j\right]$ 或 $P\left[v'_jv_j\cdots v'_i\right]$ 至少有 1 条路满足长度至多为 6 并且 2 个端点均为 2-点。但是，这些路上都不存在 4^+-点，那么与引理 3 矛盾。因此，$n_{3_1}(f)\le 1$。则根据 R2，
$\omega^*(f)\ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 8-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$。

情况 5：$k\ge 10$。

$\omega(f)=\frac{1}{2}\times d(f)-5$ 并且 f 关联 $d(f)-n_2(f)$ 个 3^+-点．由 R5 可知，f 至多通过 $(3^+,2,3^+)$-路和 $(3^+,3^+)$-边给相邻的 6-面转权 $\frac{1}{6}\left(d(f)-n_2(f)\right)$。根据观察 1(a)，

$\omega^*(f)\ge \frac{1}{2}d(f)-5+\frac{1}{6}\left(d(f)-n_2(f)\right)-\frac{1}{6}\left(d(f)-n_2(f)\right)=\frac{1}{2}d(f)-5\ge 0$。断言 2 证毕。 □

至此，我们证明了对于任意 $x\in V(G)\cup F(G)$，都有 $\omega^*(x)\ge 0$，矛盾，从而完成定理 1 的证明。

参考文献

[1] Chartrand, G., Kronk, H.V. and Wall, C.E. (1968) The Point-Arboricity of a Graph. *Israel Journal of Mathematics*, **6**, 169-175. https://doi.org/10.1007/bf02760181

[2] Poh, K.S. (1990) On the Linear Vertex-Arboricity of a Planar Graph. *Journal of Graph Theory*, **14**, 73-75. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140108

[3] Chen, M., Raspaud, A., Wang, W. and Yu, W. (2023) An (F_3, F_5)-Partition of Planar Graphs with Girth at Least 5. *Discrete Mathematics*, **346**, Article ID: 113216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113216

[4] Chen, M., Raspaud, A., Wang, W. and Yu, W. (2024) Partitioning Planar Graph of Girth 5 into Two Forests with Maximum Degree 4. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **74**, 355-366. https://doi.org/10.21136/cmj.2024.0394-21

[5] 陈敏, Andre Raspaud, 王维凡, 余伟强. 围长为 5 的低亏格图存在(F_2, F_6)-分解[J]. 中国科学: 数学, 2025(55): 1-16.

[6] Chappell, G.G., Gimbel, J. and Hartman, C. (2005) Thresholds for Path Colorings of Planar Graphs. In: Klazar, M., Kratochvíl, J., Loebl, M., Matoušek, J., Valtr, P. and Thomas, R., Eds., *Topics in Discrete Mathematics*, Springer, 435-454. https://doi.org/10.1007/3-540-33700-8_21

[7] Borodin, O.V., Ivanova, A.O., Montassier, M., Ochem, P. and Raspaud, A. (2010) Vertex Decompositions of Sparse Graphs into an Edgeless Subgraph and a Subgraph of Maximum Degree at Most *k*. *Journal of Graph Theory*, **65**, 83-93. https://doi.org/10.1002/jgt.20467

[8] Chen, M., Raspaud, A. and Yu, W. (2022) An (F_1, F_4)-Partition of Graphs with Low Genus and Girth at Least 6. *Journal of Graph Theory*, **99**, 186-206. https://doi.org/10.1002/jgt.22734

[9] Chen, M., Yu, W. and Wang, W. (2018) On the Vertex Partitions of Sparse Graphs into an Independent Vertex Set and a Forest with Bounded Maximum Degree. *Applied Mathematics and Computation*, **326**, 117-123. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.003

[10] Esperet, L., Montassier, M., Ochem, P. and Pinlou, A. (2013) A Complexity Dichotomy for the Coloring of Sparse Graphs. *Journal of Graph Theory*, **73**, 85-102. https://doi.org/10.1002/jgt.21659

[11] Kim, J., Kostochka, A. and Zhu, X. (2014) Improper Coloring of Sparse Graphs with a Given Girth, I: (0,1)-Colorings of Triangle-Free Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **42**, 26-48. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2014.05.003

[12] Borodin, O.V. and Kostochka, A.V. (2011) Vertex Decompositions of Sparse Graphs into an Independent Vertex Set and a Subgraph of Maximum Degree at Most 1. *Siberian Mathematical Journal*, **52**, 796-801. https://doi.org/10.1134/s0037446611050041

[13] Borodin, O. and Ivanova, A. (2009) Almost Proper 2-Coloring of Vertices of Sparse Graphs. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, **16**, 16-20.

[14] Glebov, A. and Zambalaeva, D. (2007) Path Partitions of Planar Graphs. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, **4**, 450-459.

[15] Borodin, O.V. and Ivanova, A.O. (2011) List Strong Linear 2-Arboricity of Sparse Graphs. *Journal of Graph Theory*, **67**, 83-90. https://doi.org/10.1002/jgt.20516

[16] Borodin, O.V., Kostochka, A. and Yancey, M. (2013) On 1-Improper 2-Coloring of Sparse Graphs. *Discrete Mathematics*, **313**, 2638-2649. https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.07.014

[17] Axenovich, M., Ueckerdt, T. and Weiner, P. (2017) Splitting Planar Graphs of Girth 6 into Two Linear Forests with Short Paths. *Journal of Graph Theory*, **85**, 601-618. https://doi.org/10.1002/jgt.22093

[18] Choi, I., Dross, F. and Ochem, P. (2020) Partitioning Sparse Graphs into an Independent Set and a Graph with Bounded Size Components. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111921. https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.111921

[19] Tian, C. and Sun, L. (2021) Partitioning Planar Graphs with Girth at Least 9 into an Edgeless Graph and a Graph with Bounded Size Components. *Mathematical Modelling and Control*, **1**, 136-144. https://doi.org/10.3934/mmc.2021012

[20] Cranston, D.W. and Yancey, M.P. (2021) Vertex Partitions into an Independent Set and a Forest with Each Component Small. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **35**, 1769-1791. https://doi.org/10.1137/21m1392280

[21] Liu, X., Sun, L. and Zheng, W. (2023) Path Partition of Planar Graphs with Girth at Least Six. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **15**, Article ID: 2250158. https://doi.org/10.1142/s1793830922501580