Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 367-377
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155236

Hans汉斯

求解复对称线性系统的极小化残差广义位移分裂迭代法

梁媛媛

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年4月19日；录用日期：2026年5月13日；发布日期：2026年5月22日

摘 要

在科学计算和工程应用中，许多问题最终均可归结为求解大型稀疏复对称线性系统。针对此类系统的求解，本文将极小化残差技术应用至广义位移分裂(GSS)迭代过程，构造了极小化残差GSS (MRGSS)迭代法，推导了该方法的代数降维求解策略，并给出了严格的收敛性分析。最后，通过数值实验验证了所提方法的高效性。

关键词

复对称线性系统，极小残差技术，GSS迭代法，收敛性分析

Minimal Residual Generalized Shift-Splitting Iterative Method for Solving Complex Symmetric Linear Systems

Yuanyuan Liang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 22, 2026

Abstract

In scientific computing and engineering applications, many problems can ultimately be reduced to solving large sparse complex symmetric linear systems. For the solution of such systems, this paper applies the minimization residual technique to the generalized shift-splitting (GSS) iterative process, constructs the minimization residual GSS (MRGSS) iterative method, derives the algebraic dimension

文章引用: 梁媛媛. 求解复对称线性系统的极小化残差广义位移分裂迭代法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 367-377.
DOI: 10.12677/aam.2026.155236

reduction solution strategy of this method, and provides a strict convergence analysis. Finally, the efficiency of the proposed method is verified through numerical experiments.

Keywords

Complex Symmetric Linear Systems, Minimal Residual Technique, GSS Iteration Method, Convergence Analysis

1. 引言

考虑线性方程组的迭代解

$$Au = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad u, b \in \mathbb{C}^n, \tag{1}$$

其中 A 是形式为

$$A = W + iT, \tag{2}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 表示虚部单位，$W, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称半正定矩阵，且至少有一个是对称正定矩阵。因此，一般情况下，我们假设 W 是对称正定矩阵，$T \neq 0$ 是对称半正定矩阵，$x, b \in \mathbb{C}^n$ 是给定的未知向量。

这类线性系统经常出现在各种科学计算和工程应用中，包括某些时变偏微分方程的基于快速傅立叶变换的解[1]，结构动力学[2]和分子散射[3]等，其余参见[4]-[7]文献。

近年来，对于形式为(1)复对称线性方程组的研究引起了人们的极大兴趣，并提出了大量的迭代方法，例如，Bai 等人在[6]和[7]中给出了一类复对称线性方程组的修正的 Hermitian 和反 Hermitian 分裂(MHSS)迭代法和预处理的 MHSS (PMHSS)迭代法，Li 等在[8]中介绍了一种不平衡的 PMHSS (LPMHSS)迭代法，Wu 等在[9]中介绍了几种不同的迭代法，Cao 等在[10]中研究了一类复对称不定线性系统的 PMHSS 迭代法的两种不同的迭代法，以及其他一些文献，见[11]-[15]及其参考文献。

令 $u = x + iy$ 和 $b = p + iq$，其中 $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$。则由文献[11] [12]可知，复线性方程组(1)可等价地表示为如下的 2×2 块实形式

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} W & -T \\ T & W \end{bmatrix}. \tag{4}$$

基于[16]-[18]中研究的迭代方法，可以如下构造矩阵 $\mathcal{A}$ 的广义移位分裂

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha I - W & T \\ -T & \beta I - W \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 是两个真实的常数，I 是单位矩阵。通过这种特殊的分裂，可以定义如下的广义移位分裂迭代法来求解广义鞍点问题(3)。

算法 1 (GSS 迭代法)。给定任意一个初始向量$u^{(0)}$，对于$k=0,1,2,\cdots$，直到迭代序列$\left\{u^{(k)}\right\}$收敛，计算

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha I+W & -T\\ T & \beta I+W\end{bmatrix}u^{k+1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha I-W & T\\ -T & \beta I-W\end{bmatrix}u^{k}+\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中α和β是两个给定的正常数。很明显，广义移位分裂迭代的迭代矩阵是

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\alpha I+W & -T\\ T & \beta I+W\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha I-W & T\\ -T & \beta I-W\end{bmatrix}. \tag{7}$$

广义位移分裂(GSS)迭代法[19]是针对复对称线性系统$A=W+iT$，其中W对称正定，T对称半正定，设计的一种无条件收敛的迭代求解方法。在实际计算中，矩阵M也可作为预条件子 Krylov 子空间方法(如 GMRES)结合使用，此时每步迭代需高效求解一个以M为系数的线性系统，这可通过块分解技术转化为依次求解两个对称正定子系统$\left(\beta I+W\right)w=r_2$和 Schur 补系统$\left(\alpha I+W+T\left(\beta I+W\right)^{-1}T\right)z_1=w_1$来完成，显著降低了计算成本。数值实验表明，合理选择参数α,β后，GSS 预条件子能有效聚集系数矩阵的特征值分布，相比 HSS，MHSS 和 GSOR 等现有方法，在迭代步数和计算时间上展现出优越性能。

为了进一步优化 GSS 迭代法，本文引入最小残差技术，通过动态调整迭代参数ω，使每步的残差范数最小，从而减少迭代步数和 CPU 时间，同时证明了其无条件收敛的性质。

第二部分介绍了基于 GSS 迭代法(6)的最小残差技术的 MRGSS 迭代法。在第三部分中，介绍了 MRGSS 迭代法求解大型稀疏复对称线性方程组的收敛性。第四部分借助于应用实例验证了 MRGSS 迭代法有效性和可行性。

2. MRGSS 迭代法的建立

在本节中，基于 GSS 迭代格式(6)和极小残差技术，我们将推导 MRGSS 方法的迭代格式。

设参数化位移矩阵$\Omega=\begin{pmatrix}\alpha I & 0\\ 0 & \beta I\end{pmatrix}$。

广义位移分裂(GSS)迭代格式为：

$$\frac{1}{2}\left(\Omega+A\right)u^{(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\Omega-A\right)u^{(k)}+g, \tag{8}$$

可将其等价化为如下残差更新形式：

$$\begin{bmatrix}x^{(k+1)}\\ y^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{(k)}\\ y^{(k)}\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\alpha I+W & -T\\ T & \beta I+W\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r_1^{(k)}\\ r_2^{(k)}\end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中$r^{(k)}=g-Au^{(k)}$为第k步的全局残差向量。在此基础上，定义全局搜索方向为$\delta^{(k)}=2\left(\Omega+A\right)^{-1}r^{(k)}$。

将$u^{(k+1)}$代入残差定义，得到递推关系：

$$r^{(k+1)}=g-Au^{(k+1)}=r^{(k)}-\omega_k A\delta^{(k)}. \tag{10}$$

根据(10)式及$\delta^{(k)}=2\left(\Omega+A\right)^{-1}r^{(k)}$。可得

$$r^{(k+1)}=r^{(k)}-2\omega_k A\left(\Omega+A\right)^{-1}r^{(k)}. \tag{11}$$

其中，$G=2A\left(\Omega+A\right)^{-1}$。

接下来，参数ω_k的值可以通过极小化残差范数来确定，简单计算得

$$\begin{aligned}\left\|r^{(k+1)}\right\|^2 &= \left\|r^{(k)}\right\|^2 - 2\operatorname{Re}(\omega_k)\left\langle r^{(k)}, H(G)r^{(k)}\right\rangle - 2\operatorname{Im}(\omega_k)\left\langle r^{(k)}, iS(G)r^{(k)}\right\rangle \\ &\quad + \left(\operatorname{Re}(\omega_k)^2 + \operatorname{Im}(\omega_k)^2\right)\left\|Gr^{(k)}\right\|^2 \end{aligned} \tag{12}$$

其中，$\operatorname{Re}(\cdot)$ 和 $\operatorname{Im}(\cdot)$ 分别表示复数的实部和虚部，$H(\cdot)$ 和 $S(\cdot)$ 分别表示系数矩阵的 Hermitian 和反 Hermitian 部分。

现在，可以将 $\left\|r^{(k+1)}\right\|^2$ 视为关于两个实变量 $\operatorname{Re}(\omega_k)$ 和 $\operatorname{Im}(\omega_k)$ 的实函数。$\left\|r^{(k+1)}\right\|^2$ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial\left\|r^{(k+1)}\right\|^2}{\partial\operatorname{Re}(\omega_k)} = -2\left\langle r^{(k)}, H(G)r^{(k)}\right\rangle + 2\operatorname{Re}(\omega_k)\left\|Gr^{(k)}\right\|^2,$$

$$\frac{\partial\left\|r^{(k+1)}\right\|^2}{\partial\operatorname{Im}(\omega_k)} = -2\left\langle r^{(k)}, iS(G)r^{(k)}\right\rangle + 2\operatorname{Im}(\omega_k)\left\|Gr^{(k)}\right\|^2.$$

因此，函数 $\left\|r^{(k+1)}\right\|^2$ 的最小点为

$$\operatorname{Re}(\omega_k) = \frac{\left\langle r^{(k)}, H(G)r^{(k)}\right\rangle}{\left\|Gr^{(k)}\right\|^2}, \quad \operatorname{Im}(\omega_k) = \frac{\left\langle r^{(k)}, iS(G)r^{(k)}\right\rangle}{\left\|Gr^{(k)}\right\|^2}. \tag{13}$$

然而，用公式(13)计算参数 ω_k 是有挑战性的，因为向量 $H(G)r^{(k)}$ 和 $S(G)r^{(k)}$ 很难获得，计算参数 ω_k 的简单方法推导如下

$$\omega_k = \operatorname{Re}(\omega_k) + i\operatorname{Im}(\omega_k) = \frac{\left\langle r^{(k)}, H(G)r^{(k)}\right\rangle}{\left\|Gr^{(k)}\right\|^2} + \frac{\left\langle r^{(k)}, S(G)r^{(k)}\right\rangle}{\left\|Gr^{(k)}\right\|^2} = \frac{\left\langle r^{(k)}, Gr^{(k)}\right\rangle}{\left\|Gr^{(k)}\right\|^2}.$$

请注意 $Gr^{(k)} = 2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}r^{(k)} = \mathcal{A}\delta^{(k)}$，参数 ω_k 表示为

$$\omega_k = \frac{\left(r^{(k)}, \mathcal{A}\delta^{(k)}\right)}{\left\|\mathcal{A}\delta^{(k)}\right\|^2}. \tag{14}$$

在外层迭代中，确定搜索方向向量 $\delta^{(k)}$ 需要求解以下大型线性方程组：

$$(\Omega + A)\delta^{(k)} = 2r^{(k)}.$$

记方向向量 $\delta^{(k)} = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \end{pmatrix}$。将上述方程按系统原有的块 2×2 结构显式展开为：

$$\begin{pmatrix} \alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r_1^{(k)} \\ 2r_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

为了高效求解式(14)，我们提取右下角分块 $\beta I + W$ 的 Schur 补，对系数矩阵 $P = \begin{pmatrix} \alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W \end{pmatrix}$ 进行如下的精确分块矩阵分解：

$$P = M_1 M_2 M_3 = \begin{pmatrix} I & -T(\beta I + W)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \beta I + W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ (\beta I + W)^{-1}T & I \end{pmatrix}.$$

其中，对角块矩阵 M_2 中的 S 为右下角分块的 Schur 补，定义为：$S=\alpha I+W+T(\beta I+W)^{-1}T$。

通过此恒等分解，求解原方程 $M_1M_2M_3\delta^{(k)}=2r^{(k)}$ 被等价拆解为依次求解三个低维子系统：

$$\begin{cases} M_1t=\begin{pmatrix} 2r_1^{(k)} \\ 2r_2^{(k)} \end{pmatrix}, \\ M_2y=t, \\ M_3\delta^{(k)}=y. \end{cases}$$

步骤 1：求解上三角块系统 $M_1t=\begin{pmatrix} 2r_1^{(k)} \\ 2r_2^{(k)} \end{pmatrix}$

引入辅助向量

$$t=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

从下往上展开方程：

$$\begin{pmatrix} I & -T(\beta I+W)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2r_1^{(k)} \\ 2r_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

由第二行可知 $t_2=2r_2^{(k)}$，由第一行可知 $t_1-T(\beta I+W)^{-1}t_2=2r_1^{(k)}$ 为了避免显式矩阵求逆，定义辅助变量 $w^{(k)}=(\beta I+W)^{-1}\left(2r_2^{(k)}\right)$，即求解子系统：

$$(\beta I+W)w^{(k)}=2r_2^{(k)}.$$

随后可直接计算得到 t_1 (记作 $w_1^{(k)}$)：

$$w_1^{(k)}=t_1=2r_1^{(k)}+Tw^{(k)}.$$

步骤 2：求解对角块系统 $M_2y=t$

引入辅助向量 $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，展开得：

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \beta I+W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_1^{(k)} \\ 2r_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

第二行给出了 $(\beta I+W)y_2=2r_2^{(k)}$ 此方程与步骤 1 完全一致，故直接可知 $y_2=w^{(k)}$ 第一行给出了 $Sy_1=w_1^{(k)}$ 考虑到最后一步中第一行恒等式 $z_1^{(k)}=y_1$ 我们将其转化为求解核心 Schur 补子系统：

$$\left(\alpha I+W+T(\beta I+W)^{-1}T\right)z_1^{(k)}=w_1^{(k)}.$$

步骤 3：求解下三角块系统 $M_3\delta^{(k)}=y$

从上往下展开方程解出目标方向向量：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ (\beta I+W)^{-1}T & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ w^{(k)} \end{pmatrix}.$$

第一行为恒等式 $z_1^{(k)}=z_1^{(k)}$。由第二行展开得 $(\beta I+W)^{-1}Tz_1^{(k)}+z_2^{(k)}=w^{(k)}$ 复用右下角子系统结构，定义辅助变量 $v^{(k)}=(\beta I+W)^{-1}Tz_1^{(k)}$ 即求解方程：$(\beta I+W)v^{(k)}=Tz_1^{(k)}$。最终通过向量减法获取第二个方向分量：

$z_2^{(k)} = w^{(k)} - v^{(k)}$。

至此，原 $2n\times 2n$ 大规模系统的直接求逆，被完美解耦为三个 $n\times n$ 子系统的顺序求解。特别地，矩阵 $\beta I + W$ 以及核心 Schur 补矩阵 $S = \alpha I + W + T(\beta I + W)^{-1} T$ 均与迭代步数无关，它们的因子分解结果均可在外层迭代开始前预先计算并被重复利用，这极大降低了内层迭代的整体计算复杂度。

附注 1. GSS 迭代法求解的是 $2n\times 2n$ 块矩阵，也就是 $2n$ 维矩阵，本文将极小残差技术应用到 GSS 迭代法中，将对 $2n$ 维矩阵的求解转换为 n 维矩阵的求解，大大减小了计算量。

算法 2 (MRGSS 迭代法)。

1：**步骤 1：计算当前残差与收敛性判定**

2：$r_1^{(k)} = p - Wx^{(k)} + Ty^{(k)}$

3：$r_2^{(k)} = q - Tx^{(k)} - Wy^{(k)}$

4：$\left\|r^{(k)}\right\|_2 = \sqrt{\left\|r_1^{(k)}\right\|_2^2 + \left\|r_2^{(k)}\right\|_2^2}$

如果 $\left\|r^{(k)}\right\|_2 \Big/ \left\|r^{(0)}\right\|_2 \le \epsilon$

5：就有 $x^{(k)} = x^{(k)},\ y^{(k)} = y^{(k)}$

6：**步骤 2：内层代数降维求解(计算搜索方向 $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}$)**

7：求解 $M_\beta w^{(k)} = 2r_2^{(k)}$ 获得 $w^{(k)}$

8：计算 $w_1^{(k)} = 2r_1^{(k)} + Tw^{(k)}$

9：求解 $Sz_1^{(k)} = w_1^{(k)}$ 获得 $z_1^{(k)}$

10：求解 $M_\beta v^{(k)} = Tz_1^{(k)}$ 获得 $v^{(k)}$

11：计算 $z_2^{(k)} = w^{(k)} - v^{(k)}$

12：**步骤 3：计算极小残差最优步长 ω_k**

$$q_1^{(k)} = Wz_1^{(k)} - Tz_2^{(k)}$$
$$q_2^{(k)} = Tz_1^{(k)} + Wz_2^{(k)}$$
$$\omega_k = \frac{\left(r_1^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} q_1^{(k)} + \left(r_2^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} q_2^{(k)}}{\left\|q_1^{(k)}\right\|_2^2 + \left\|q_2^{(k)}\right\|_2^2}$$

13：**步骤 4：更新解向量**

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega_k z_1^{(k)}$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \omega_k z_2^{(k)}$$

给定初始猜测 $u^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ 对 $k = 0,1,2,\cdots$，计算

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

直到迭代序列 $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 满足停止准则，其中

$$\omega_k = \frac{\left(r^{(k)}, \mathcal{A}\delta^{(k)}\right)}{\left\|\mathcal{A}\delta^{(k)}\right\|^2},\quad \delta^{(k)} = 2(\Omega + A)^{-1} r^{(k)},\quad r^{(k)} = b - \mathcal{A}u^{(k)}. \tag{16}$$

附注 2. 当 $\omega_k \equiv 1$ 时，MRGSS 迭代法简化为 GSS 迭代法。

3. 收敛性分析

定理 3.1. 由[13]确定的数组 $\left(\mathrm{Re}(\omega_k), \mathrm{Im}(\omega_k)\right)$ 是函数 $\left\|r^{(k+1)}\right\|$ 的极小值点，这意味着由[14]确定的 ω_k 在复数域 $\mathbb{C}$ 中是最优的。

以上定理的证明类似于文献[20]中定理 1 的证明。

接下来，我们研究 MRGSS 迭代法的收敛性。用 $\mathcal{F}(B)$ 表示矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的集值，即 $\mathcal{F}(B) = \left\{\dfrac{y^* B y}{y^* y} \mid 0 \neq y \in \mathbb{C}^n\right\}$。然后，MRGSS 迭代法的收敛性分析如下。

定理 3.2. 用于求解复对称线性系统(1)的 MRGSS 迭代法对任意初始猜测 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ 收敛当且仅当

$$0 \notin F\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right). \tag{17}$$

此外，当(17)式成立时，残差满足

$$\left\|r^{(k+1)}\right\| \le \frac{\sqrt{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|^2 - d^2}}{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|}\left\|r^{(k)}\right\|, \tag{18}$$

对任意非负整数 k 成立，其中 d 是从零点到 $\mathcal{F}\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right)$ 的距离。

特别地，当 $\alpha = \beta$ 时，(17)式成立，该方法无条件收敛。

证明： 从公式(12)和参数 ω_k 的推导可知，$r^{(k+1)}$ 等于 $r^{(k)}$ 减去它在 $2\Omega(\Omega+\mathcal{A})^{-1} r^{(k)}$ 上的投影，这意味着 $\left\|r^{(k+1)}\right\| < \left\|r^{(k)}\right\|$ 当且仅当 $r^{(k)}$ 不正交于 $2\Omega(\Omega+\mathcal{A})^{-1} r^{(k)}$，有

$$\left(r^{(k)}, 2\Omega(\Omega+\mathcal{A})^{-1} r^{(k)}\right) \neq 0. \tag{19}$$

由于 $\delta^{(k)} = 2(\Omega+\mathcal{A})^{-1} r^{(k)}$，(19)式相当于

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W\end{bmatrix}\delta^{(k)}, \begin{bmatrix}W & -T \\ T & W\end{bmatrix}\delta^{(k)}\right) \neq 0,$$

对于任意非零向量 δ，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha I + W & -T \\ T & \beta I + W\end{bmatrix}\delta^{(k)}, \begin{bmatrix}W & -T \\ T & W\end{bmatrix}\delta^{(k)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\alpha I & 0 \\ 0 & \beta I\end{bmatrix}\delta, \begin{bmatrix}W & -T \\ T & W\end{bmatrix}\delta\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}W & -T \\ T & W\end{bmatrix}\delta, \begin{bmatrix}W & -T \\ T & W\end{bmatrix}\delta\right),\end{aligned}$$

展开得

$$\frac{1}{2}\left[\alpha\delta_1^\top W\delta_1 + \beta\delta_2^\top W\delta_2 + (\beta-\alpha)\delta_1^\top T\delta_2\right]$$

显然，因为 W 是正定矩阵，当 $\alpha = \beta$ 时，$\alpha\delta_1^\top W\delta_1 + \beta\delta_2^\top W\delta_2 > 0$，就有

$$\frac{1}{2}\left((\Omega+\mathcal{A})\delta, \mathcal{A}\delta\right) \neq 0.$$

因此，公式(19)成立，且意味着对任何正整数 k，$\left\|r^{(k+1)}\right\| < \left\|r^{(k)}\right\|$ 有

$$0 \notin F\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right).$$

注意，集值是一个闭集，$\mathcal{F}\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right)$ 到原点的距离可以定义为

$$d=\min_{0\neq y\in C^*}\left|\frac{y^*\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right)y}{y^*y}-0\right|.$$

很明显，$0<d\leq\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|$。将公式(14)代入公式(13)，我们有

$$\begin{aligned}\left\|r^{(k+1)}\right\|^2&=\left\|r^{(k)}\right\|^2-\frac{\left|\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1},r^{(k)}\right)\right|^2}{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}r^{(k)}\right\|^2}\\&=\left\|r^{(k)}\right\|^2\left(1-\left|\frac{\left(2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}r^{(k)},r^{(k)}\right)}{\left(r^{(k)},r^{(k)}\right)}\right|^2\frac{\left\|r^{(k)}\right\|^2}{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}r^{(k)}\right\|^2}\right)\\&\leq\left\|r^{(k)}\right\|^2\left(1-\frac{d^2}{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|^2}\right),\end{aligned}$$

这意味着残差序列 $\left\{r^{(k)}\right\}$ 为

$$\left\|r^{(k+1)}\right\|\leq\sigma(\alpha)\cdot\left\|r^{(k)}\right\|,$$

其中

$$\sigma(\alpha)=\frac{\sqrt{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|^2-d^2}}{\left\|2\mathcal{A}(\Omega+\mathcal{A})^{-1}\right\|}.$$

由于 $\sigma(\alpha)$ 与迭代步数 k 无关，当 $k\to\infty$，MRGSS 迭代法的残差满足

$$\left\|r^{(k+1)}\right\|\leq\sigma(\alpha)\left\|r^{(k)}\right\|\leq\cdots\leq\sigma(\alpha)^{k+1}\left\|r^{(0)}\right\|\to 0.$$

因此，用于求解复对称线性方程组(1)的 MRPSHSS 迭代法对任意 $\alpha>0$ 和任意初始向量 $x^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ 都是无条件收敛的。

4. 数值实验

在这一节中，我们将测试 MRGSS 迭代法求解复对称线性方程组(1)的有效性和可行性，为了说明 MRGSS 迭代法的优越性，与 HSS 迭代法，MHSS 迭代法，GSOR 迭代法和 GSS 迭代法的数值实验做了比较，包括迭代步数和经过的 CPU 时间(CPU)，所有数值计算都是在 Intel i5 2.40 GHz CPU 和 8.5899 GB RAM 计算机上使用 MATLAB (R2019a)计算的。

在实验中，初始向量 $x^{(0)}$ 被选择为零向量，迭代停止条件为当前迭代 $x^{(k)}$ 满足

$$\frac{\left\|b-Ax^{(k)}\right\|_2}{\left\|b\right\|_2}\leq 10^{-6}$$

其中 $x^{(k)}$ 是当前近似值。

在下面实验中，对于 GSS 迭代法，为了方便计算，我们取 $\alpha=\beta$ 。

考虑以下复 Helmholtz 方程：

$$-\Delta u+\sigma_1 u+i\sigma_2 u=f,$$

其中，σ_1 和 σ_2 是实系数函数，u 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义且满足 Dirichlet 边界条件。使用一致网格步长 $h=\frac{1}{m+1}$ 的五点中心差分格式离散负拉普拉斯算子，得到的矩阵为 H，将其写为张量积形式 $H=I\otimes B_m+B_m\otimes I$，其中，$B_m=h^{-2}\cdot \mathrm{tridiag}(-1,2,-1)\in R^{m\times m}$。因此，$H\in R^{n\times n}$ 是一个块三对角矩阵，其中 $n=m^2$，由此导出复对称线性系统：

$$\left[(H+\sigma_1 I)+i\sigma_2 I\right]x=b.$$

另外，我们取右端项 $b=(1+i)A\mathbf{1}$ 其中 $\mathbf{1}$ 表示所有元素都为 1 的列向量。进一步，我们通过两边同乘 h^2 将系数矩阵和右端项规范化。

表 1 中，我们给出了具有不同参数 σ_1,σ_2 的 MHSS，MRMHSS，GSOR，GSS 和 MRGSS 迭代方法的迭代最优参数。

见表 2，我们给出了具有不同参数 σ_1,σ_2 的 MHSS，MRMHSS，GSOR，GSS 和 MRGSS 迭代方法的迭代次数(IT)和 CPU 时间(CPU)。

Table 1. The experimentally optimal parameters for $\sigma_1=1000$

表 1. $\sigma_1=1000$ **时的实验最优参数**

σ_2	方法	网格				
		16 × 16	32 × 32	64 × 64	128 × 128	256 × 256
5	MHSS $(\alpha_{\exp})$	0.02	0.008	0.005	0.002	0.0008
	MRMHSS $(\alpha_{\exp})$	0.078	0.006	0.009	0.0035	0.0009
	GSOR $(\alpha_{\exp})$	0.83	0.8	1.3	0.58	0.52
	GSS $(\alpha_{\exp})$	5.2	2.2	1.1	0.6	0.3
	$(\beta_{\exp})$	4.7	2.2	1.1	0.6	0.3
	MRGSS $(\alpha_{\exp})$	0.02	0.003	0.0005	0.0002	0.0001
1000	MHSS $(\alpha_{\exp})$	2.7	1.1	0.85	0.66	0.37
	MRMHSS $(\alpha_{\exp})$	0.74	0.22	0.08	0.02	0.004
	GSOR $(\alpha_{\exp})$	0.82	0.83	0.84	0.69	0.88
	GSS $(\alpha_{\exp})$	3.1	1.9	1	0.6	0.29
	$(\beta_{\exp})$	8.7	2	1.2	0.5	0.28
	MRGSS $(\alpha_{\exp})$	0.007	0.0002	0.0005	0.0011	0.0005

Table 2. Numerical results for four methods using experimentally optimal parameters for $\sigma_1 = 1000$
表 2. $\sigma_1 = 1000$ 时，四种方法使用实验最优参数的数值结果

σ_2	方法	网格					
		$m \times m$	16 × 16	32 × 32	64 × 64	128 × 128	256 × 256
5	MHSS	IT	40	44	73	106	160
		CPU	0.0115	0.0375	0.2844	2.4735	18.3512
	MRMHSS	IT	3	3	3	4	4
		CPU	0.0004	0.0004	0.055	0.0462	0.2947
	GSOR	IT	8	9	12	16	19
		CPU	0.0005	0.001	0.006	0.288	0.1515
	GSS	IT	9	16	31	62	114
		CPU	0.0007	0.0053	0.0568	0.7345	0.9966
1000	MRGSS	IT	2	2	2	2	3
		CPU	0.0004	0.0013	0.0039	0.0267	0.1881
	MHSS	IT	21	23	34	77	150
		CPU	0.0058	0.0176	0.152	1.9369	18.5295
	MRMHSS	IT	4	7	9	9	9
		CPU	0.0006	0.0021	0.00185	0.109	1.2801
	GSOR	IT	9	9	12	13	17
		CPU	0.0006	0.0021	0.0052	0.0344	0.3156
	GSS	IT	12	18	32	63	114
		CPU	0.0009	0.0057	0.0575	0.7785	6.3143
	MRGSS	IT	2	2	2	3	3
		CPU	0.0002	0.0025	0.0049	0.0271	0.1817

综上，MRGSS 迭代法展现出优于其他四种迭代法的数值性能，尤其是在大规模的问题中表现更为突出。

5. 总结与展望

本章基于极小残差的思想，将极小残差技术应用于广义位移分裂(GSS)迭代法中，提出了一类求解复对称线性方程组的极小残差广义位移分裂(MRGSS)迭代法。首先，我们详细阐述了 MRGSS 迭代法的构造过程，分析了其基本性质和实现细节。理论分析表明，MRGSS 迭代法在适当的条件下是无条件收敛的。此外，本章还通过数值实验确定了 MRGSS 迭代法中迭代参数的最优取值，使得迭代矩阵的谱半径达到最小，从而最大限度地提高收敛速度。最后，通过一系列数值算例对 MRGSS 迭代法的有效性进行了验证。数值结果表明，与现有的其他迭代法相比，MRGSS 迭代法在迭代次数上表现出明显的优势，尤其当问题规模较大时，其高效性更加突出。

参考文献

[1] Bertaccini, D. (2004) Efficient Solvers for Sequences of Complex Symmetric Linear Systems, Electron. *Transactions on Numerical Analysis*, **18**, 49-64.

[2] Feriani, A., Perotti, F. and Simoncini, V. (2000) Iterative System Solvers for the Frequency Analysis of Linear

Mechanical Systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 1719-1739. https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00187-0

[3] Poirier, B. (2000) Efficient Preconditioning Scheme for Block Partitioned Matrices with Structured Sparsity. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **7**, 715-726. https://doi.org/10.1002/1099-1506(200010/12)7:7/8<715::aid-nla220>3.0.co;2-r

[4] Benzi, M. and Bertaccini, D. (2008) Block Preconditioning of Real-Valued Iterative Algorithms for Complex Linear Systems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **28**, 598-618. https://doi.org/10.1093/imanum/drm039

[5] Arridge, S.R. (1999) Optical Tomography in Medical Imaging. *Inverse Problems*, **15**, R41-R93. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/2/022

[6] Bai, Z., Benzi, M. and Chen, F. (2010) Modified HSS Iteration Methods for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Computing*, **87**, 93-111. https://doi.org/10.1007/s00607-010-0077-0

[7] Bai, Z., Benzi, M. and Chen, F. (2011) On Preconditioned MHSS Iteration Methods for Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Algorithms*, **56**, 297-317. https://doi.org/10.1007/s11075-010-9441-6

[8] Li, X., Yang, A. and Wu, Y. (2014) Lopsided PMHSS Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Algorithms*, **66**, 555-568. https://doi.org/10.1007/s11075-013-9748-1

[9] Wu, S. (2015) Several Variants of the Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **22**, 338-356. https://doi.org/10.1002/nla.1952

[10] Cao, Y. and Ren, Z. (2015) Two Variants of the PMHSS Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Indefinite Linear Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **264**, 61-71. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.049

[11] Axelsson, O. and Kucherov, A. (2000) Real Valued Iterative Methods for Solving Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **7**, 197-218. https://doi.org/10.1002/1099-1506(200005)7:4<197::aid-nla194>3.0.co;2-s

[12] Salkuyeh, D.K., Hezari, D. and Edalatpour, V. (2015) Generalized Successive Overrelaxation Iterative Method for a Class of Complex Symmetric Linear System of Equations. *International Journal of Computer Mathematics*, **92**, 802-815. https://doi.org/10.1080/00207160.2014.912753

[13] Hezari, D., Edalatpour, V. and Salkuyeh, D.K. (2015) Preconditioned GSOR Iterative Method for a Class of Complex Symmetric System of Linear Equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **22**, 761-776. https://doi.org/10.1002/nla.1987

[14] Zeng, M. and Zhang, G. (2015) Generalized Shift-Splitting Iteration Method for a Class of Two-By-Two Linear Systems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **53**, 271-283. https://doi.org/10.1007/s12190-015-0967-6

[15] Zheng, Q.-Q. and Ma, C.-F. (2016) Accelerated PMHSS Iteration Methods for Complex Symmetric Linear Systems. Numerical Algorithms, 73, 501-516.

[16] Cao, Y., Du, J. and Niu, Q. (2014) Shift-Splitting Preconditioners for Saddle Point Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **272**, 239-250. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.05.017

[17] Chen, C. and Ma, C. (2015) A Generalized Shift-Splitting Preconditioner for Saddle Point Problems. *Applied Mathematics Letters*, **43**, 49-55. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.12.001

[18] Salkuyeh, D.K., Masoudi, M. and Hezari, D. (2015) On the Generalized Shift-Splitting Preconditioner for Saddle Point Problems. *Applied Mathematics Letters*, **48**, 55-61. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.02.026

[19] Chen, C. and Ma, C. (2018) A Generalized Shift-Splitting Preconditioner for Complex Symmetric Linear Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **344**, 691-700. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.06.013

[20] Zhang, W., Yang, A. and Wu, Y. (2020) Minimum Residual Modified HSS Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Algorithms*, **86**, 1-17.